

WEBSITE: TAILIEUMONTOAN.COM

TUYỂN TẬP ĐỀ THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN 9

Th.s NGUYỄN CHÍNH EM

MỤC LỤC

A	ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 KHÔNG CHUYÊN	10
1	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bắc Giang	11
2	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bắc Ninh	14
3	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bến Tre	17
4	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bình Dương	20
5	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bình Phước	23
6	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bình Thuận	27
7	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Cần Thơ	30
8	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Điện Biên	35
9	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Đồng Nai	39
10	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Gia Lai	43
11	Đề thi vào 10, Sở Giáo Dục Hải Dương	47
12	Đề thi vào 10, Sở Giáo dục Hải Phòng	50
13	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Nam	54
14	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Nội	58
15	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Tĩnh	62
16	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hòa Bình	66
17	Đề thi vào 10, Sở giáo dục TP HCM	70
18	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hưng yên	74
19	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Kiên Giang	78
20	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Lào Cai	81
21	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Long An	84
22	Đề thi vào 10, Sở Giáo dục Nam Định	88
23	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Nghệ an	91
24	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Ninh Bình	94
25	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Ninh Thuận	97
26	Đề thi vào 10, Sở Giáo dục Phú Thọ	100
27	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Quảng Nam	103
28	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Quảng Ninh	106

29	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Sơn La	110
30	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Thái Bình	113
31	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Thái Nguyên	116
32	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Thanh Hóa-Đề A	120
33	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Thanh Hóa, Đề B	123
34	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long	126
35	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Phúc	129
36	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bà Rịa - Vũng Tàu	132
37	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Yên Bái	136
38	Đề thi vào 10, Sở giáo dục An Giang	140
39	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bắc Giang	144
40	Đề thi vào 10, Sở GD-ĐT Bắc Ninh	148
41	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bến Tre	152
42	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bình Định	155
43	Đề thi vào 10, Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Dương	159
44	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bình Thuận	162
45	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Cà Mau	165
46	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Cần Thơ	168
47	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Cao Bằng	172
48	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Đắklak	175
49	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Đà Nẵng	179
50	Đề thi vào 10, Sở giáo dục tỉnh Đồng Nai	182
51	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Gia Lai	186
52	Đề thi vào 10, Sở GD-ĐT Hải Dương	189
53	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hải Phòng	193
54	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Nam	198
55	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Nội	201
56	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Nghệ an	206
57	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Nam Định	210
58	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Long An	214
59	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Lạng Sơn	217
60	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Lâm Đồng	220
61	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Lai Châu	223
62	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Kiên Giang	227
63	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Khánh Hòa	230
64	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hưng Yên	233
65	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Thừa Thiên Huế	236
66	Đề thi vào 10, Sở giáo dục TP HCM	240
67	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Tĩnh	249
68	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Ninh Bình	251

69	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Ninh Thuận	254
70	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Phú Thọ	256
71	Đề thi vào 10, Sở giáo dục đào tạo Phú Yên	260
72	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Quảng Ngãi	263
73	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Quảng Ninh	267
74	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Thái Bình	270
75	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Thái Nguyên	273
76	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Thanh Hóa	276
77	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Tiền Giang	279
78	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Trà Vinh	282
79	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long	285
80	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Phúc	289
81	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Bà Rịa Vũng Tàu	293
82	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, An Giang	297
83	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Bắc Giang	301
84	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Bắc Kạn	305
85	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Bạc Liêu	309
86	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Bà Rịa Vũng Tàu	313
87	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Bình Định	318
88	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Bình Dương	322
89	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Bình Phước	326
90	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Cần Thơ	330
91	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Cao Bằng	342
92	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Đắk Lắk	345
93	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, thành phố Đà Nẵng	349
94	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Điện Biên	354
95	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Đồng Nai	361
96	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Hải Dương	365
97	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, thành phố Hải Phòng	369
98	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Hà Nam	374
99	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Hà Nội	378
100	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Hà Tĩnh - Đề 1	381
101	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Hà Tĩnh - Đề 2	384
102	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Hậu Giang	387
103	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, TP Hồ Chí Minh	396
104	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Hưng Yên	401
105	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Kiên Giang	412
106	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Lào Cai	416
107	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Long An	421
108	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Nam Định	425

109	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Nghệ An	431
110	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Ninh Bình	434
111	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Phú Thọ	438
112	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Phú Yên	444
113	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Quảng Ngãi	451
114	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Quảng Trị	458
115	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Tây Ninh	461
116	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Thái Bình	466
117	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Thái Nguyên	469
118	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Thanh Hóa	473
119	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Thừa Thiên Huế	477
120	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Tiền Giang	481
121	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Trà Vinh	484
122	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Vĩnh Long	488
123	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Vĩnh Phúc	492
124	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Yên Bái, mã đề 009	498
125	Đề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, tỉnh Yên Bái, mã 022	514

B ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN 529

1	Đề thi vào 10, Chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội	530
2	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hưng Yên	534
3	Đề thi vào 10, Chuyên ĐH Khoa học Tự nhiên, vòng 1	538
4	Đề thi vào 10, Chuyên Sư Phạm Hà Nội Vòng 2	542
5	Đề thi vào 10, Chuyên Bắc Giang	547
6	Đề thi vào 10 Chuyên, Sở giáo dục Bạc Liêu	552
7	Thi vào 10 chuyên, Sở Giáo dục Bắc Ninh	555
8	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bến Tre	559
9	Đề thi vào 10, Chuyên Biên Hòa Hà Nam vòng 1	565
10	Đề thi vào 10, Chuyên Biên Hòa Hà Nam	568
11	Đề thi vào 10, Chuyên Bình Phước	572
12	Đề thi vào 10, chuyên đại học Vinh vòng 2	577
13	Đề thi vào 10 Chuyên, Sở giáo dục Đắk Lắk	581
14	Đề thi vào 10, Chuyên Đồng Tháp	585
15	Đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, V2	590
16	Đề thi vào 10, Chuyên Hà Nội	594
17	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hà Tĩnh	598
18	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hậu Giang	602
19	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hòa Bình, Chuyên Hoàng Văn Thụ	606
20	Đề thi vào 10, THPT Chuyên Tp Hồ Chí Minh	610
21	Đề thi vào 10 chuyên Toán, vòng 2, Chuyên Hùng Vương Gia Lai	614

22	Đề thi vào 10, Chuyên Hùng Vương, Sở giáo dục Phú Thọ	618
23	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hưng Yên	622
24	Đề thi vào 10, Chuyên Hưng Yên Vòng 2	626
25	Đề thi vào 10, Chuyên Khoa học Tự nhiên Hà Nội, Vòng 1	630
26	Đề thi vào 10, Chuyên KHTN Hà Nội, V2	634
27	Đề thi vào 10, Chuyên Kiên Giang	637
28	Đề thi vào 10 Chuyên, Sở Giáo dục Lâm Đồng	640
29	Đề thi vào 10, Chuyên Lam Sơn, V1	645
30	Đề thi vào 10, Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, Vòng 2	649
31	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Lào Cai	652
32	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định (Vòng 1)	656
33	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định vòng 2	660
34	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, vòng 1	663
35	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng	667
36	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Ninh Thuận	672
37	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Vũng Tàu	675
38	Đề thi vào lớp 10, Chuyên Long An	680
39	Đề thi vào 10, Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai	684
40	Đề thi vào 10, Chuyên Lương Văn Tụy Ninh Bình	687
41	Đề thi vào 10, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An	691
42	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Quảng Bình	695
43	Đề thi vào 10, Chuyên Quốc Học Huế, vòng 2	699
44	Đề thi vào 10 Chuyên, Sở Giáo dục Sơn La	703
45	Đề thi vào 10, Chuyên sư phạm Hà Nội - Vòng 1	706
46	Đề thi vào 10, Chuyên Toán Đại Học Sư Phạm Hà Nội vòng 2	710
47	Đề thi vào 10, Chuyên ĐHSPT HCM, Vòng 2	714
48	Đề thi vào 10 Chuyên, Sở Giáo dục Tây Ninh	717
49	Đề thi vào 10, Chuyên Thái Bình - Vòng 2	721
50	Đề thi vào 10, Chuyên Thái Nguyên	725
51	Đề thi vào 10, Chuyên Trần Phú, Hải Phòng	729
52	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long	734
53	Đề thi vào 10, Chuyên Vĩnh Phúc, vòng 1	739
54	Đề thi vào 10, Chuyên Vĩnh Phúc - V2	742
55	Đề thi vào 10 Chuyên, Sở Giáo dục Vũng Tàu, Vòng 1	746
56	Đề thi vào 10, PTNK, TPHCM	749
57	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục An Giang	752
58	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bắc Giang	755
59	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bạc Liêu	759
60	Đề thi vào 10, Chuyên Bắc Ninh, Bắc Ninh	764
61	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bình Dương	768

62	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bình Phước	771
63	Đề thi vào 10, Chuyên Đại Học Vinh, Vòng 1	775
64	Đề thi vào 10, Chuyên Đại Học Vinh, Vòng 2	778
65	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Đắk Lắk	781
66	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Đồng Tháp	786
67	Đề thi vào 10 chuyên Hạ Long, Sở giáo dục Quảng Ninh	790
68	Đề thi vào chuyên Toán 10, Sở giáo dục Hà Nội	793
69	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hà Tĩnh	798
70	Đề thi vào 10, Chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh	801
71	Đề thi vào 10, Chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình	805
72	Đề thi vào lớp 10, Chuyên Hùng Vương-Gia Lai	808
73	Đề thi vào 10, Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, Vòng 1	812
74	Đề thi vào 10, Chuyên Hùng Vương Phú Thọ, Vòng 2	818
75	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hưng Yên	822
76	Đề thi vào 10, Chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang	826
77	Đề thi vào 10, Chuyên KHTN Hà Nội vòng 1	830
78	Đề thi vào 10, Chuyên KHTN, Hà Nội, V2	833
79	Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Lâm Đồng	839
80	Đề thi vào 10, Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa	843
81	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định (Vòng 1)	848
82	Đề thi vào 10, Chuyên LHP Nam Định vòng 2	852
83	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi	855
84	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, vòng 1	859
85	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng	862
86	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị	868
87	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Vũng Tàu Vòng 1	871
88	Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Vũng Tàu V2	876
89	Đề thi vào 10, Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai	880
90	Đề thi vào 10, Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình	884
91	Đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Tất Thành - Kon Tum	887
92	Đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương	891
93	Đề thi vào 10, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An	897
94	Đề thi vào 10 PTNK Hồ Chí Minh	902
95	Đề thi vào 10 THPT Chuyên Quốc Học Huế Vòng 1	907
96	Đề thi vào 10, Chuyên Toán, THPT Chuyên Quốc Học Huế Vòng 2	911
97	Đề thi vào 10, Trường THPT chuyên DHSP - Vòng 1	916
98	Đề thi vào 10, Chuyên đại học sư phạm Hà Nội - Vòng 2	922
99	Đề thi vào 10, Chuyên Thái Bình - Vòng 2	926
100	Đề thi vào 10, Chuyên Thái Bình - Vòng 1	930
101	Đề thi vào 10, Chuyên Thái Nguyên	935

102	Đề thi vào 10, Chuyên THPT, TPHCM	940
103	Đề thi vào 10, Chuyên Tiền Giang	943
104	Đề thi vào 10, Sở Giáo Dục Hà Nội - Chuyên Tin	946
105	Đề thi vào 10, Chuyên Trần Phú, Hải Phòng	951
106	Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long	955
107	Đề thi vào 10, Chuyên Vĩnh Phúc Vòng 2	959
108	Đề thi vào 10, trường THPT Năng Khiếu	963

C ĐỀ THI HSG LỚP 9 967

1	Đề thi HSG Lớp 9 - Quận Ba Đình - TP Hà Nội năm 2017	968
2	Đề thi Toán 9 HSG, Tp. Đà Nẵng	972
3	Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, Lâm Đồng	976
4	Đề thi HSG lớp 9, Nghệ An, Bảng A	981
5	Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, Quảng Bình	985
6	Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi, An Giang	988
7	HSG Toán 9, huyện Bình Giang, tỉnh Hải Dương	993
8	Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi, Tp. Đà Nẵng	996
9	Đề thi HSG toán 9 tỉnh Hải Dương	999
10	Đề thi chọn HSG Toán 9, Tỉnh Hà Tĩnh	1003
11	Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi, tỉnh Quảng Ninh	1007
12	Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi, Kiên Giang	1011
13	Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, Tiền Giang	1014
14	Đề thi Toán 9 Học sinh gỏi, Tỉnh Bắc Ninh	1019
15	Đề thi học sinh giỏi Toán 9, Nghi Xuân, Hà Tĩnh	1023
16	Đề thi Toán 9 Học sinh gỏi, Ninh Thuận	1027
17	Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, Vĩnh Phúc	1030
18	Đề thi Toán 9 Học sinh gỏi năm học 2017-2018, An Giang.	1033
19	Đề thi Toán 9 Học sinh gỏi, Sở GD Bến Tre	1037
20	Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi, Hải Phòng	1041
21	Đề thi HSG Toán 9, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế, 2017	1047
22	Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2016-2017, Thanh Hóa	1051
23	Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2016-2017, Sở GD&ĐT Thừa Thiên Huế	1055
24	Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2016-2017, Thành phố Hồ Chí Minh	1062
25	Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2017-2018, Bình Định	1066
26	Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2017-2018, Hải Dương	1070
27	Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 năm học 2017-2018, Huyện Tiền Hải - Tỉnh Thái Bình	1075
28	Đề thi HSG Lớp 9 - Quận Cầu Giấy - TP Hà Nội năm 2017-2018, Vòng 1 . .	1079
29	Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2010 - 2011	1083
30	Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2011-2012	1087

31	Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội, năm học 2012 - 2013	1091
32	Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2013 - 2014	1095
33	Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2014-2015	1099
34	Đề thi HSG Lớp 9 - TP Hà Nội năm học 2016 - 2017	1104
35	Đề thi HSG Lớp 9 - Quận Hoàn Kiếm - TP Hà Nội năm 2018	1108

PHẦN



ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 KHÔNG CHUYÊN

1 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BẮC GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- Tính giá trị của biểu thức $A = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{48}$.
- Tìm m để hàm số $y = (2m - 1)x + 5$, $\left(m \neq \frac{1}{2}\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- $A = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$.
- Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

□

Câu 2.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2. \end{cases}$
- Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{6x}{x-1}\right) \cdot \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (Với $x \geq 0, x \neq 1$).
- Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số) (1).

(a) Giải phương trình (1) với $m = 0$.

(b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\left|\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

- Nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (1; -1)$.
- Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) + 6x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{(-6\sqrt{x}+6x) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 6x. \end{aligned}$$

3.

(a) Với $m = 0$, phương trình trở thành $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

(b) $\Delta' = m^4 + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$.

Khi đó theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = 2m - 3. \end{cases}$

$$\text{Mặt khác } P = \left|\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right| = \frac{|x_1 + x_2|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}} = \frac{|x_1 + x_2|}{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 4}}.$$

$$\text{Xét biểu thức } Q = \frac{(m+1)^2}{m^2+4} \Leftrightarrow (Q-1)m^2 - 2m + 4Q - 1 = 0.$$

- Nếu $Q = 1$ thì $m = 2$.
- Nếu $Q \neq 1$ thì $\Delta_m = -4Q^2 + 5Q \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq Q \leq \frac{5}{4}$.

Do đó $P = \sqrt{Q} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $m = 4$.

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 3. Một hiệu sách A có bán hai đầu sách: Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 và Hướng dẫn học tốt môn Ngữ văn lớp 10. Trong một ngày của tháng 5 năm 2016, hiệu sách A bán được 60 cuốn của mỗi loại trên theo giá bìa, thu được số tiền là 3 300 000 đồng và lãi được 420 000 đồng. Biết mỗi cuốn hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 lãi 10% giá bìa, mỗi cuốn Hướng dẫn học tốt môn Ngữ văn lớp 10 lãi 15% giá bìa. Hỏi giá bìa của mỗi cuốn sách đó là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi giá bìa cuốn hướng dẫn học tốt môn Toán là x đồng, và giá bìa cuốn hướng dẫn học tốt môn Ngữ văn là y đồng. ($x, y > 0$).

Hiệu sách bán 60 cuốn mỗi loại thu 3 300 000 đồng nên ta có phương trình

$$60x + 60y = 3300000 \Leftrightarrow x + y = 55000 \quad (1).$$

Số tiền lãi bán 60 cuốn Toán là $6x$. Số tiền lãi bán 60 cuốn Văn là $9y$.

Tổng số tiền lãi là 420000 nên ta có phương trình

$$6x + 9y = 420000 \Leftrightarrow 2x + 3y = 140000 \quad (2).$$

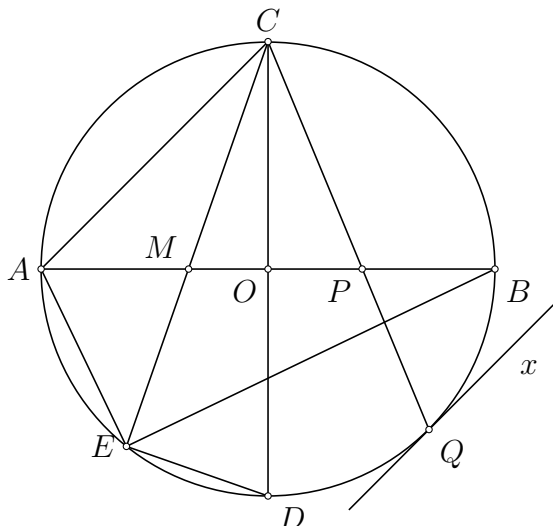
Từ (1) và (2) ta được hệ $\begin{cases} x + y = 55000 \\ 2x + 3y = 140000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25000 \\ y = 30000. \end{cases}$

□

Câu 4. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Gọi E là một điểm trên cung nhỏ AD (E không trùng với A và D), nối EC cắt OA tại M . Trên tia AB lấy điểm P sao cho $AP = AC$, tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai là Q .

1. CMR $DEMO$ là tứ giác nội tiếp.
2. CMR tiếp tuyến của đường tròn (O) tại Q song song với AC .
3. CMR $AM \cdot ED = \sqrt{2} \cdot OM \cdot EA$.
4. Nối EB cắt OD tại N , xác định vị trí của E để tổng $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{MOD} = \widehat{MED} = 90^\circ$ nên $OMED$ là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có $AC = AP$ nên $\widehat{ACP} = \widehat{APC}$ (1).

Kẻ tia tiếp tuyến Qx sao cho $\widehat{CQx}$ chắn cung $\widehat{CBQ}$. Khi đó

$$\widehat{APC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{BQ}); \widehat{CQx} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{CBQ} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CB} + \text{sđ}\widehat{BQ}) \text{ và } \text{sđ}\widehat{AC} = \text{sđ}\widehat{BC}.$$

$$\Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{CQx} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CQx} = \widehat{ACQ} \Rightarrow Qx \parallel AC$.

3. $\triangle COM \sim \triangle CED$ (g.g) nên $\frac{OM}{ED} = \frac{OC}{CE}$.

$$\triangle CMA \sim \triangle CAE \text{ (g.g) nên } \frac{AM}{EA} = \frac{AC}{CE} = \frac{CO\sqrt{2}}{CE}.$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{EA} = \frac{\sqrt{2}OM}{ED} \Leftrightarrow AM \cdot ED = \sqrt{2}OM \cdot EA.$$

4. Theo câu 3. ta có $\frac{AM}{EA} = \frac{\sqrt{2}OM}{ED} \Leftrightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{ED}{\sqrt{2}EA}$.

$$\text{Tương tự ta cũng chứng minh được } \frac{DN}{ED} = \frac{\sqrt{2}ON}{AE} \Leftrightarrow \frac{ON}{DN} = \frac{AE}{\sqrt{2}ED}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN} = \frac{ED}{\sqrt{2}EA} + \frac{AE}{\sqrt{2}ED} \geq \sqrt{2} \text{ (Theo BDT Cô-si).}$$

Dấu "=" xảy ra khi $ED = EA$ hay E nằm chính giữa $\widehat{AD}$.

□

Câu 5. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \leq 2$ và $x + y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 14x^2 + 9y^2 + 22xy - 42x - 34y + 35.$$

Lời giải.

Đặt $x = 2 - a$; $x + y = 2 + b$ từ đó suy ra $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $y = a + b$. Ta được

$$\begin{aligned} A &= 14(2 - a)^2 + 9(a + b)^2 + 22(2 - a)(a + b) - 42(2 - a) - 34(a + b) + 35 \\ &= a^2 + 9b^2 - 4ab - 4a + 10b + 7 = (a - 2b - 2)^2 + 5b^2 + 2b + 3 \geq 3, \quad \forall a, b \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3 khi $x = 0$, $y = 2$.

□

————— **HẾT** —————

2 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BẮC NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{x+1}$ với $x = 8$.
 b) Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$.
 c) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Lời giải.

- a) Với $x = 8$ thì $P = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$.
 b) Ta có $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.
 c) $A = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

□

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=m \\ 2x+5y=1 \end{cases}$ với m là tham số.

- a) Giải hệ phương trình khi $m = 0$.
 b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) sao cho x và y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - (3m-1)t + m^4 + 9m - 13 = 0$ với t là ẩn số.

Lời giải.

- a) Khi $m = 0$ thì hệ trở thành $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=0 \\ 2x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x+2y=m \\ 2x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=2m \\ 2x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5m-2 \\ y=1-2m \end{cases}$

Vì x và y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - (3m-1)t + m^4 + 9m - 13 = 0$ nên theo hệ thức Vi-et ta có:

$$x \cdot y = m^4 + 9m - 13 \Leftrightarrow (5m-2) \cdot (1-2m) = m^4 + 9m - 13 \Leftrightarrow m^4 + 10m^2 - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = -11 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Thử lại, $m = 1, m = -1$ thỏa bài toán.

□

Câu 3. Quãng đường từ Bắc Ninh đi Hà Nội dài 30 km. Một ô tô đi từ Bắc Ninh đi Hà Nội, rồi từ Hà Nội về Bắc Ninh. Biết vận tốc lúc đi lớn hơn vận tốc lúc về là 10 km/h. Do đó, thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 9 phút. Tính vận tốc của ô tô khi đi từ Bắc Ninh ra Hà Nội.

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc của ô tô đi từ Bắc Ninh ra Hà Nội ($x > 0$).

Suy ra vận tốc ô tô đi từ Hà Nội về Bắc Ninh là $x + 10$ (km/h).

Đổi 9 phút = $\frac{3}{20}$ (h).

Theo đề, ta có phương trình: $\frac{30}{x} - \frac{30}{x+10} = \frac{3}{20}$

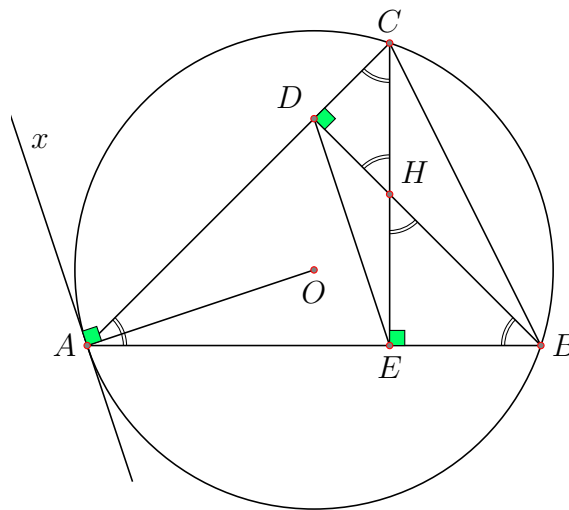
$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = -50 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ô tô khi đi từ Bắc Ninh ra Hà Nội là 40 (km/h). $\square$

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, góc $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Các đường cao BD, CE (D thuộc AC, E thuộc AB) cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ nội tiếp một đường tròn.
- Chứng minh rằng tam giác HDC vuông cân tại D .
- Tính tỉ số $\frac{DE}{BC}$.
- Chứng minh rằng OA vuông góc với DE .

Lời giải.



a) Vì $\begin{cases} BD \perp AC \Rightarrow \widehat{HDA} = 90^\circ \\ CE \perp AB \Rightarrow \widehat{HEA} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{HDA} + \widehat{HEA} = 180^\circ.$

Vậy tứ giác $ADHE$ nội tiếp.

b) Tam giác ACE vuông tại E , có $\widehat{A} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = 45^\circ$ (1).

Mặt khác, tứ giác $ADHE$ nội tiếp nên $\widehat{BHE} = \widehat{A}$ hay $\widehat{BHE} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{DHC} = \widehat{BHE}$ (đđ) $\Rightarrow \widehat{DHC} = 45^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DHC} = \widehat{DCH}$, hay $\triangle DCH$ vuông cân tại D .

c) $\triangle ADB$ vuông cân tại D nên $\widehat{DBA} = 45^\circ$ (3).

Từ (1) và (3) $\Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{DBE} = 45^\circ \Rightarrow$ tứ giác $CDEB$ nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CBE} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) Qua A vẽ tiếp tuyến Ax .

Ta có $\widehat{CAx} = \widehat{ABC}$ (góc tạo bởi tiếp và dây cung cùng chắn cung $\widehat{AC}$).

Mặt khác: $\widehat{ABC} = \widehat{ADE} \Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{ADE} \Rightarrow Ax \parallel DE$ hay $AO \perp DE$ (đpcm).

□

Câu 5.

- a) Giải phương trình $x^2 + 2x - 3 = 4\sqrt{2x+3}$.
 b) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b = 4c$. Chứng minh rằng

$$2\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - 2ac + 4c^2} + \sqrt{b^2 - 2bc + 4c^2} \geq 8c.$$

Lời giải.

- a) Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow (x+2)^2 = (\sqrt{2x+3}+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}+2 = x+2 & (1) \\ \sqrt{2x+3}+2 = -x-2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \Leftrightarrow x = 3 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = -x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ 2x+3 = (x+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x^2 + 6x + 13 = 0 \end{cases} \text{ (hệ vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 3$.

- b) Với $c \leq 0$ thì bất đẳng thức đúng.

Với $c > 0$ thì chia hai vế của bất đẳng thức cho c , ta được:

$$P = 2\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \left(\frac{b}{c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 2\frac{a}{c} + 4} + \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2\frac{b}{c} + 4} \geq 8(*)$$

Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, ta có $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \geq 8$.

Suy ra

$$P \geq 2\sqrt{8 - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}} + \sqrt{\left(\frac{a}{c} - 1\right)^2 + 3} + \sqrt{\left(\frac{b}{c} - 1\right)^2 + 3}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } 2\sqrt{8 - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}} + \sqrt{\left(\frac{a}{c} - 1\right)^2 + 3} + \sqrt{\left(\frac{b}{c} - 1\right)^2 + 3} \geq 8 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } a + b = 4c \Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 4.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cô-si thì } \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} \leq \frac{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^2}{4} = 4.$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{8 - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}} \geq 4 \quad (2)$$

$$\text{và } \sqrt{\left(\frac{a}{c} - 1\right)^2 + 3} + \sqrt{\left(\frac{b}{c} - 1\right)^2 + 3} \geq \sqrt{\left(\frac{a}{c} - 1 + \frac{b}{c} - 1\right)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = 4 \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra (1) đúng, nên (*) đúng. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 2c$.

□

———— HẾT ————

3 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BẾN TRE

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Không sử dụng máy tính cầm tay.

- a) Tính $\sqrt{8} - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 6. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $\sqrt{8} - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$.

□

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = -2x + 3$.

- a) Vẽ đồ thị của d và (P) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) bằng phép tính.

Lời giải.

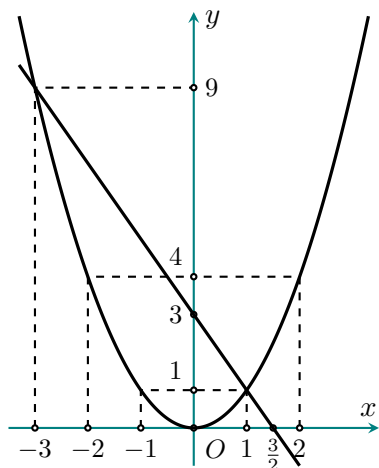
- a) Đường thẳng d đi qua các điểm có tọa độ $(0; 3); \left(\frac{3}{2}; 0\right)$ và ta có bảng giá trị của hàm số $y = x^2$ như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Do đó ta có đồ thị như hình vẽ bên

- b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$



- Với $x = 1$ thì $y = 1$.
- Với $x = -3$ thì $y = 9$.

Vậy tọa độ các giao điểm của hai đồ thị là $(1; 1)$ và $(-3; 9)$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$ (m là tham số).

- Giải phương trình trên khi $m = 1$.
- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2}$.

Lời giải.

- Thay $m = 1$, ta được phương trình $x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2 + \sqrt{2}$ và $x = 2 - \sqrt{2}$.

- Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - 2m = m^2 + 1 > 0$, với mọi m .

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

- Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases}$

Yêu cầu của bài toán tương đương với

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \geq 0 \\ x_1 x_2 = 2m > 0 \\ x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2m + 2 + 2\sqrt{2m} = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Do điều kiện (1) nên $2m + 2 + 2\sqrt{2m} \geq 0$, vì vậy (2) $\Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).

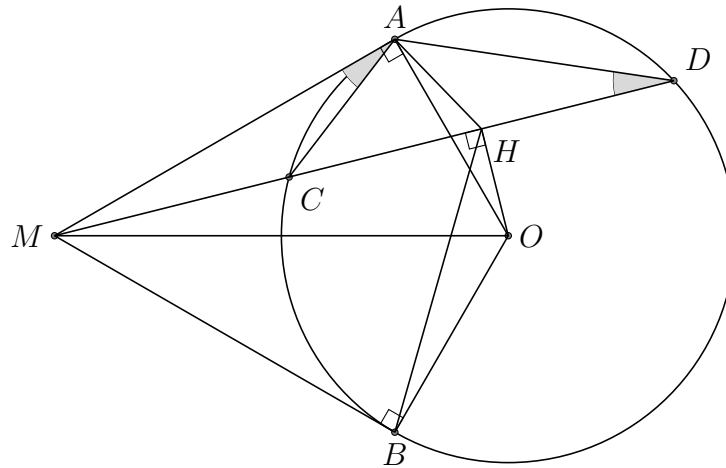
Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

- Chứng minh rằng tứ giác $MAOB$ nội tiếp trong một đường tròn.
- Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O , C nằm giữa M và D . Chứng minh rằng $MA^2 = MC \cdot MD$.
- Gọi H là trung điểm của dây CD . Chứng minh HM là tia phân giác của góc $\widehat{AHB}$.
- Cho $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính diện tích của hình giới hạn bởi hai tiếp tuyến MA, MB và cung nhỏ AB .

Lời giải.



- a) Tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến) nên $MAOB$ nội tiếp trong đường tròn đường kính OM .
- b) Xét hai tam giác MAC và MDA có $\widehat{AMC} = \widehat{DMA}$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) nên $\triangle MAC \sim \triangle MDA$ (g-g) $\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$. Vậy $MA^2 = MC \cdot MD$.
- c) Vì H là trung điểm của CD nên $OH \perp CD$ (quan hệ giữa đường kính và dây).
Suy ra $\widehat{MHO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$, do đó tứ giác $MHOB$ nội tiếp, suy ra $\widehat{MHB} = \widehat{MOB}$ (cùng chắn cung $\widehat{MB}$).

Chúng minh tương tự ta có tứ giác $MAHO$ nội tiếp, suy ra $\widehat{MHA} = \widehat{MOA}$. Mặt khác $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$ nên $\widehat{MHA} = \widehat{MHB}$.

Vậy HM là tia phân giác của góc $\widehat{AHB}$.

- d) Do $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên $\begin{cases} \widehat{AMO} = 30^\circ \\ \widehat{AOB} = 120^\circ. \end{cases}$ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MAO

và công thức tính diện tích hình quạt ta có

$$\begin{cases} OM = 2OA = 2R \\ S_{q.AOB} = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = R\sqrt{3} \\ S_{q.AOB} = \frac{\pi R^2}{3}. \end{cases}$$

Vậy diện tích cần tính là

$$S = S_{MAOB} - S_{q.AOB} = 2S_{MAO} - S_{q.AOB} = AM \cdot OA - \frac{\pi R^2}{3} = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

□

———— HẾT ————

4 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BÌNH DƯƠNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-2} \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$.

b) Giải phương trình: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

$$\sqrt{x-2} \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

So điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 2, x = 3$.

b) Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$

$$\text{So điều kiện ta nhận } t = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

□

Câu 2.

a) Tìm a và b biết hệ phương trình $\begin{cases} 2x + by = a \\ bx + ay = 5 \end{cases}$ có nghiệm $x = 1, y = 3$.

b) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = 2x^2$ trên hệ trục tọa độ.

Tìm giao điểm của $(P) : y = 2x^2$ và $d : y = -x + 3$ bằng phép tính.

Lời giải.

a) Do hệ phương trình có nghiệm là $x = 1, y = 3$ nên ta suy ra

$$\begin{cases} 2 + 3b = a \\ b + 3a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + 3b \\ b + 6 + 9b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - \frac{3}{10} = \frac{17}{10} \\ b = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

b) Ta có bảng giá trị:

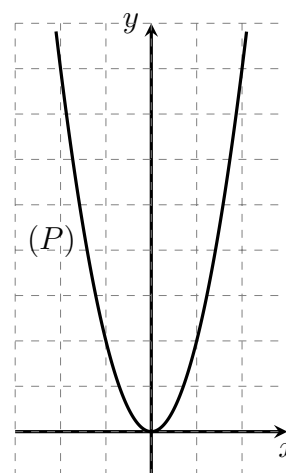
x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là:

$$2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của d và (P) là $(1; 2)$ và $(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2})$.

□



Câu 3. Một công ty vận tải du lịch dùng loại xe lớn để chở 20 tấn rau theo một hợp đồng. Nhưng khi vào việc, công ty không còn xe lớn nên phải thay bằng các xe có trọng tải nhỏ hơn 1 tấn. Để

đảm bảo thời gian đã hợp đồng, công ty phải dùng một số lượng xe nhiều hơn số xe dự định là 1 xe. Hỏi trọng tải của mỗi xe nhỏ là bao nhiêu tấn?

Lời giải.

Gọi x là trọng tải của mỗi xe nhỏ, khi đó trọng tải của xe lớn là $x + 1$.

Gọi y là số xe nhỏ cần sử dụng, khi đó số xe lớn cần sử dụng là $y - 1$.

$$\text{Từ giả thiết bài toán ta có } \begin{cases} xy = 20 & (1) \\ (x + 1)(y - 1) = 20 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), ta có } y = \frac{20}{x}, \text{ thế vào (2) ta được } (x + 1) \left(\frac{20}{x} - 1 \right) = 20 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -5 \end{cases}.$$

Vậy mỗi xe nhỏ có tải trọng là 4 tấn. □

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - (5m - 1)x + 6m^2 - 2m = 0$ với m là tham số.

- Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Lời giải.

- Ta có: $\Delta = (5m - 1)^2 - 4(6m^2 - 2m) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của m .
Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

- Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5m - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 6m^2 - 2m \end{cases}.$$

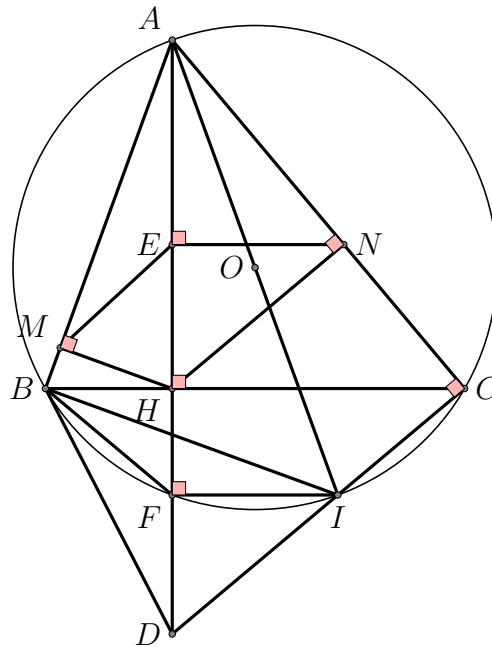
$$\begin{aligned} \text{Có } x_1^2 + x_2^2 = 1 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1 \Leftrightarrow (5m - 1)^2 - 2(6m^2 - 2m) = 1 \\ &\Leftrightarrow 13m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m(13m - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{6}{13} \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, $AB < AC$, nội tiếp trong đường tròn tâm O , kẻ đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC . Kẻ NE vuông góc với AH . Đường vuông góc với AC kẻ từ C cắt đường tròn tại I và cắt tia AH tại D . Tia AH cắt đường tròn tại F .

- Chứng minh: $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{BIC}$ và tứ giác $DENC$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Chứng minh: $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ và tứ giác $BFIC$ là hình thang cân.
- Chứng minh tứ giác $BMED$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Lời giải.



a) Ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC} + \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC} = \widehat{BIC}$.

Ta có $\widehat{DEN} = \widehat{NCD} = 90^\circ$ nên tứ giác $DENC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Do $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ đều là các tam giác vuông tại H nên ta có $AM \cdot AB = AH^2 = AN \cdot AC$.

Ta có $FI \parallel BC$ vì cùng vuông góc với AF , nên $BCFI$ là hình thang.

Ngoài ra ta có $\widehat{BAF} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{AIC} = \widehat{IAC} \Rightarrow \text{sđ}\widehat{BF} = \text{sđ}\widehat{CI} \Rightarrow BF = CI$.

Mặt khác, do $FI < BC$ nên tứ giác $BCIF$ là hình thang cân.

c) Ta có $\triangle AEN \sim \triangle ACD$ nên $\frac{AE}{AC} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow AN \cdot AC = AE \cdot AD \Rightarrow AE \cdot AD = AM \cdot AB$
 $\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \triangle AEM \sim \triangle ABD \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ADB}$ nên tứ giác $BMED$ nội tiếp.

□

———— HẾT ————

5 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BÌNH PHƯỚC

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1) Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = 2\sqrt{9} - \sqrt{16}. \quad B = 4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{75}.$$

2) Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}}{x-9}$, với $x \geq 0$; $x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của x để $P = 2$.

Lời giải.

1) $A = 2.3 - 4 = 2$.

$$B = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

2) a) $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 3\sqrt{x}}{x-9} = \frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{x-9} = \frac{x}{x-9}$

b) $P = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-9} = 2 \Leftrightarrow x = 2x - 18 \Leftrightarrow x = 18$ (nhận).

□

Câu 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 2$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Cho đường thẳng $d_1: y = ax - m + 1$ vuông góc với d . Tìm m để d_1 cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

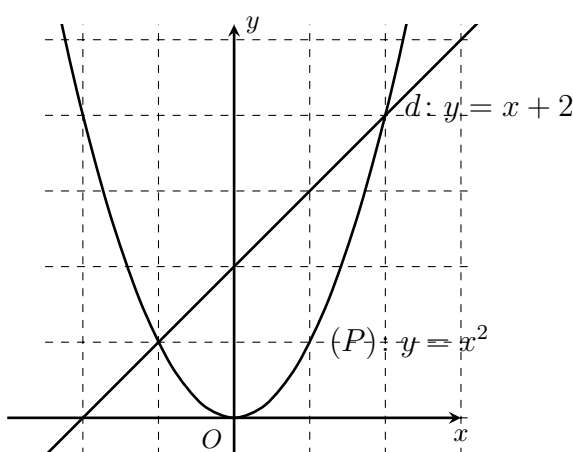
Lời giải.

a) Ta có bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

x	0	-2
$y = x + 2$	2	0

Đồ thị



b) Vì $d_1 \perp d \Rightarrow y = -x - m + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và $(P): x^2 + x + m - 1 = 0$ (*)

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

□

Câu 3. Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}.$$

Lời giải.

$$\begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2(4 - 2x) = 1 \\ y = 4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = -7 \\ y = 4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}. \quad \square$$

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - 2x + 2 - m = 0$ (1), m là tham số.

- Giải phương trình (1) khi $m = 1$.
- Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$2x_1^3 + (m + 2)x_2^2 = 5.$$

Lời giải.

- Với $m = 1$, ta có phương trình: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $\Delta' = m - 1$.

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_1^2 = 2x_1 + m - 2; \quad x_2^2 = 2x_2 + m - 2$$

$$\begin{aligned} \text{mà } x_1^3 &= x_1 \cdot x_1^2 = x_1(2x_1 + m - 2) = 2x_1^2 + x_1(m - 2) \\ &= 2(2x_1 + m - 2) + x_1(m - 2) = (m + 2)x_1 + 2m - 4. \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } 2x_1^3 + (m + 2)x_2^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2[(m + 2)x_1 + 2m - 4] + (m + 2)(2x_2 + m - 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow 2(m + 2)x_1 + 4m - 8 + 2(m + 2)x_2 + m^2 - 4 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2(m + 2)(x_1 + x_2) + m^2 + 4m - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (nhận)} \\ m = -9 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

□

Câu 5. Một công ty dự định dùng một số xe cùng loại để chở 180 tấn hàng (khối lượng hàng mỗi xe phải chở là như nhau). Sau đó đội xe được bổ sung thêm 6 xe nữa (cùng loại với xe dự định ban đầu). Vì vậy so với dự định ban đầu, mỗi xe phải chở ít hơn một tấn hàng hóa. Hỏi khối lượng hàng mỗi xe dự định phải chở ban đầu là bao nhiêu tấn?

Lời giải.

Gọi x (tấn) là khối lượng hàng dự định chở trên mỗi xe, ($x > 1$)

Khối lượng hàng thực tế trên mỗi xe phải chở là: $x - 1$ (tấn).

Số xe dự định để chở hàng là: $\frac{180}{x}$ (xe).

Số xe thực tế để chở hàng là: $\frac{180}{x - 1}$ (xe).

Vì bổ sung thêm 6 xe nên ta có phương trình: $\frac{180}{x - 1} - \frac{180}{x} = 6$.

Giải phương trình trên ta được: $x = 6$ (nhận); $x = -5$ (loại).

Vậy khối lượng hàng dự định chở trên mỗi xe là 6 tấn.

□

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có góc B bằng 30° và cạnh $BC = 8$ cm, M là trung điểm của cạnh BC . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC và tính diện tích tam giác MAB .

Lời giải.

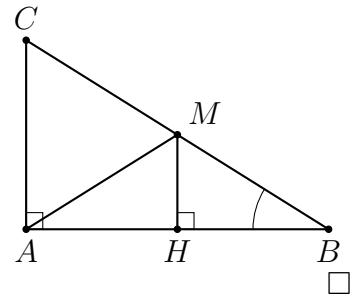
Ta có: $AC = \frac{1}{2}BC = 4$ cm.

$AB = BC \cdot \cos B = 4\sqrt{3}$ cm.

Kẻ $MH \perp AB$ tại H .

Ta có: $MH = \frac{1}{2}AC \Rightarrow S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}S_{\triangle CAB}$

$\Rightarrow S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = 4\sqrt{4}$ cm².

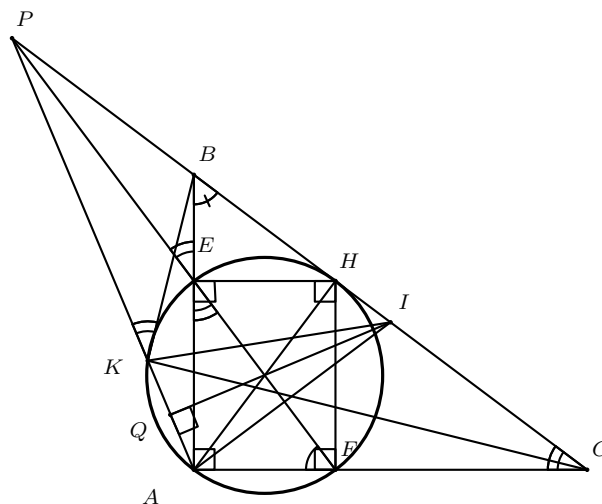


Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại E và kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại F .

- Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.
- Chứng minh tam giác AEF và ACB đồng dạng.
- Gọi I là trung điểm của đoạn BC , P là giao điểm của đường thẳng BC và EF , K là giao điểm thứ hai của AP với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$. Cho $BC = 2a$, $\widehat{KCA} = 15^\circ$. Tính diện tích tam giác IKA theo a .

Lời giải.

- Ta có: $\widehat{AEH} = 90^\circ$, $\widehat{AFH} = 90^\circ$.
 $\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $AEFH$ nội tiếp.
- Ta có: $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ$, $\widehat{BAH} + \widehat{AHE} = 90^\circ$.
 Mà $\widehat{EHA} = \widehat{EFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AE}$).
 $\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{AFE}$ hay $\widehat{ABC} = \widehat{AFE}$ (1)
 Lại có: $\widehat{BAC} = \widehat{FAE} = 90^\circ$ (2)
 Từ (1), (2) $\Rightarrow \triangle AEF$ và $\triangle ACB$ đồng dạng. (đpcm)



- Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{AFE}$ (cmt); $\widehat{AFE} = \widehat{PKE}$ (vì $AKEF$ nội tiếp)
 $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{PKE} \Rightarrow$ Tứ giác $BPKE$ nội tiếp.
 $\widehat{PKB} = \widehat{PEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{PB}$) (3)
 $\widehat{PEB} = \widehat{AEF} = \widehat{ACB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{PKB} = \widehat{ACB} \Rightarrow$ Tứ giác $AKBC$ nội tiếp đường tròn tâm I

$\Rightarrow IK = IA = a \Rightarrow \triangle IAK$ cân tại I .

Hạ $IQ \perp AK$ tại $Q \Rightarrow \widehat{QIA} = \widehat{KCA} = 15^\circ$

$$IQ = AI \cdot \cos \widehat{AIQ} = \frac{a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4};$$

$$AK = 2AQ = 2AI \cdot \sin \widehat{AIQ} = \frac{2a(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle AIK} = \frac{1}{2} \cdot IQ \cdot AK = \frac{a^2}{4} \text{ (đvdt)}.$$

□

———— HẾT ————

6 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BÌNH THUẬN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Giải phương trình và hệ phương trình sau

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

b)
$$\begin{cases} x + 7y = 2 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Lời giải.

a) $\Delta = 1$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2, x_2 = -3$.

b) Ta có hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} 3x = 6 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 0)$.

□

Câu 2.

a) Tính giá trị của biểu thức: $A = (\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, với $a > 0; b > 0$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$A = (\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} = (2\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b. \end{aligned}$$

□

Câu 3.

a) Cho hàm số $y = x^2$. Điền các giá trị y tương ứng vào bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$					

b) Tìm tham số m để đường thẳng $(d) : y = 2x - m$ cắt parabol $(P) : y = x^2$ tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

a) Ta có bảng giá trị như sau

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

- b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 2x - m \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0. (1)$$

$$\Delta' = 1 - m.$$

(P) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

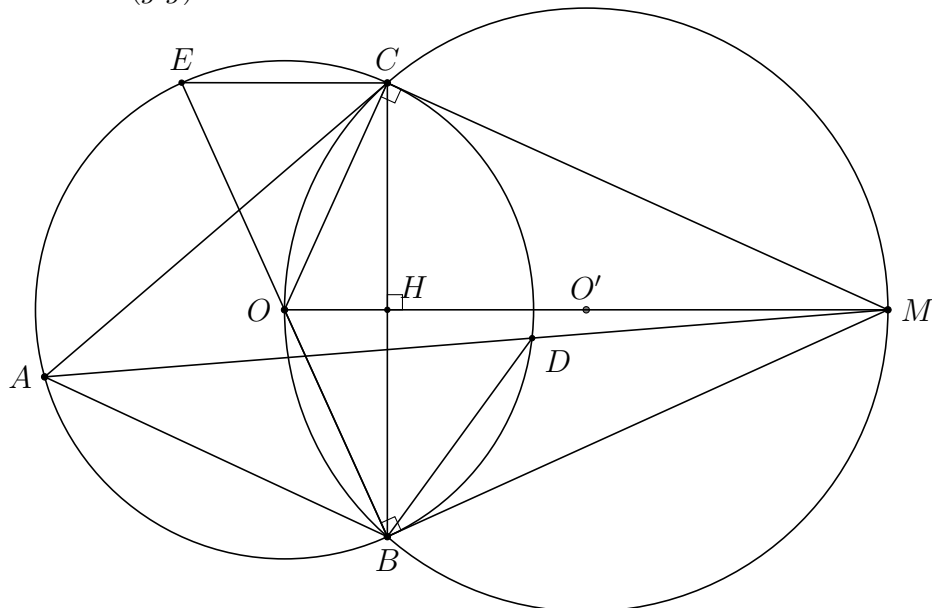
□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn O cắt nhau tại M .

- Chứng minh tứ giác $OBMC$ nội tiếp.
- Đường thẳng MA cắt đường tròn O tại điểm thứ hai là D .
Chứng minh $\triangle MAB \sim \triangle MBD$.
- Đường thẳng BO cắt đường tròn O tại E . Chứng minh: MO song song với EC .
- Giả sử $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính theo R thể tích của hình sinh ra khi quay $\triangle BMC$ một vòng quanh cạnh BC .

Lời giải.

- Xét tứ giác $OBMC$, ta có $\widehat{OBM} = 90^\circ$ (BM là tiếp tuyến).
 $\widehat{OCM} = 90^\circ$ (CM là tiếp tuyến).
 $\Rightarrow \widehat{OBM} + \widehat{OCM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $OBMC$ nội tiếp đường tròn đường kính OM .
- Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MBD$.
Ta có: $\widehat{BMA}$ chung.
 $\widehat{MAB} = \widehat{MBD} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BD}$ (nhỏ).
 $\Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MBD$ (g.g).



- Ta có $OB = OC = R$ và $MB = MC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).
 $\Rightarrow MO$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow MO \perp BC$ (1).

Ta có $\widehat{BCE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EC \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MO \parallel EC$.

- d) Khi $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì $\triangle BMC$ là tam giác đều (vì $MB = MC$ và $\widehat{MBC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$).

Gọi H là giao điểm của BC và OM .

Khi quay $\triangle BMC$ quanh cạnh BC thì hình sinh ra là hai hình nón bằng nhau có chung mặt đáy bán kính là HM , đường cao là BH .

Ta có OM là trung trực của $BC \Rightarrow OM \perp BC$ tại trung điểm H .

Lại có:

$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn 1 cung).

Mà $\widehat{BOM} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (OM là phân giác của $\widehat{BOC}$)

$\Rightarrow \widehat{BOM} = 60^\circ$.

Xét $\triangle OBH$, $BH = OB \cdot \sin \widehat{BOH} = OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Trong $\triangle BMH$ vuông tại H có:

$$MH = \frac{BH}{\tan \widehat{BMH}} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\tan 30^\circ} = \frac{3R}{2}.$$

Thể tích hai hình nón là:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi MH^2 \cdot BH = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{3R}{2} \right)^2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^3.$$

□

———— HẾT ————

7 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC CẦN THƠ

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.
- Giải các phương trình và hệ phương trình sau trên tập số thực:
 - $3x^2 - x - 10 = 0$.
 - $9x^4 - 16x^2 - 25 = 0$.
 - $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5. \end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có:

- $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$.
- $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$ (do $2 > \sqrt{3}$).

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4.$$

2.

(a) $3x^2 - x - 10 = 0$.

- $\Delta = (-1)^2 - 4.3.(-10) = 121$.

- Vậy: $\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{121}}{6} = -\frac{5}{3} \\ x = \frac{1 + \sqrt{121}}{6} = 2. \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 2, x = -\frac{5}{3}$.

(b) $9x^4 - 16x^2 - 25 = 0$.

- Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$).

- Phương trình đã cho trở thành: $9t^2 - 16t - 25 = 0$.

Do $a - b + c = 9 + 16 - 25 = 0$ nên $\begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{25}{9} \text{ (nhận)}. \end{cases}$

- Với $t = \frac{25}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$ hoặc $x = \frac{5}{3}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = -\frac{5}{3}, x = \frac{5}{3}$.

(c) Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 9x + 3y = 15 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 9x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 3.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nghiệm của hệ phương trình là: $(2; -1)$.

□

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = -\frac{1}{4}x^2$.

1. Vẽ đồ thị của (P) .

2. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) với đường thẳng $d : y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

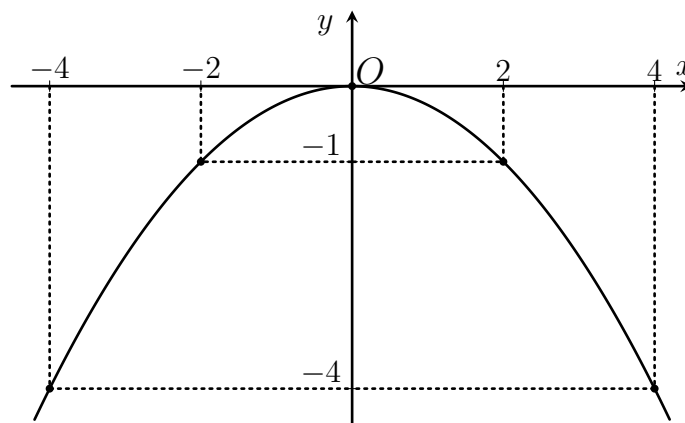
Lời giải.

1. $(P) : y = -\frac{1}{4}x^2$.

- Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4

- Đồ thị



2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là:

$$-\frac{1}{4}x^2 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 2. \end{cases}$$

- Với $x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{9}$. Ta được $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{9}\right)$.

- Với $x = 2 \Rightarrow y = -1$. Ta được $B(2; -1)$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và d là: $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{9}\right), B(2; -1)$.

□

Câu 3. Anh Bình đến siêu thị để mua một cái bàn ủi và một cái quạt điện với tổng số tiền theo giá niêm yết là 850 ngàn đồng. Tuy nhiên, thực tế khi trả tiền, nhờ siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của bàn ủi và quạt điện đã lần lượt giảm bớt 10% và 20% so với giá niêm yết. Do đó, anh Bình đã trả ít hơn 125 ngàn đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi giá tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết với giá bán thực tế của từng loại sản phẩm mà anh Bình đã mua là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi số tiền mua 1 cái bàn ủi với giá niêm yết là x (ngàn đồng) ($0 < x < 850$).

Gọi số tiền mua 1 cái quạt điện với giá niêm yết là y (ngàn đồng) ($0 < y < 850$).

Tổng số tiền mua 1 cái bàn ủi và 1 cái quạt điện theo giá niêm yết là 850 ngàn đồng nên ta có phương trình:

$$x + y = 850. \quad (1)$$

Số tiền thực tế để mua 1 cái bàn ủi là: $\frac{90}{100}x = \frac{9}{10}x$.

Số tiền thực tế để mua 1 cái quạt điện là: $\frac{80}{100}x = \frac{4}{5}y$.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{9}{10}x + \frac{4}{5}y = 850 - 125 \Leftrightarrow \frac{9}{10}x + \frac{4}{5}y = 725. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 850 \\ \frac{9}{10}x + \frac{4}{5}y = 725. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được: $x = 450, y = 400$.

Số tiền thực tế để mua 1 cái bàn ủi là: $\frac{9}{10} \cdot 450 = 405$ (ngàn đồng).

Số tiền thực tế để mua 1 cái quạt điện là: $\frac{4}{5} \cdot 400 = 320$ (ngàn đồng).

Vậy số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết với giá bán thực tế của 1 cái bàn ủi là:

$$450 - 405 = 45 \text{ (ngàn đồng).}$$

Vậy số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết với giá bán thực tế của 1 cái quạt điện là:

$$400 - 320 = 80 \text{ (ngàn đồng).}$$

□

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - (m + 3)x - 2m^2 + 3m + 2 = 0$ (m là tham số thực). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt sao cho hai nghiệm này lần lượt là giá trị độ dài của hai cạnh liên tiếp của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 - (m + 3)x - 2m^2 + 3m + 2 = 0$. (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \Delta &= (m + 3)^2 - 4(-2m^2 + 3m + 2) > 0 \\ \Leftrightarrow 9m^2 - 6m + 1 > 0 &\Leftrightarrow (3m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Với điều kiện trên, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 3 \\ x_1 x_2 = -2m^2 + 3m + 2 \end{cases} \quad (\text{Theo định lí Viét}).$$

Để hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh liên tiếp của hình chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{10}$, điều kiện cần là $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$, hay

$$(m + 3)^2 - 2(-2m^2 + 3m + 2) = 10 \Leftrightarrow 5m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

- Với $m = 1$, phương trình (1) có nghiệm $x_1 = 3, x_2 = 1$.
- Với $m = -1$, phương trình (1) có nghiệm $x_1 = 3, x_2 = -1$ (loại vì $x_2 < 0$ không phải là độ dài của một đoạn thẳng).

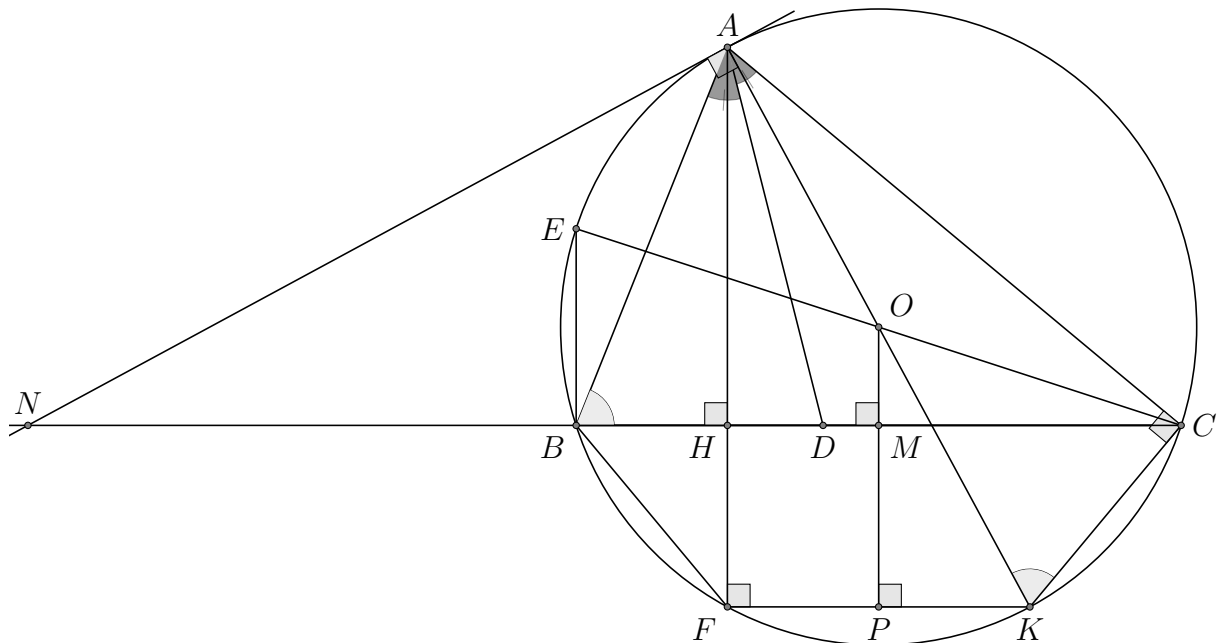
Vậy $m = 1$. □

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi H là chân đường cao dựng từ đỉnh A của tam giác ABC và M là trung điểm của cạnh BC . Tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ cắt đường thẳng BC tại N .

1. Chứng minh tứ giác $ANMO$ nội tiếp.
2. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO với đường tròn $(O; R)$. Chứng minh $AB.AC = AK.AH$.
3. Dựng đường phân giác AD của tam giác ABC (D thuộc cạnh BC). Chứng minh tam giác NAD cân.
4. Giả sử $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{OAH} = 30^\circ$. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH với đường tròn $(O; R)$. Tính theo R diện tích tứ giác $BCKF$.

Lời giải.

1. Vì AN là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{OAN} = 90^\circ$. Vì M là trung điểm dây BC của (O) nên $OM \perp BC \Rightarrow \widehat{OMN} = 90^\circ$. Ta có: $\widehat{OAN} + \widehat{OMN} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $ANMO$ nội tiếp.



2. Vì AK là đường kính của (O) , $C \in (O)$ nên $\widehat{ACK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{AHB} = 90^\circ$. (1)

Mặt khác, vì $ABKC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AKC} = \widehat{ABH} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$ (cung nhỏ) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\triangle AKC \sim \triangle ABH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow AK.AH = AB.AC$.

3. Ta có $\widehat{NAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ (cung nhỏ) nên

$$\widehat{NAD} = \widehat{NAB} + \widehat{BAD} = \widehat{ACB} + \widehat{BAD}. \quad (3)$$

Theo công thức góc ngoài ta có: $\widehat{NDA} = \widehat{ACB} + \widehat{DAC}$. (4)

Vì AD là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{NAD} = \widehat{DAN}$, do đó $\triangle AND$ cân tại N .

4. Ta có $AF \perp FK$ và $AF \perp BC$ nên $BC \parallel FK \Rightarrow BCKF$ là hình thang.

Gọi P là trung điểm của $FK \Rightarrow OP \perp FK \Rightarrow OP \perp BC \Rightarrow O, M, P$ thẳng hàng.

Gọi E là điểm đối xứng của C qua $O \Rightarrow \triangle EBC$ vuông tại B và $\widehat{BEC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$.

Xét $\triangle BEC$ có: $\begin{cases} EB = EC \cdot \cos 60^\circ = 2R \cdot \frac{1}{2} = R \\ BC = EC \cdot \sin 60^\circ = R\sqrt{3} \end{cases}$ và $OM = \frac{EB}{2} = \frac{R}{2}$.

Xét $\triangle AFK$ vuông tại F có: $\begin{cases} FK = AK \cdot \sin 30^\circ = R \\ AF = AK \cdot \cos 30^\circ = R\sqrt{3} \end{cases}$ và $OP = \frac{AF}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $MP = OP - OM = \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{2}$.

Vậy diện tích hình thang $BCKF$ là:

$$S_{BCKF} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot (BC + KF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{2} \cdot (R\sqrt{3} + R) = R^2 \cdot \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)}{4} = \frac{R^2}{2}.$$

□

———— HẾT ————

8 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC ĐIỆN BIÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Giải các phương trình sau đây:

a. $x^2 - 6x + 5 = 0$.

b. $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$.

Lời giải.

a. Ta có $\Delta' = 3^2 - 1.5 = 4 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2, x_2 = 3$.

b. Đặt $t = x^2$ điều kiện $t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành: $2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$.

Với $t = 2$ thì $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

□

2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ -3x + y = -5 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ -3x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ -9x + 3y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ -7x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

□

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để $A = 1$.

Lời giải.

a) Rút gọn biểu thức A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b) Tìm giá trị của x để $A = 1$.

$$\text{Khi } A = 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy với $x = 4$ thì $A = 1$.

□

Câu 3. (1,0 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B dài 30 km. Khi đi từ B về A người đó tăng vận tốc thêm 3km/h so với lúc đi nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp lúc đi từ A đến B.

Lời giải.

Gọi vận tốc người đi xe đạp từ A đến B là v km/h.

$$\text{Theo đề ta có: } \frac{30}{v} - \frac{30}{v+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{90}{v(v+3)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow v^2 + 3v - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 12 \\ v = -15 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của người đi xe đạp lúc đi từ A đến B là 12 km/h. $\square$

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 3m - 1 = 0$. (m là tham số) (1)

- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{26}$.

Lời giải.

- Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - (3m-1) = m^2 - m + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

- Áp dụng định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_2 = 3m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán: } x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{26})^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 26 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(3m-1) = 26$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$\square$

Câu 5. Cho đường tròn (O, R) và một đường thẳng d cố định, không cắt đường tròn (O, R) , M là một điểm bất kỳ trên đường thẳng d . Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O, R) , trong đó A, B là tiếp điểm.

- Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.
- Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh rằng tích $OM.OI$ là một số không đổi và không phụ thuộc vào vị trí điểm M .
- Khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d , chứng minh rằng điểm I nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải.

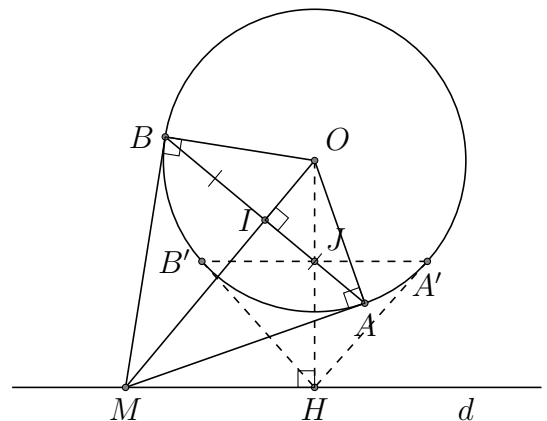
1. Ta có MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn nên

$$\begin{cases} MA \perp OA \\ MB \perp OB \end{cases} \Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ.$$

Do đó, tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.

2. Xét hai tam giác MAO và AIO có $\widehat{I} = \widehat{A} = 90^\circ$ và $\widehat{O}$ chung. Suy ra $\triangle MAO \sim \triangle AIO$.

$$\text{Do đó: } \frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OI} \Rightarrow OM.OI = OA^2 = R^2 \text{ (đpcm).}$$



3. Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng d . Từ H kẻ hai tiếp tuyến HA' và HB' , gọi J là trung điểm của đoạn thẳng $A'B'$, suy ra O, J, H thẳng hàng.

Tương tự trên ta cũng có ngay $OJ.OH = R^2$.

$$\text{Do đó } OJ.OH = OI.OM, \text{ suy ra } \triangle OIJ \sim \triangle OHM. \text{ Nên } \widehat{I} = \widehat{H} = 90^\circ. \quad (*)$$

Mặt khác, O, d cố định suy ra H, A', B', J cố định. Từ (*) suy ra I luôn nhìn đoạn OJ dưới một góc vuông. Suy ra I luôn nằm trên đường tròn đường kính OJ . $\square$

Câu 6. (1,0 điểm)

- a) Cho x, y thỏa mãn hệ thức: $x^2 + 2y^2 + 2018(x + y) + 2xy + 4032 = 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + y + 1$.
- b) Cho n là số nguyên dương, sao cho $2n + 1, 3n + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 40.

Lời giải.

- a) Ta có

Cách 1:

$$(x + y)^2 + y^2 + 2018(x + y) + 4032 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 2018(x + y) + 4032 = -y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2016 \leq x + y \leq -2 \Leftrightarrow -2015 \leq x + y + 1 \leq -1 \Leftrightarrow -2015 \leq A \leq -1.$$

Vậy $\min A = -2015$, khi $x = -2016; y = 0$.

$\max A = -1$, khi $x = -2; y = 0$.

Cách 2:

$$(x + y)^2 + y^2 + 2018(x + y) + 4032 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 2018(x + y) + 4032 = -y^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1009)^2 = -y^2 + 1014049 \Leftrightarrow (x + y + 1009)^2 \leq 1014049 \Leftrightarrow |x + y + 1009| \leq 1007$$

$$\Leftrightarrow -1007 \leq x + y + 1009 \leq 1007 \Leftrightarrow -2015 \leq x + y + 1 \leq -1 \Leftrightarrow -2015 \leq A \leq -1.$$

Vậy $\min A = -2015$, khi $x = -2016; y = 0$.

$\max A = -1$, khi $x = -2; y = 0$.

- b) $n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử có $a, b \in \mathbb{N}^*$ để:

$$2n + 1 = a^2. \quad (1)$$

$$3n + 1 = b^2. \quad (2)$$

Từ (1), suy ra a lẻ, đặt $a = 2k + 1$, ta được $2n + 1 = (2k + 1)^2 \Leftrightarrow n = 2k(k + 1)$. Do đó n là số chẵn và chia hết cho 4.

n chẵn, suy ra $3n + 1$ lẻ, đặt $b = 2p + 1$, ta được $3n + 1 = (2p + 1)^2$.

Lấy (1)+(2) ta có $5n + 2 = 4k(k + 1) + 1 + 4p(p + 1) + 1 \Leftrightarrow 5n = 4k(k + 1) + 4p(p + 1)$.

Suy ra $5n$ chia hết cho 8, nên n chia hết cho 8. (3)

Cần chứng minh n chia hết cho 5. Chú ý rằng các số chính phương chỉ có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Xét các trường hợp:

TH 1: $n = 5q + 1$, suy ra $a^2 = 2(5q + 1) + 1 = 10q + 3$ có chữ số tận cùng bằng 3, suy ra vô lý.

TH 2: $n = 5q + 2$, suy ra $b^2 = 3(5q + 2) + 1 = 15q + 7$ có chữ số tận cùng bằng 7 (vì n chẵn nên q chẵn), suy ra vô lý.

TH 3: $n = 5q + 3$, suy ra $a^2 = 2(5q + 3) + 1 = 10q + 7$ có chữ số tận cùng bằng 7, suy ra vô lý.

TH 4: $n = 5q + 4$, suy ra $b^2 = 3(5q + 4) + 1 = 15q + 13$ có chữ số tận cùng bằng 3, suy ra vô lý.

suy ra n chia hết cho 5. (4)

Từ (3) và (4), suy ra n chia hết cho 40.

□

———— HẾT ————

9 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC ĐỒNG NAI

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải phương trình: $9x^2 - 12x + 4 = 0$.
 b) Giải phương trình: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
 c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 2y = 8. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Giải phương trình: $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Ta có $\Delta' = 6^2 - 4.9 = 0$. Do đó phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$.

- b) Giải phương trình: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Ta được phương trình bậc hai ẩn t :

$$t^2 - 10t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = 9 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = 9$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{\pm 1; \pm 3\}$.

- c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 2y = 8. \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 9x = 18 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

□

Câu 2. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và $y = x - \frac{1}{2}$.

- a) Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
 b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị đó.

Lời giải.

- a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và $y = x - \frac{1}{2}$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

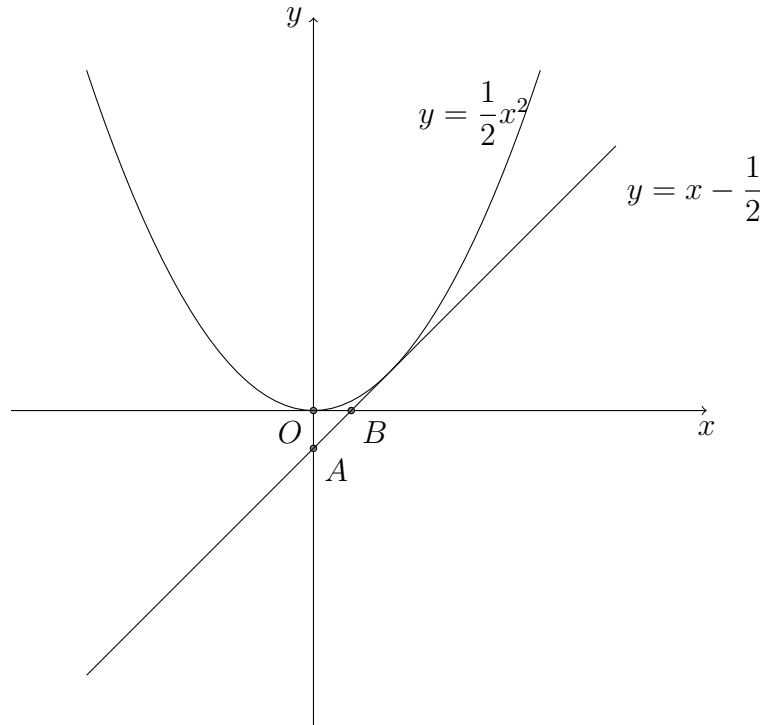
* Hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$. Ta có bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, nhận trục tung làm trục đối xứng.

* Hàm số $y = x - \frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số $y = x - \frac{1}{2}$ đi qua hai điểm $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

* Vẽ đồ thị:



b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị.

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 = x - \frac{1}{2} \\ y = x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ với x là ẩn số, m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tính $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ theo m .

Lời giải.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

Ta có $\Delta' = (-m)^2 - (2m - 1) = (m - 1)^2 \geq 0 \forall m$.

Do vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

b) Tính $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ theo m .

Theo chứng minh trên, phương trình luôn có nghiệm với mọi m . Áp dụng định lý Vi-ét, ta được: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1 x_2 = 2m - 1$. Do vậy,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} \\
&= \frac{(2m)^2 - 2(2m - 1)}{2m - 1} \quad (\text{ĐK: } m \neq \frac{1}{2}) \\
&= \frac{4m^2 - 4m + 2}{2m - 1}.
\end{aligned}$$

□

Câu 4. Cho biểu thức: $A = \left(5 - \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right) \cdot \left(5 + \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ với $x \geq 0, y \geq 0$ và $x \neq y$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1 - \sqrt{3}, y = 1 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

a) Rút gọn biểu thức A .

$$\begin{aligned}
A &= \left(5 - \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right) \cdot \left(5 + \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \\
&= \left(5 - \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right) \cdot \left(5 + \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \\
&= (5 - \sqrt{xy})(5 + \sqrt{xy}) \\
&= 25 - xy.
\end{aligned}$$

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1 - \sqrt{3}, y = 1 + \sqrt{3}$.

Vì $1 - \sqrt{3} < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $x \geq 0$ nên không tồn tại giá trị của A khi $x = 1 - \sqrt{3}, y = 1 + \sqrt{3}$.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi d là đường thẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC tại K . Đường thẳng d cắt tiếp tuyến đi qua A của đường tròn (O) tại điểm M và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N (N khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên BC .

a) Chứng minh tứ giác $CNKH$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Tính số đo góc $\widehat{KHC}$, biết số đo cung nhỏ BC bằng 120° .

c) Chứng minh rằng $KN \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot (AM^2 - AN^2 - MN^2)$.

Lời giải.

10 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC GIA LAI

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{(x+1)(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - x - \sqrt{x}$, với $x > 0$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức P bằng 2.

Lời giải.

- Với $x > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{(x+1)\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} - x - \sqrt{x} \\ &= (x+1)(\sqrt{x}+1) - x - \sqrt{x} \\ &= x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1 - x - \sqrt{x} \\ &= x\sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

- Với $x > 0$, theo câu 1), ta $P = 2$ khi:

$$x\sqrt{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $P = 2$ khi $x = 1$.

□

Câu 2. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là Parabol (P) và đường thẳng d có phương trình $y = 5x - 2m^2$, với m là tham số.

- Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và Parabol (P) khi $m = 1$.
- Tìm các giá trị của m để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

- Khi $m = 1$, phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và Parabol (P) là

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}.$$

Với $x = 2$ suy ra $y = 8$ và với $x = \frac{1}{2}$ suy ra $y = \frac{1}{2}$. Vậy đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm $A(2; 8)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và Parabol (P) là

$$2x^2 - 5x + 2m^2 = 0. \quad (*)$$

Để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, hay $\Delta = 25 - 16m^2 > 0$, tức là:

$$m^2 < \frac{25}{16} \Leftrightarrow |m| < \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < m < \frac{5}{4}.$$

$$\text{Vậy } -\frac{5}{4} < m < \frac{5}{4}.$$



Câu 3.

- a) Giáo viên bộ môn toán lớp 10A muốn chia học sinh của lớp thành các nhóm học tập. Nếu mỗi nhóm có 5 học sinh thì thừa 4 học sinh, nếu mỗi nhóm có 6 học sinh thì thiếu 2 học sinh. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh (giả thiết rằng số học sinh trong lớp 10A không vượt quá 60 em).
- b) Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2$. Chứng minh rằng biệt thức Δ của phương trình đã cho không phụ thuộc vào các hệ số a, b, c .

Lời giải.

- a) Nếu mỗi nhóm có 5 học sinh thì thừa 4 học sinh, nếu mỗi nhóm có 6 học sinh thì thiếu 2 học sinh, do đó ta có phương trình:

$$5x + 4 = 6y - 2 \Leftrightarrow 5x = 6y - 6 \Leftrightarrow x = \frac{6y - 6}{5} \quad (x, y \in \mathbb{N}^*).$$

Khi $y = 1$ thì $x = 0$, loại.

Khi $y = 2, y = 3, y = 4, y = 5$ thì x không nguyên nên loại.

Khi $y = 6$ thì $x = 6$, suy ra số học sinh của lớp là 34 (thỏa mãn).

Khi $y = 7, y = 8, y = 9, y = 10$ thì x không nguyên nên loại.

Khi $y \geq 11$ thì số học sinh vượt quá 60 nên loại.

Vậy số học sinh của lớp 10A là 34.

- b) Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

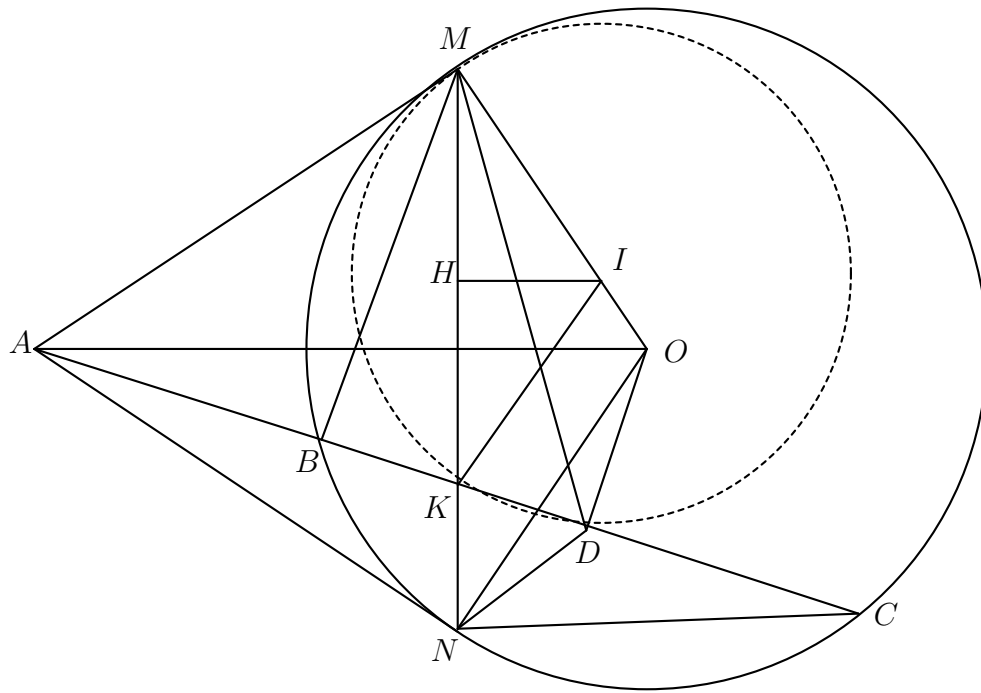
Suy ra phương trình đã cho có nghiệm kép. Do đó $\Delta = 0$.



Câu 4. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm); B là điểm thay đổi trên cung nhỏ MN (B khác M và N ; tia AB không đi qua O). Gọi C là giao điểm thứ hai của tia AB với (O) (C khác B), D là trung điểm của BC , K là giao điểm của BC và MN .

- a) Chứng minh tứ giác $AMDN$ nội tiếp một đường tròn.
- b) Chứng minh $KA \cdot KD = KB \cdot KC$.
- c) Khi điểm B di động trên cung nhỏ MN . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MKD luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Lời giải.



- a) Ta có D là trung điểm của dây BC không đi qua O nên $\widehat{ADO} = 90^\circ$. Do AM, AN là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{AMO} = 90^\circ$ và $\widehat{ANO} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = \widehat{ADO} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $AMDN$ nội tiếp đường tròn đường kính AO .
- b) Xét $\triangle KBM$ và $\triangle KNC$ có: $\widehat{BMK} = \widehat{CKN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BN}$ của (O)), $\widehat{BKM} = \widehat{NKC}$ (đối đỉnh) Do đó $\triangle KBM \sim \triangle KNC$ (g.g). Suy ra

$$\frac{KM}{KC} = \frac{KB}{KN} \Rightarrow KB.KC = KM.KN. \quad (1)$$

Xét $\triangle KND$ và $\triangle KAM$ có: $\widehat{KND} = \widehat{KAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{MD}$ của đường tròn đường kính AO), $\widehat{AKM} = \widehat{NKD}$ (đối đỉnh). Do đó $\triangle KND \sim \triangle KAM$ (g.g). Suy ra $\frac{KN}{KA} = \frac{KD}{KM} \Rightarrow KA.KD = KM.KN$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KA.KD = KB.KC$.

- c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDK , vẽ $IH \perp MK$ ($H \in MK$). Tam giác IMK cân tại I (vì $IM = IK$) suy ra IH là phân giác của góc $\widehat{MIK}$. Suy ra $\widehat{MIH} = \frac{1}{2}\widehat{MIK}$. Mà $\widehat{MDK} = \frac{1}{2}\widehat{MIK}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\widehat{MK}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDK) nên $\widehat{MIH} = \widehat{MDK}$. Tam giác MHI vuông tại H nên: $\widehat{MIH} + \widehat{HMI} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{MDK} + \widehat{HMI} = 90^\circ$ hay $\widehat{MDK} + \widehat{KMI} = 90^\circ$. (3)
- Mặt khác: $\widehat{MDA} = \widehat{ANM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{MA}$ của đường tròn đường kính AO), $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ (do AM, AN là hai tiếp tuyến của (O)). Suy ra $\widehat{MDA} = \widehat{AMN}$ hay $\widehat{MDK} = \widehat{AMK}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{AMK} + \widehat{KMI} = 90^\circ$. Suy ra AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDK . Do A và (O) cố định nên đường thẳng AM cố định. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+4) + \sqrt{x+2} + 3 = 4y(y-1) + \sqrt{2y-1} \\ y^2 = x+6. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2, y \geq \frac{1}{2}$. Ta có:

$$\begin{aligned} x(x+4) + \sqrt{x+2} + 3 &= 4y(y-1) + \sqrt{2y-1} \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 + \sqrt{x+2} &= (2y-1)^2 + \sqrt{2y-1} \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 - (2y-1)^2 + \sqrt{x+2} - \sqrt{2y-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2y+3) \left((x+2) + (2y-1) + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2y-1}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Vì $x+2 \geq 0, 2y-1 \geq 0$ nên

$$(x+2) + (2y-1) + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2y-1}} > 0.$$

Suy ra $x = 2y - 3$. Do đó $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ y^2 = x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1; x = -5 \\ y = 3; x = 3. \end{cases}$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là $(-1; -5), (3; 3)$. □

————— **HẾT** —————

11 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HẢI DƯƠNG

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Giải phương trình và hệ phương trình sau.

a) $(x + 3)^2 = 16$.

b) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{3} - 1 \end{cases}$

Lời giải.

a) $(x + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 4 \\ x + 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -7 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$.

□

Câu 2.

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Tìm m để phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 = 1$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{x} + x - (\sqrt{x} + x + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + x + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + x + 1}{x + \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

b) Phương trình $x^2 - 5x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = 37 - 4m >$

$0 \Leftrightarrow m < \frac{37}{4}$. Áp dụng định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases}$. Thay $x_1 = 5 - x_2$ vào giả thiết

ta được $3x_2^2 - 17x_2 + 24 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3$ hoặc $x_2 = \frac{8}{3}$.

+ Với $x_2 = 3, x_1 = 2$ ta có $m = 9$;

+ Với $x_2 = \frac{8}{3}, x_1 = \frac{7}{3}$ ta có $m = \frac{83}{9}$

□

Câu 3.

a) Tìm a và b biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(-1; 5)$ và song song với đường thẳng $y = 3x + 1$.

b) Một đội xe phải chuyên chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc, đội xe đó được bổ sung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định. Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu xe? Biết rằng số hàng chở trên tất cả các xe có khối lượng bằng nhau.

Lời giải.

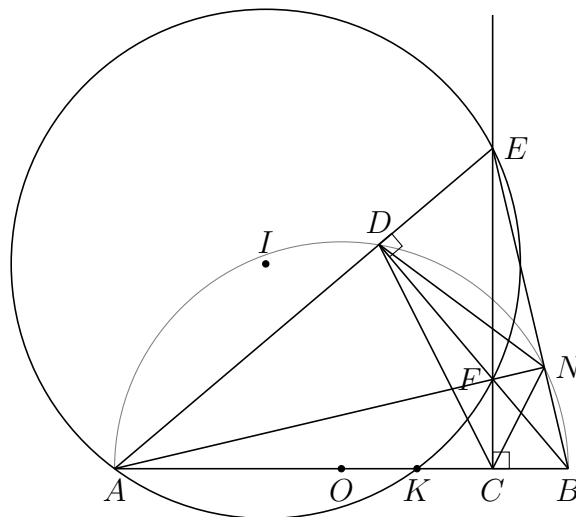
- a) Từ giả thiết ta có $a = 3, b = 8$. Vậy hàm số cần tìm là $y = 3x + 8$.
- b) Gọi x là số xe ban đầu ($x > 0$). Theo bài ra ta có phương trình $\frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = 1 \Leftrightarrow x = 9$.
 Vậy ban đầu có 9 xe.

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Dựng đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C , cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M . Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F , tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E . Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

- a) Chứng minh: $AD \cdot AE = AC \cdot AB$.
- b) Chứng minh ba điểm B, F, D thẳng hàng và F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDN .
- c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N di chuyển trên cung nhỏ MB .

Lời giải.



- a) Theo giả thiết, $\angle BDE = \angle ECB = 90^\circ$ nên tứ giác $BCDE$ nội tiếp đường tròn đường kính BE . Do đó, $AD \cdot AE = AC \cdot AB$.
- b) Xét tam giác ABE . Ta có: EC và AN là hai đường cao và cắt nhau tại F nên F là trực tâm của tam giác ABE . Mặt khác, $BD \perp AE$ nên BD đi qua F hay B, F, D thẳng hàng. Xét tam giác CDN . Ta có: $\angle CDF = \angle CAF = \angle BAN = \angle BDN$ (tứ giác $ADFC$ và $ADNB$ nội tiếp). Suy ra DF là phân giác của góc CDN . Tương tự, ta cũng có NF là phân giác góc CND hay F chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDN .
- c) Gọi K là giao điểm của (I) và AB . Ta có tứ giác $AKFE$ nội tiếp nên $CK \cdot CA = CF \cdot CE$. Ngoài ra, tam giác AFC đồng dạng với tam giác EBC nên $CF \cdot CE = BC \cdot AC$. Từ đó suy ra $BC = CK$ hay C là trung điểm của BK do đó K cố định. Hơn nữa, $IA = IK$ nên I nằm trên đường trung trực của AK (cố định).

□

Câu 5. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca}.$$

Lời giải.

Áp dụng AM-GM ta có: $a^5 + a^5 + a^5 + b^5 + b^5 \geq 5a^3b^2$.

Do đó, $5(a^5 + b^5) \geq 5(a^3b^2 + a^2b^3) \Rightarrow a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a + b)$.

Từ đó ta có: $\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{1}{ab(a + b) + 1} = \frac{c}{a + b + c}$. Vì vậy,

$$P \leq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

□

———— **HẾT** ————

12 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HẢI PHÒNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

I. Phần 1. Trắc nghiệm

Hãy chọn chỉ một chữ cái đứng trước câu trả lời đúng.

Câu 1. Biểu thức $\sqrt{\frac{x}{2016}}$ xác định khi và chỉ khi

A $x \geq 0$.

B $x < 0$.

C $x > 0$.

D $x = 0$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = 2x - 5$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A $(1; -3)$.

B $(-1; -3)$.

C $(2; -1)$.

D $(-2; -9)$.

Câu 3. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - ay = 3 \end{cases}$ vô nghiệm khi a bằng bao nhiêu?

A $a = 4$.

B $a = -6$.

C $a = 6$.

D $a = -4$.

Câu 4. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 10 = 0$. khi đó x_1x_2 bằng

A $\frac{3}{2}$.

B $-\frac{3}{2}$.

C -5 .

D 5 .

Câu 5.

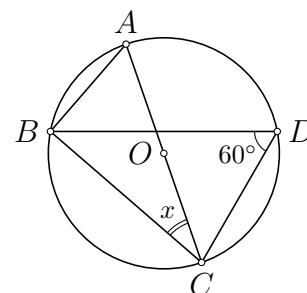
Trong hình vẽ bên: Biết AC là đường kính của đường tròn tâm O , $\widehat{BDC} = 60^\circ$ và $\widehat{ACB} = x$. Khi đó x bằng

A 40° .

B 45° .

C 35° .

D 30° .



Câu 6. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại M . Nếu $MA = R\sqrt{3}$ thì số đo góc ở tâm $\widehat{AOB}$ bằng

A 120° .

B 90° .

C 60° .

D 45° .

Câu 7. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ có bán kính lần lượt là $R = 5$ cm, $r = 3$ cm và khoảng cách giữa hai tâm là 7 cm. Khi đó

A (O) và (O') tiếp xúc ngoài.

B (O) và (O') tiếp xúc trong.

C (O) và (O') không giao nhau.

D (O) và (O') cắt nhau.

Câu 8. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 4 cm, chiều cao bằng 5 cm. Thể tích hình trụ đó bằng

A $100\pi \text{ cm}^3$.

B $80\pi \text{ cm}^3$.

C $60\pi \text{ cm}^3$.

D 80 cm^3 .

II. Phần 2. Tự luận

Câu 1.

1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3};$

b) $B = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54}.$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}.$

3. Xác định hệ số a và b của đường thẳng $(d) : y = ax + b$, biết đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d') : y = x + 2017$ và đi qua điểm $A(-1; 2015)$.

Lời giải.

1.

a) $A = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12} : \sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 8\sqrt{3}) : \sqrt{3} = -5.$

b) $B = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{(\sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{6} = 5\sqrt{6}.$

2. Cách 1: Phương pháp thế

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 2(2x - 3) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Cách 2: Phương pháp cộng đại số

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

□

Câu 2.

1. Cho phương trình $x^2 - mx - 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1(x_2^2 + 1) + x_2(x_1^2 + 1) > 6.$$

2. Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 20 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 4 cm. Tính độ dài mỗi cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Lời giải.

1.

a) Khi $m = 3$ phương trình trở thành $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$$\text{Phương trình có } \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = 4$.

b) Phương trình đã cho có $\Delta = m^2 + 16 > 0$. Do đó phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và

$$x_2. \text{ Theo định lí Viète, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}. \text{ Suy ra}$$

$$x_1(x_2^2 + 1) + x_2(x_1^2 + 1) > 6$$

$$\Leftrightarrow (x_1 x_2 + 1)(x_1 + x_2) > 6$$

$$\Leftrightarrow -3m > 6$$

$$\Leftrightarrow m < -2.$$

Vậy $m < -2$.

2. Giả sử độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đó là x, y ($x > y$). Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 400 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y + 4)^2 + y^2 = 400 \\ x = y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 12 \end{cases}.$$

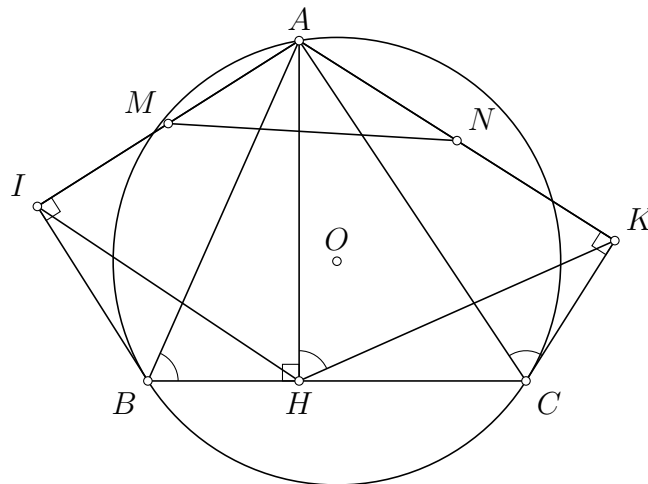
Vậy độ dài hai cạnh góc vuông cần tìm là 16 cm và 12 cm.

□

Câu 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , kẻ AH vuông góc với BC tại H . Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) .

- Chứng minh tứ giác $AHCK$ nội tiếp đường tròn;
- Chứng minh $\widehat{AHK} = \widehat{ABC}$ và $AH^2 = AI \cdot AK$;
- Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AI và AK . Chứng minh rằng nếu $AH = AM + AN$ thì ba điểm A, O, H thẳng hàng.

Lời giải.



- Vì $\widehat{AHC} = \widehat{AKC} = 90^\circ$ nên tứ giác $AHCK$ nội tiếp đường tròn đường kính AC .
- Do tứ giác $AHCK$ nội tiếp nên $\widehat{AHK} = \widehat{ACK}$. Do tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung nên $\widehat{ACK} = \widehat{ABC}$. Vậy $\widehat{AHK} = \widehat{ABC}$.
Ta có $\widehat{AKH} = \widehat{ACB}$. Tương tự ý a), ta có tứ giác $AHBI$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AIH} = \widehat{ABC}$. Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\widehat{AHI} = \widehat{ACB}$. Từ đó suy ra $\triangle AIH \sim \triangle AHK$ (g.g). Do đó $\frac{AI}{AH} = \frac{AH}{AK}$ hay $AH^2 = AI \cdot AK$.
- Ta có $AH = AM + AN = \frac{AI + AK}{2}$. Kết hợp với ý b) ta có $\frac{(AI + AK)^2}{4} = AI \cdot AK$ hay $AI = AK$. Suy ra $AH = AI = AK$. Mặt khác theo ý b) ta có $\widehat{IAH} = \widehat{KAH}$ nên $\triangle AIH = \triangle AKH$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AHK} = \widehat{AHI} = \widehat{ACB}$ hay tam giác ABC cân tại A . Do đó A, O, H thẳng hàng.

□

Câu 4.

- Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh rằng $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$;

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{9}{2(ab + bc + ca)} + \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$$\begin{aligned} a + b + c &\geq 3\sqrt[3]{abc}, \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}. \end{aligned}$$

Nhân hai bất đẳng thức trên vế với vế, ta được điều phải chứng minh.

b) Đặt $x = ab + bc + ca$ và $y = a^2 + b^2 + c^2$. Ta có $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 0 < x \leq y \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{aligned} P &= \frac{9}{2x} + \frac{2}{y} = \frac{13}{3x} + \frac{1}{6x} + \frac{2}{y} \\ &\geq \frac{13}{3x} + \frac{1}{6y} + \frac{2}{y} = \frac{13}{3x} + \frac{13}{6y} \\ &= \frac{13}{6} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{13}{6} (x + x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \\ &\geq \frac{13}{6} \cdot 9 = \frac{39}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{39}{2}$.

□

———— HẾT ————

13 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ NAM

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{32} - \sqrt{72} + 2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.
- b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x - 4}$ với $0 < x \neq 4$; Rút gọn biểu thức B và tìm x để $B = 12$.

Lời giải.

- a) $A = \sqrt{32} - \sqrt{72} + 2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2(\sqrt{2} - 1) = -2$.
- b) Với $0 < x \neq 4$ ta có:
- $$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x - 4} = \frac{\sqrt{x} + 2 - (\sqrt{x} - 2)}{x - 4} \cdot \frac{x - 4}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}.$$
- $$B = 12 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}. \text{ (thỏa mãn điều kiện } 0 < x \neq 4 \text{).}$$

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$.

Lời giải.

- a) Ta có $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = 2$.

- b) Ta có $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 2(y + 1) + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 5y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$.

□

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = 2x^2$.

- a) Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng $(d) : y = 3x + 2$ và parabol (P) .
- b) Chứng minh rằng đường thẳng $(d_m) : y = mx + 1$ luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 . Tìm m để $4(x_1^2 + x_2^2) + (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 9$.

Lời giải.

- a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$2x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Ta có $\Delta = 25 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 8$; với $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(2; 8), B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_m) và (P) :

$$2x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - mx - 1 = 0$$

Ta có $\Delta = m^2 + 8 > 0 \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt với mọi m . Do đó (d_m) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ta có

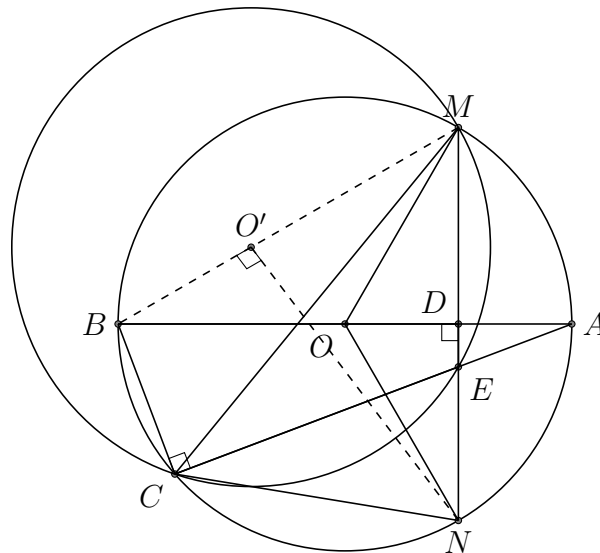
$$\begin{aligned} 4(x_1^2 + x_2^2) + (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) &= 9 \Leftrightarrow 4[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{m}{2} - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $(d_m) : y = mx + 1$ luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và các hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $4(x_1^2 + x_2^2) + (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}.$ □

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định, điểm D cố định thuộc đoạn AO (D không trùng với A, O). Kẻ dây MN vuông góc với AB tại D . Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B . Gọi E là giao điểm của AC với MN .

- Chứng minh tứ giác $DECB$ nội tiếp.
- Chứng minh CA là tia phân giác của $\widehat{MCN}$.
- Chứng minh $AB^2 = AE \cdot AC + BD \cdot AB$.
- Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Lời giải.



- a) Nội CB , ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O).
Mặt khác theo giả thiết ta có $\widehat{EDB} = 90^\circ$.
Từ đó suy ra $\widehat{ACB} + \widehat{EDB} = 180^\circ$, do đó tứ giác $DECB$ nội tiếp.
- b) Nội CM, CN, OM, ON ta có $OM = ON$ nên $\triangle OMN$ cân tại O , lại do $OD \perp MN$ nên OD là phân giác của góc $\widehat{MON}$.
Từ đó suy ra $\widehat{AM} = \widehat{AN}$, do đó ta có $\widehat{MCA} = \widehat{NCA}$ nên CA là tia phân giác của $\widehat{MCN}$.
- c) Dễ thấy $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, từ đó suy ra $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Leftrightarrow AE.AC = AD.AB$.
Vậy $AE.AC + BD.AB = AD.AB + BD.AB = AB(AD + BD) = AB^2$.
- d) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME . Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{MCA}$, từ đó suy ra AM là tiếp tuyến của (O') tại điểm M .
Mặt khác $BM \perp AM \Rightarrow O'$ chạy trên đường thẳng MB . Vậy khoảng cách từ N đến O' nhỏ nhất khi O' là hình chiếu của N lên MB .
Từ đó ta có cách xác định điểm C như sau:
- Xác định điểm O' là hình chiếu vuông góc của điểm N trên MB .
 - Vẽ đường tròn tâm O' , bán kính $O'M$.
 - Đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai khác điểm M chính là điểm C cần xác định.

☐

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$$

Lời giải.

Ta có $3a + bc = (a + b + c)a + bc = a^2 + ab + ac + bc = (a + b)(a + c)$.

Tương tự ta có
$$\begin{cases} 3b + ca = (b + c)(b + a) \\ 3c + ab = (c + a)(c + b) \end{cases}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $\frac{1}{a+b}$ và $\frac{1}{a+c}$ ta có $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq 2 \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$.

Từ đó suy ra $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq \frac{2}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}} \Leftrightarrow \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right).$

Tương tự ta có
$$\begin{cases} \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a} \right) \\ \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right) \end{cases}.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta suy ra:

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) + \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a} \right) + \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right) \\ &\leq \frac{c}{2(a+b)}(a+b) + \frac{b}{2(a+c)}(a+c) + \frac{a}{2(c+b)}(c+b) \\ &\leq \frac{a+b+c}{2} \\ &\leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy $\max P = \frac{3}{2}$, đạt được khi $a = b = c = 1$. □

————— HẾT —————

14 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ NỘI

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.
- Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Lời giải.

- Với $x = 25$ (thỏa mãn $x \geq 0, x \neq 9$) Ta có $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8} = \frac{7}{\sqrt{25}+8} = \frac{7}{13}$.
- Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x+5\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

- Ta có $P = A.B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{7}{\sqrt{x}+8} = \frac{7}{\sqrt{x}+3} > 0$

$$\Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{7}{P} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{7}{P} \geq 3 \Rightarrow P \leq 2 \Rightarrow \text{mà } \begin{cases} P \in \mathbb{Z}^+ \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 1 \\ P = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } P = 1 \Rightarrow x = 16.$$

$$\text{Với } P = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$$

□

Câu 2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là: $x \text{ (m)}$ ($x > 0$).

Suy ra, chiều rộng hình chữ nhật là: $\frac{720}{x} \text{ (m)}$.

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$(x+10) \left(\frac{720}{x} - 6 \right) = 720 \Leftrightarrow 6x^2 + 60x - 7200 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 1200 = 0$$

Giải phương trình này ta được: $\begin{cases} x = 30 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -40 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 30 (m) , chiều rộng hình chữ nhật là 24 (m) .

□

Câu 3.

- a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$$
- b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d) : y = 3x + m^2 - 1$ và parabol $(P) : y = x^2$.
- (a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .
- (b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$.

Lời giải.

- a) Đặt
$$\begin{cases} u = \frac{x}{x-1} \\ v = \frac{1}{y+2} \end{cases}$$
 với $(x \neq 1, y \neq -2)$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 3u - 2v = 4 \\ 2u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x-1} = 2 \\ \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; -1)$.

- b)
- (a) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = 3x + m^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

Ta xét biệt thức $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (-m^2 + 1) = 9 + 4m^2 - 4 = 4m^2 + 5 > 0$ với mọi m .

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

- (b) Với x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) nên $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - m^2 \end{cases}$$

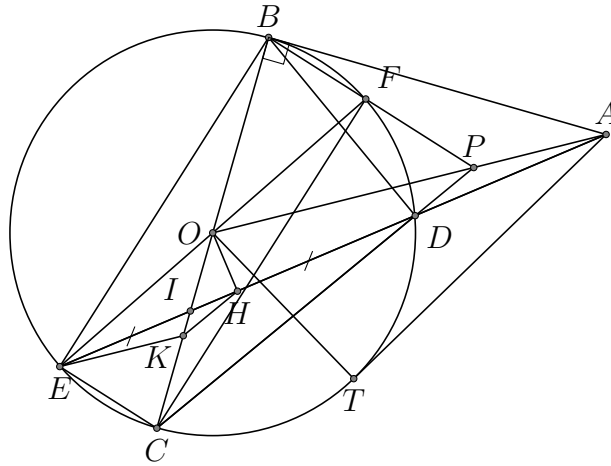
$$\text{Để } (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow 1 - m^2 + 3 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

□

Câu 4. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC . Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C , I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE .

- a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.
- c) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO , d cắt BC tại điểm K . Chứng minh $HK \parallel DC$.
- d) Tia CD cắt AO tại điểm P , tia EO cắt BP tại điểm F . Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Lời giải.



- a) Vì AB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OA \perp AB \Rightarrow \widehat{OBA} = 90^\circ$.
 Vì DE là dây cung của (O) mà H là trung điểm của DE nên $OH \perp DE \Rightarrow \widehat{OHA} = 90^\circ$.
 Xét tứ giác $ABOH$ có $\widehat{OHA} + \widehat{OBA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABOH$ nội tiếp.
- b) Vì AB là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BED} = \widehat{BEA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD)
 Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có $\widehat{ABD} = \widehat{BEA}$ và $\widehat{BAD}$ chung
 $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.
- c) Vì tứ giác $ABOH$ nội tiếp nên $\widehat{HAO} = \widehat{HBO}$ (hai góc cùng chắn một cung) (1)
 Mà $EK \parallel AO \Rightarrow \widehat{KEA} = \widehat{HAO}$ (hai góc so le trong) (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{KEH} = \widehat{KBH}$.
 $\Rightarrow$ tứ giác $HKEB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHK} = \widehat{KBE}$ (3)
 Vì tứ giác $DCEB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CBE}$ (hai góc cùng chắn cung CE) (4)
 Từ (3) và (4) ta có $\widehat{CDE} = \widehat{KHE}$ mà hai góc nằm ở vị trí đồng vị $\Rightarrow HK \parallel DC$.
- d) Kẻ tiếp tuyến thứ hai với AT với (O) ($T \in (O)$).
 $\Rightarrow OT \perp TA \Rightarrow \widehat{OTA} = 90^\circ$.
 Xét tứ giác $OTAB$ có $\widehat{OTA} + \widehat{OBA} = 180^\circ$ mà hai góc đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $OTAB$ nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{OAT} = \widehat{OBT}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OT)
 Mà trên (O) có $\widehat{OBT} = \widehat{CBT} = \widehat{CDT}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CT)
 $\Rightarrow \widehat{OAT} = \widehat{CDT}$ hay $\widehat{PAT} = \widehat{CDT} \Rightarrow \widehat{PAT} + \widehat{PDT} = 180^\circ$.
 Mà hai góc ở vị trí đối nhau trong tứ giác $TAPD \Rightarrow TAPD$ nội tiếp.
 $\Rightarrow \widehat{ATP} = \widehat{ADP}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AP)
 Trên (O) có $\widehat{EBC} = \widehat{EDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CE)
 Mà $\widehat{ADP} = \widehat{EDC}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ATP} = \widehat{CBE}$ (1).
 Có AT, AB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AO$ là tia phân giác của góc $\widehat{TAB} \Rightarrow \widehat{TAP} = \widehat{BAP}$
 Xét $\triangle TAP$ và $\triangle BAP$ có $AT = AB, \widehat{TAP} = \widehat{BAP}$ (cmt) và AP chung
 $\Rightarrow \triangle TAP = \triangle BAP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ATP} = \widehat{ABP}$ (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{EBC}$
 $\Rightarrow \widehat{EBP} = \widehat{EBC} + \widehat{CBP} = \widehat{ABP} + \widehat{CBP} = \widehat{CBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBF} = 90^\circ$
 Mà EF qua O nên EF là đường kính của $(O) \Rightarrow BFCE$ có hai đường chéo EF và BC

bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình chữ nhật. □

Câu 5. Với các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Lời giải.

Bổ đề $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}, \forall a, b \geq 0$.

Thật vậy bổ đề tương đương với $2\sqrt{ab} \leq a + b$ (đúng theo bất đẳng thức cô-si)

Áp dụng ta có $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x+6} + \sqrt{y+6} \leq \sqrt{2(x+y+12)}$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 2(x+y) + 24 \Leftrightarrow -4 \leq x+y \leq 6 \quad (1)$$

Dễ thấy $x+y \geq 0 \quad (2)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x+y = \sqrt{x+6} + \sqrt{y+6} &\Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+y) + 12 + 2\sqrt{(x+6)(y+6)} \Leftrightarrow (x+y)^2 - (x+y) - 12 \\ &= 2\sqrt{(x+6)(y+6)} \geq 0 \Leftrightarrow (x+y+3)(x+y-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq -3 \\ x+y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x+y \geq 4 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $4 \leq x+y \leq 6$.

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi } x+y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4 \\ x+6 = 0 \\ y+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 10 \\ x = 10 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\text{Khi } x+y = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 6 \\ x+6 = y+6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $x+y$ là 6 khi $x = y = 3$ và giá trị nhỏ nhất của $x+y$ là 4 khi $(x; y) = (-6; 10)$ hoặc $(x; y) = (10; -6)$. □

———— HẾT ————

15 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ TĨNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) $P = (\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$

b) $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \right) \left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right),$ với $x > 0, x \neq 9.$

Lời giải.

a) $P = (\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{(\sqrt{2} + 1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

b) Ta có

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{x - 9} + \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} \quad \text{với } x > 0; x \neq 9 \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \end{aligned}$$

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + m + 3 = 0$ (1).

a) Giải phương trình khi $m = 0$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4.$

Lời giải.

a) Với $m = 0$ phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} x^2 - 2(0 + 2)x + 0^2 + 0 + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Ta có $a + b + c = 1 + (-4) + 3 = 0.$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = 3$

b) Ta có $\Delta' = (m + 2)^2 - (m^2 + m + 3) = 3m + 1$

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta \geq 0$ suy ra $m \geq \frac{-1}{3}$

Với $m \geq \frac{-1}{3}$, theo định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m + 2) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m + 3 \end{cases} \quad (*)$$

Theo bài ra ta có $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = 4 \quad (**)$

Thay (*) vào (**) ta được

$$4m^2 + 16m + 16 - 2m^2 - 2m - 6 = 4m^2 + 4m + 12 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 1 = 0$$

Giải phương trình trên ta được $m_1 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$ hoặc $m_2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2},$

kết hợp điều kiện ta được $m_1 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}; m_2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ là giá trị cần tìm

□

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : y = ax + a + 3$ và đường thẳng $(d') : y = (a^2 - 2a + 2)x + 5 - a$

- Tìm giá trị của a để đường thẳng (d) đi qua $A(a; 5)$.
- Với giá trị nào của a thì hai đường thẳng (d) và (d') song song với nhau.

Lời giải.

- Đường thẳng (d) đi qua $A(1; 5)$ thì $5 = a + a + 3 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1$ thì (d) đi qua $A(1; 5)$

- Để (d) song song với (d') thì
$$\begin{cases} a = a^2 - 2a + 2 \\ a + 3 \neq 5 - a \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được
$$\begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \text{ từ đó suy ra } a = 2 \text{ thì } (d) \text{ và } (d') \text{ song song với nhau.} \\ a \neq 1 \end{cases}$$

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB , kẻ tia Ax vuông góc với AB . Từ điểm M trên tia Ax kẻ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm, C khác A). Đoạn AC cắt OM tại E , MB cắt nửa đường tròn tại D (D khác B).

- Chứng minh $AMCO$ và $AMDE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn
- Chứng minh hai tam giác MDO và MEB đồng dạng
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB , I là giao điểm của MB và CH . Chứng minh rằng đường thẳng EI vuông góc với AM .

Lời giải.

c) Vì $MA \parallel AH \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{DIC}$ (so le trong)

Ta có $\widehat{AMD} = \widehat{DEC}$ (vì tứ giác $AMDE$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{DEC} = \widehat{DIC}$

$\Rightarrow DCIE$ nội tiếp (2 góc cùng nhìn đoạn CD dưới một góc không đổi)

$\Rightarrow \widehat{CDI} = \widehat{CEI}$ cùng chắn $\widehat{CI}$

Mà $\widehat{CDI} = \widehat{CAB}$ (cùng chắn cung CB của (O))

$\Rightarrow \widehat{CEI} = \widehat{CAB}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị

Suy ra $EI \parallel AB \Rightarrow EI \perp MA$

□

Câu 5. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = (2a + 2b - 3)(a^3 + b^3) + \frac{7}{(a + b)^2}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F &= [2(a + b) - 3](a + b)(a^2 - ab + b^2) + \frac{7}{(a + b)^2} \\ &\geq [2(a + b) - 3](a + b)(2ab - ab) + \frac{7}{(a + b)^2} \quad (\text{vì } a^2 + b^2 \geq 2ab) \\ &\geq [2(a + b) - 3](a + b) + \frac{7}{(a + b)^2} \\ &\geq 2(a + b)^2 - 3(a + b) + \frac{7}{(a + b)^2} \\ &\geq \frac{7}{16}(a + b)^2 + \frac{7}{(a + b)^2} + \left[\frac{5}{4}(a + b) - \frac{5}{2} \right]^2 + \frac{13}{4}(a + b) - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta được

$$\frac{7}{16}(a + b)^2 + \frac{7}{(a + b)^2} \geq \frac{7}{2}; \quad \left[\frac{5}{4}(a + b) - \frac{5}{2} \right]^2 \geq \left[\frac{5}{4} \cdot 2\sqrt{ab} - \frac{5}{2} \right]^2 \geq 0 \text{ và } \frac{13}{4}(a + b) - \frac{25}{4} \geq \frac{13}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } F \geq \frac{7}{2} + 0 + \frac{13}{2} - \frac{25}{4} = \frac{15}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F bằng $\frac{15}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$.

□

————— **HẾT** —————

16 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÒA BÌNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1)

a) Rút gọn: $A = 5\sqrt{2} - 8$.

b) Cho $x = 2, y = 3$. Tính giá trị biểu thức: $B = x^2 - xy + y^2$

2) Vẽ đồ thị hàm số: $y = 3x + 2$

3) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $C = x^3 + 3x^2 - x - 3$

Lời giải.

1)

a) $A = \sqrt{2}(5 - \sqrt{4}) = \sqrt{2}(5 - 2) = \sqrt{2}$.

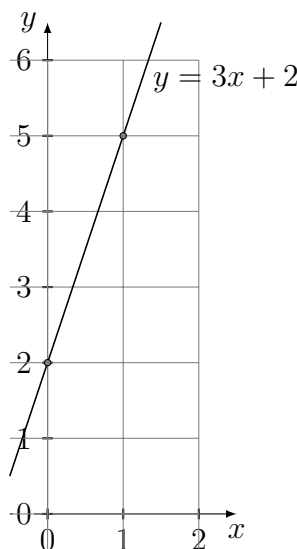
b) $B = 2^2 - 2.3 + 3^2 = 7$.

2) Tập xác định: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Bảng giá trị

x	0	1
$y = 3x + 2$	2	5

Đồ thị



$$\begin{aligned}
 3) \quad C &= (x^3 + 3x^2) - (x + 3) \\
 &= x^2(x + 3) - (x + 3) \\
 &= (x + 3)(x^2 - 1) \\
 &= (x + 3)(x - 1)(x + 1).
 \end{aligned}$$

□

Câu 2.

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Tính độ dài cạnh BC và đường cao AH của tam giác ABC .

2) Giải phương trình: $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

3) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - xy} = x - 2y + 1 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

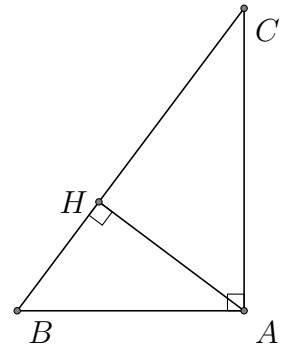
1)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{400} = 20 \text{ cm.}$$

$$\text{Ta có: } AH \cdot BC = AB \cdot AC = 2S_{ABC}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9.6 \text{ cm.}$$



2) Phương trình đã cho tương đương:

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 + 10x^2 + 35x + 50) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 5)(x^2 + 5x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \\ x^2 + 5x + 10 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm là: $S = \{0; -5\}$.

3)
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - xy} = x - 2y + 1 & (1) \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (x - y)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2y \end{cases}$$

• $x = y$, thế vào (1) ta được:

$$\sqrt{2y^2 - y^2} = y - 2y + 1 \Leftrightarrow |y| = 1 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - y \\ -y = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

• $x = 2y$, thế vào (1) ta được:

$$\sqrt{8y^2 - 2y^2} = 2y - 2y + 1 \Leftrightarrow \sqrt{6y^2} = 1 \Leftrightarrow 6y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{6}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm}(x; y) \text{ là: } \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right); \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

□

Câu 3. Một lớp học chỉ có các bạn học sinh xếp loại học lực Giỏi và các bạn học sinh xếp loại học lực Khá. Biết rằng nếu 1 bạn học sinh Giỏi chuyển đi thì $\frac{1}{6}$ số học sinh còn lại của lớp là học sinh Giỏi, nếu 1 bạn học sinh Khá chuyển đi thì $\frac{4}{5}$ số học sinh còn lại của lớp là học sinh Khá. Tính số học sinh của lớp đó.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số học sinh Giỏi và học sinh Khá của lớp học.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 1 = \frac{1}{6}(x + y - 1) \\ y - 1 = \frac{4}{5}(x + y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 25 \end{cases}.$$

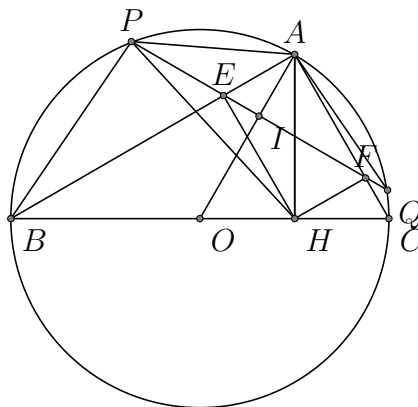
Vậy số học sinh của lớp là: $6 + 25 = 31$ (học sinh).

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính BC . Lấy một điểm A trên đường tròn (O) sao cho $AB > AC$. Từ A vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Từ H vẽ HE vuông góc với AB và HF vuông góc với AC (E thuộc AB , F thuộc AC).

- Chứng minh rằng $AEHF$ là hình chữ nhật và $OA \perp EF$.
- Tia FE cắt đường tròn (O) tại P . Chứng minh rằng $\triangle APH$ cân.

Lời giải.



- Ta có $\angle BAC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 Vì $HE \perp AB, HF \perp AC$ nên $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật.
 Gọi I là giao điểm của OA và EF . Vì $\triangle OAB$ cân ở O nên $\angle EAI = \angle ABO$ (1)
 $AEHF$ là hình chữ nhật nên nó nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \angle AEI = \angle AHF$ (2).
 Vì $AE \parallel HF$ (cùng $\perp AC$) nên $\angle AHF = \angle EAH = 90^\circ - \angle ABO$ (3).
 Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle AEI + \angle EAI = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEI$ vuông tại $I \Rightarrow OA \perp EF$.
- Gọi Q là giao của tia EF với (O). Vì $OA \perp PQ$ nên A là điểm chính giữa cung PQ .
 $\Rightarrow \triangle APQ$ cân tại $A \Rightarrow \angle APQ = \angle AQP$.
 Vì $APBQ$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle ABP = \angle AQP$.

Suy ra $\angle ABP = \angle APQ = \angle APE \Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle APE$ (g-g).

$$\Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AP}{AE} \Rightarrow AP^2 = AE \cdot AB.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB ta có $AH^2 = AE \cdot AB$

$$\Rightarrow AP^2 = AH^2 \Rightarrow AP = AH \Rightarrow \triangle APH \text{ cân ở } A.$$

□

Câu 5. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \leq xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{5x^2 + 7y^2} + \frac{1}{7x^2 + 5y^2}.$$

Lời giải.

Vì x, y là các số thực dương nên từ điều kiện $x + y \leq xy$ ta suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 1$.

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$. Do đó:

$$\frac{1}{5x^2 + 7y^2} = \frac{1}{5(x^2 + y^2) + 2y^2} \leq \frac{1}{10xy + 2y^2}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{7x^2 + 5y^2} \leq \frac{1}{10xy + 2x^2}$$

Suy ra:

$$P \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5xy + y^2} + \frac{1}{5xy + x^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 10xy}{25x^2y^2 + 5xy(x^2 + y^2) + x^2 + y^2}$$

$$P \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 10xy}{25x^2y^2 + 5xy \cdot 2xy + x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 10xy}{36x^2y^2} = \frac{1}{72} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{10}{xy} \right) = \frac{1}{72} \cdot \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{8}{xy} \right]$$

$$P \leq \frac{1}{72} \cdot \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 + 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 \right] = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 \leq \frac{1}{24}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{24}$, đạt được khi $x = y = 2$.

□

———— HẾT ————

17 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC TP HCM

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

- $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$
- $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$
- $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$
- $x(x + 3) = 15 - (3x - 1).$

Lời giải.

- $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$. Tính được $\Delta' = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a} = \sqrt{5}$.
- $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$. Đặt $t = x^2 \geq 0$, được phương trình $4t^2 - 5t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{9}{4} \end{cases}$.
Với $t = \frac{9}{4}$, ta có $x = \pm \frac{3}{2}$.
- $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, y = -1$. Nghiệm hệ phương trình là $(2; -1)$.
- $x(x + 3) = 15 - (3x - 1) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -8, x = 2$.

□

Câu 2.

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng $(D) : y = \frac{x}{2} - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) ở câu trên bằng phép tính.

Lời giải.

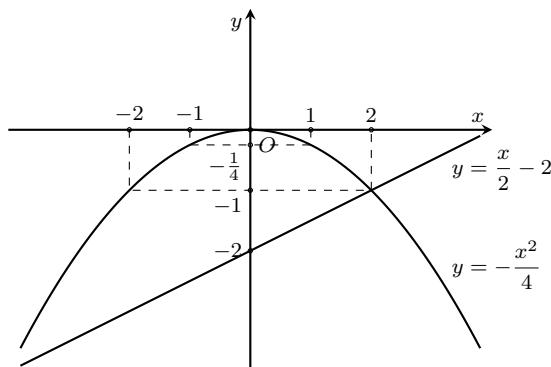
- Hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$ và $y = \frac{x}{2} - 2$.

• Bảng giá trị:

x	-2	1	0	1	2
$y = -\frac{x^2}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1

x	0	2
$y = \frac{x}{2} - 2$	-2	-1

• Đồ thị:



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là

$$-\frac{1}{4}x^2 = \frac{x}{2} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2. \end{cases}$$

Khi đó, (D) và (P) cắt nhau tại 2 điểm $A(-4; -4)$ và $B(2; -1)$.

□

Câu 3.

- a) Thu gọn biểu thức sau: $A = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$
- b) Ông Sáu gửi một số tiền vào ngân hàng theo mức lãi suất tiết kiệm với kỳ hạn 1 năm là 6%. Tuy nhiên sau thời hạn một năm ông Sáu không đến nhận tiền lãi mà để thêm một năm nữa mới lãnh. Khi đó số tiền lãi có được sau năm đầu tiên sẽ cộng dồn vào số tiền ban đầu để thành số tiền gửi cho năm kế tiếp với lãi suất cũ. Sau 2 năm ông Sáu nhận được số tiền là 112.360.000 đồng (kể cả gốc lẫn lãi). Hỏi ban đầu ông Sáu đã gửi bao nhiêu tiền?

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3} + 1)} + \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3} - 1)} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 14. \end{aligned}$$

- b) Gọi P (đồng) là số tiền ban đầu của ông Sáu. Sau một năm, ông Sáu được số tiền cả vốn lẫn lãi là $P + P \times 6\% = P(1 + 6\%)$ (đồng), số tiền này coi như tiền vốn để tính lãi cho năm thứ hai. Cuối năm thứ hai, ông Sáu có số tiền là $P(1 + 6\%) + P(1 + 6\%) \times 6\% = P(1 + 6\%)^2$ (đồng). Theo đề bài số tiền ông Sáu rút được là 112.360.000 đồng, nên ta có:

$$112.360.000 = P(1 + 6\%)^2 \Leftrightarrow P = \frac{112.360.000}{(1 + 6\%)^2} = 100.000.000 \text{ (đồng).}$$

□

Câu 4. Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (1) (x là ẩn số).

- a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị m .
- b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn

$$(1 + x_1)(2 - x_2) + (1 + x_2)(2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2.$$

Lời giải.

Xét phương trình: $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (1) (x là ẩn số)

- a) Ta tính được $\Delta' = m^2 - m + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ (với $m \in \mathbb{R}$). Do đó, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị m .

- b) Theo Định lý Viète phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 2. \end{cases}$$

Kết hợp với giả thiết, ta có

$$(1 + x_1)(2 - x_2) + (1 + x_2)(2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2$$

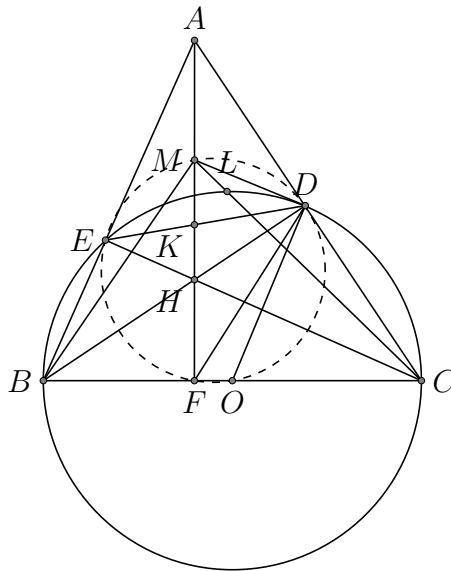
$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị $m = 1, -\frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các đoạn AC, AB lần lượt tại D, E . Gọi H là giao điểm của BD và CE , F là giao điểm của AH và BC .

- Chứng minh: $AF \perp BC$ và $\widehat{AFD} = \widehat{ACE}$.
- Gọi M là trung điểm của AH . Chứng minh $MD \perp OD$ và 5 điểm M, D, O, F, E cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi K là giao điểm của AH và DE . Chứng minh $MD^2 = MK \cdot MF$ và K là trực tâm của tam giác MBC .
- Chứng minh: $\frac{2}{FK} = \frac{1}{FH} + \frac{1}{FA}$.



Lời giải.

- Ta có $BD \perp AC, CE \perp AB$ và BD, CE cắt nhau tại H nên H là trực tâm $\triangle ABC$, hay $AH \equiv AF \perp BC$.
Xét tứ giác $HFCD$ có $\widehat{HFC} = \widehat{HDC} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{AFD} = \widehat{DCH} = \widehat{ACE}$ (góc nội tiếp).
- Tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn (AH) tâm M nên tam giác MAD cân tại M , suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{MDA}$ (1).

Tam giác ODC cân tại O , suy ra $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ (2).

Từ (1), (2), kết hợp với $\widehat{MAD} + \widehat{DCO} = \widehat{FAC} + \widehat{ACF} = 90^\circ$ ta được $\widehat{MDA} + \widehat{ODC} = 90^\circ$, hay góc $\widehat{MDO} = 90^\circ$, suy ra $MD \perp OD$.

Chứng minh tương tự ta suy ra được $ME \perp OE$, $\widehat{MEO} = 90^\circ$, cùng với $\widehat{MFO} = 90^\circ$, ta suy ra 5 điểm M, D, O, F, E cùng thuộc đường tròn đường kính OM .

- c) Xét tam giác MDK và MFD có $\widehat{M}$ chung, $\widehat{MDK} = \widehat{MFD}$ (vì $\widehat{MDE} = \widehat{DCE} = \widehat{HFD}$, trong các tứ giác nội tiếp). Do đó, $\triangle MDK \sim \triangle MFD$, hay $\frac{MD}{MF} = \frac{MK}{MD} \Rightarrow MD^2 = MF.MK$.

Gọi L là giao điểm của MC và (O) . Ta có, $ML.MC = MD^2$ (suy ra được từ $\triangle MLD \sim \triangle MDC$) và $MD^2 = MF.MK$ (chứng minh trên), nên $ML.MC = MF.MK$.

Khi đó, $\triangle MLK \sim \triangle MFC$, suy ra $FKLC$ là tứ giác nội tiếp, hay góc $\widehat{KFC} = \widehat{KLC} = 90^\circ$, tức là $KL \perp LC$.

Mặt khác $BL \perp LC$, nên B, K, L thẳng hàng và BK là đường cao. Ta vừa chứng minh được BK, MK cùng là đường cao trong $\triangle MBC$, nên K là trực tâm của tam giác MBC .

- d) Ta có $FH.FA = FB.FC$ ($\triangle BFH \sim \triangle AFC$); $FK.FM = FB.FC$ ($\triangle BFK \sim \triangle MFC$).

Suy ra $FH.FA = FK.FM \Rightarrow 2FH.FA = 2FK.FM = FK.(FA + FH)$ hay ta được $\frac{2}{FK} = \frac{1}{FH} + \frac{1}{FA}$.

□

———— HẾT ————

18 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HƯNG YÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $\sqrt{3}(\sqrt{27} + 4\sqrt{3})$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

a) $\sqrt{3}(\sqrt{27} + 4\sqrt{3}) = \sqrt{81} + 4.3 = 9 + 12 = 21$.

b) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3y \\ 2(5 + 3y) + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3y \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

□

Câu 2.

a) Tìm tọa độ điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = 2x^2$, biết hoành độ của điểm A bằng 2.

b) Tìm m để hàm số bậc nhất $y = (m - 2)x - 1$ ($m \neq 2$) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Điểm A thuộc đồ thị nên $y_A = 2x_A^2 = 8$.

Vậy $A(2; 8)$.

b) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu

$$m - 2 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Vậy $m \geq 4$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - x - m + 2 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = 3$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ ($x_1 > x_2$) thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 5$.

Lời giải.

a) Với $m = 3$ thì phương trình là:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}; x = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}$.

b) Có $\Delta = 1 - 4(-m + 2) = 4m - 7$.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{4}$ khi đó theo Vi-ét và yêu cầu bài toán ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1(1) \\ 2x_1 + x_2 = 5(2) \\ x_1 \cdot x_2 = 2 - m(3) \end{cases}$$

Kết hợp phương trình (1); (2) ta có $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ thay vào phương trình số (3) ta có $2 - m = -12 \Leftrightarrow m = 14$ (thỏa mãn điều kiện).
 Vậy $m = 14$.

□

Câu 4.

- a) Cho hình trụ có bán kính đường tròn đáy $r = 2\text{cm}$ và chiều cao $h = 5\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.
- b) Một công ty vận tải dự định điều một số xe tải để vận chuyển 24 tấn hàng. Thực tế khi đến nơi thì công ty bổ sung thêm 2 xe nữa nên mỗi xe chở ít đi 2 tấn so với dự định. Hỏi số xe dự định được điều động là bao nhiêu? Biết số lượng hàng chở ở mỗi xe như nhau và mỗi xe chở một lượt.

Lời giải.

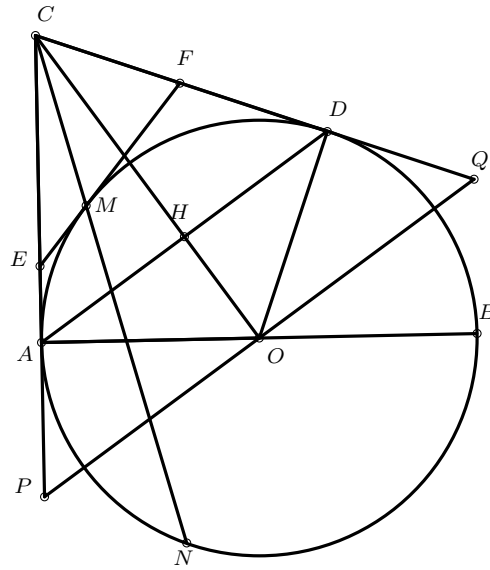
- a) $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 5 = 20\pi (\text{cm}^2)$.
- b) Gọi số xe ban đầu là x (xe) nên số hàng thực tế mỗi xe chở là $\frac{24}{x}$ (tấn) Số xe thực tế là $x + 2$ (xe) nên số hàng thực tế mỗi xe chở là $\frac{24}{x+2}$ (tấn) Theo bài ra ta có phương trình:
- $$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -6 (\text{loại}) \end{cases}$$
- Vậy số xe ban đầu là 4 xe.

□

Câu 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn lấy điểm C sao cho C khác A . Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD (D là tiếp điểm) và cát tuyến CMN (M nằm giữa N và C) với đường tròn. Gọi H là giao điểm của CO và AD .

- a) Chứng minh các điểm C, A, O, D cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Chứng minh $CH \cdot CO = CM \cdot CN$.
- c) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt CA, CD thứ tự tại E, F . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt CA, CD thứ tự tại P, Q . Chứng minh $PE + QF \geq PQ$.

Lời giải.



- a) Vì CA, CD là tiếp tuyến của (O) (gt).
 Nên góc $\widehat{CAO} = \widehat{CDO} = 90^\circ$ (theo tính chất tiếp tuyến).
 Suy ra 4 điểm C, A, O, D cùng thuộc một đường tròn (điều phải chứng minh).

- b) Chứng minh được tam giác COD vuông tại A có đường cao DH nên
 $CH.CO = CD^2$ (1).

Ta chứng minh được $\triangle CMD \sim \triangle CDN$
 nên có $CM.CN = CD^2$ (2).

(1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

- c) Ta có $\widehat{OFQ} = \widehat{MDO}$ (cùng phụ với góc $\widehat{FDM}$).

Tứ giác $AODC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADO} = \widehat{ACO}$ (Cùng chắn cung AO)
 mà $\widehat{ACO} = \widehat{AOP}$ (cùng phụ với góc P) $\Rightarrow \widehat{ADO} = \widehat{APO}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{POE} = \widehat{MDO} = \widehat{OFQ}$ (3).

Tam giác CPQ cân tại $C \Rightarrow \widehat{CPQ} = \widehat{CQP}$ (4).

Từ (3) và (4) ta có tam giác POE đồng dạng với tam giác QFO
 $\Rightarrow QF.PE = OP.OQ = OP^2$.

Theo Cô-si có $QF + PE \geq 2\sqrt{QF.PE} = 2.OP = PQ$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $QF = PE$ (Tức là M là giao điểm của OC và (O)).

□

Câu 6. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} + \sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} + \sqrt{2c^2 + ca + 2a^2}.$$

Lời giải.

$$\text{Có } \sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} = \sqrt{\frac{5}{4}(a+b)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2} \geq \sqrt{\frac{5}{4}(a+b)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b).$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(b+c); \sqrt{2c^2 + ca + 2a^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(c+a).$$

Vậy $P \geq \sqrt{5}(a+b+c)$. ta luôn có bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$. Thật vậy vì bất đẳng thức $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức đó ta có:

$$a+b+c \geq \frac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \frac{1}{3}.$$

Vậy $P \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{9}$. □

————— **HẾT** —————

19 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC KIÊN GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tính $A = \sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{125}$.
- b) Cho biểu thức: $P(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x - 1}{x + 3\sqrt{x}} + 2$ với $x > 0$.
- (a) Rút gọn $P(x)$.
- (b) Xác định x khi $P(x) = \frac{4}{5}$.

Lời giải.

- a) Ta có $A = 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$.
- b)
- (a) $P(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} + \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$.
- (b) Ta có $P(x) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(\sqrt{x} + 1) = 4(\sqrt{x} + 2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$.

□

Câu 2. Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m = 0$ (1) (m là tham số)

- a) Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- b) Tìm m sao cho hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa hệ thức $x_1x_2 = x_1 + x_2$.

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta' = [-(m - 1)]^2 - (m^2 - 2m) = 1 > 0$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
- b) Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2(m - 1)$ và $x_1x_2 = m^2 - 2m$.
- Theo đề $x_1x_2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 2(m - 1) \Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{2}$.

□

Câu 3.

- a) Cho parabol $(P) : y = 3x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 4x - 1$. Tìm giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) .
- b) Một chiếc tàu đi xuôi dòng 120 km và ngược dòng 80 km hết thời gian là 10 giờ với vận tốc của tàu là không đổi. Biết vận tốc của tàu lúc xuôi dòng hơn vận tốc của tàu lúc ngược dòng là 8 km/h. Tính vận tốc của tàu khi xuôi dòng.

Lời giải.

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$3x^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{1}{3}$$

Với $x = 1$ thì $y = 3$ và $x = \frac{1}{3}$ thì $y = \frac{1}{3}$.

Vậy (P) và (d) có hai giao điểm là $A(1; 3)$ và $B\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

- b) Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu lúc xuôi dòng $\Rightarrow x - 8$ (km/h) là vận tốc của tàu lúc ngược dòng. Điều kiện: $x > 8$.

Thời gian tàu lúc xuôi dòng: $\frac{120}{x}$ (h) và thời gian của tàu lúc ngược dòng: $\frac{80}{x-8}$ (h).

Theo đề ta có phương trình: $\frac{120}{x} + \frac{80}{x-8} = 10 \Leftrightarrow 10x^2 - 280x + 960 = 0 \Leftrightarrow x = 24, x = 4$.

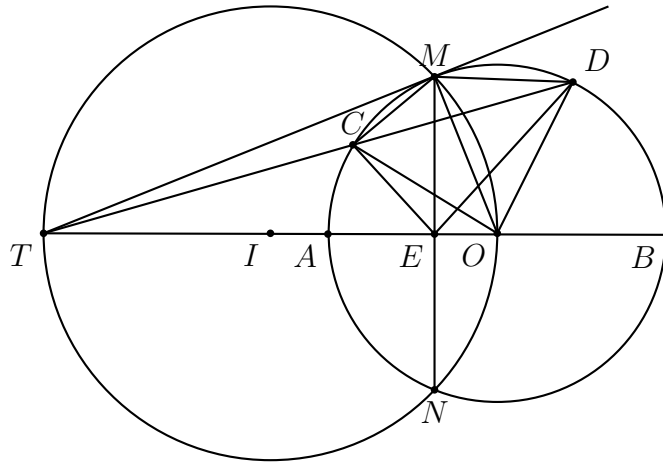
Vậy vận tốc của tàu lúc xuôi dòng là 24 (km/h).

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên cùng một nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy hai điểm C và D sao cho cung AC nhỏ hơn cung AD . Gọi T là giao điểm của CD và AB . Vẽ đường tròn tâm I đường kính TO cắt đường tròn tâm O tại M và N (M nằm giữa cung nhỏ CD). Nối MN cắt AB tại E .

- Chứng minh: TM là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- Chứng minh: $TM^2 = TC.TD$.
- Chứng minh: Tứ giác $ODCE$ nội tiếp.
- Chứng minh: $\widehat{MEC} = \widehat{MED}$.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{OMT} = 90^\circ \Rightarrow OM \perp TM \Rightarrow TM$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm O .
- Xét tam giác TMC và tam giác TDM ta có $\widehat{T}$ chung và $\widehat{TMC} = \widehat{TDM}$ (chắn nửa cung MC). Suy ra $\triangle TMC$ đồng dạng với $\triangle TDM$.
Do đó $\frac{TM}{TD} = \frac{TC}{TM} \Rightarrow TM^2 = TC.TD$.
- Đường tròn (O) và (I) cắt nhau tại M và N nên $OI \perp MN$ tại E .
Tam giác TMO vuông tại M có $ME \perp TO$ nên $TM^2 = TE.TO$.
Lại có $TM^2 = TC.TD$ nên $TE.TO = TC.TD \Rightarrow \frac{TE}{TD} = \frac{TC}{TO}$.
Xét tam giác TCE và tam giác TOD ta có: $\widehat{T}$ chung và $\frac{TE}{TD} = \frac{TC}{TO}$ nên hai tam giác đồng dạng. Suy ra $\widehat{TEC} = \widehat{TDO}$.
Mà $\widehat{TEC} + \widehat{CEO} = 180^\circ$ nên $\widehat{TDO} + \widehat{CEO} = 180^\circ$ hay $\widehat{CDO} + \widehat{CEO} = 180^\circ$.
Mà $\widehat{CDO}$ và $\widehat{CEO}$ là hai góc ở vị trí đối nhau nên tứ giác $ODCE$ nội tiếp đường tròn.
- Ta có $\widehat{DEO} = \widehat{DCO}$ (cùng chắn $\widehat{DO}$).
 $\widehat{CET} = \widehat{CDO}$ (chứng minh trên)
 $\widehat{DCO} = \widehat{CDO}$ (tam giác OCD cân tại O).

Suy ra $\widehat{DEO} = \widehat{CET}$.

Lại có $\widehat{DEO} + \widehat{DEM} = 90^\circ$ và $\widehat{CET} + \widehat{CEM} = 90^\circ$ nên $\widehat{DEM} = \widehat{CEM}$.

□

Câu 5. Tìm $(x; y)$ với x, y là hai số dương thỏa: $x + y^2 + 9 = 2(\sqrt{x-3} + 3\sqrt{y^2+2})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x + y^2 + 9 = 2(\sqrt{x-3} + 3\sqrt{y^2+2}) &\Leftrightarrow (\sqrt{x-3} - 1)^2 + (\sqrt{y^2+2} - 3)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} - 1 = 0 \\ \sqrt{y^2+2} - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm\sqrt{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Do $x > 0, y > 0$ nên ta có kết quả $(x; y)$ là $(4; \sqrt{7})$.

□

———— **HẾT** ————

20 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC LÀO CAI

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Thực hiện các phép tính sau:

a. $\sqrt{9} + \sqrt{16}$.

b. $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{8+1}$.

Lời giải.

a. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

b. $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{8+1} = \sqrt{64} - \sqrt{9} = 8 - 3 = 5$

□

Câu 2. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x}{x-2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a. Rút gọn biểu thức P .

b. Tìm tất cả các giá trị của x để $P > 0$.

Lời giải.

a. Với điều kiện $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x}{x-2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4} = \left(\frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{x}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-2)^2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{x}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-2). \end{aligned}$$

b. Với điều kiện $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$P > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4.$$

Kết hợp điều kiện ta có $x > 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 3.

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đường thẳng $(d) : y = 3x + 2$ song song với đường thẳng $(d') : y = (2a-1)x + 8$.

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = m \end{cases} \quad (I).$

a. Giải hệ phương trình (I) khi $m = -1$.

b. Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > y$.

Lời giải.

1. Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (d') khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2a-1=3 \\ 8 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2a-1=3 \Leftrightarrow a=2.$$

2.

a. Khi $m = -1$, hệ (I) có trở thành:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (1; 1)$.

$$\text{b. } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 3 - 2m \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3 - 2m}{5} \\ x = \frac{m + 6}{5} \end{cases}.$$

Hệ trên luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{m + 6}{5}; \frac{3 - 2m}{5}\right)$ với mọi m .

Khi đó: $x > y \Leftrightarrow \frac{m + 6}{5} > \frac{3 - 2m}{5} \Leftrightarrow m + 6 > 3 - 2m \Leftrightarrow m > -1$.

Vậy với $m > -1$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x > y$.

□

Câu 4. Cho phương trình: $x^2 - 2x + 2m - 5 = 0$ (1) (m là tham số)

- Giải phương trình (1) khi $m = -5$.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = (x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

- Khi $m = -5$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 64 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2} = 5 \text{ và } x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2} = -3.$$

- Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi: $\Delta' = 6 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Áp dụng định lý Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 5 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= (x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2) = (x_1 x_2)^2 - 2(x_1^2 + x_2^2) + 4 \\ &= (x_1 x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 + 4 = 4m^2 - 12m + 1 \\ &= (2m - 3)^2 - 8 \geq -8, \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

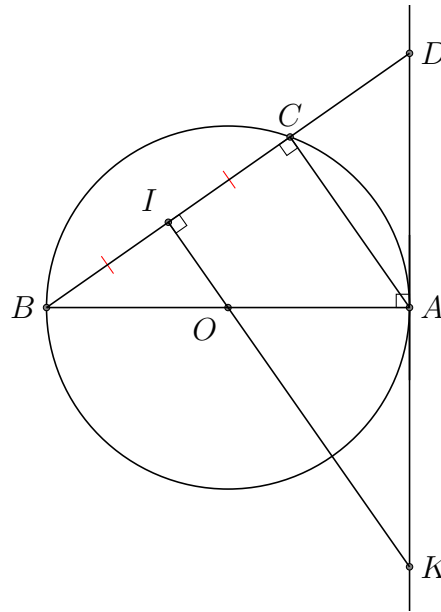
Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -8 khi $m = \frac{3}{2}$.

□

Câu 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Dựng đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A . Trên cung AB lấy điểm C tùy ý (C khác A và B). Tia BC cắt đường thẳng d tại điểm D . Gọi I là trung điểm của BC . Tia IO cắt đường thẳng d tại điểm K .

- Chứng minh rằng tứ giác $OADI$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng $IB \cdot ID = IO \cdot IK$.
- Xác định vị trí của điểm C trên cung AB để $BD + 4BI$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



- a. Vì d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A nên $OA \perp AD \Rightarrow \widehat{OAD} = 90^\circ$ (1).
 Vì I là trung điểm của BC nên $OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OID} = 90^\circ$ (2).
 Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{OAD} + \widehat{OID} = 180^\circ$.
 Suy ra tứ giác $OADI$ nội tiếp một đường tròn.
- b. Xét hai tam giác $\triangle IBO$ và $\triangle IKD$ có:
 ◦ $\widehat{BIO} = \widehat{KID} = 90^\circ$.
 ◦ $\widehat{IBO} = \widehat{IKD}$ (cùng phụ với $\widehat{IDK}$).
 Suy ra: $\triangle IBO \sim \triangle IKD$ (g-g) $\Rightarrow \frac{IB}{IK} = \frac{IO}{ID} \Leftrightarrow IB \cdot ID = IO \cdot IK$.
- c. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:
 $BD + 4BI = BD + 2BC \geq 2\sqrt{2BD \cdot BC} = 2\sqrt{2 \cdot AB^2} = 4R\sqrt{2}$.
 Vậy $BD + 4BI$ nhỏ nhất bằng $4R\sqrt{2}$ đạt được khi và chỉ khi:
 $BD = 2BC \Leftrightarrow C$ là trung điểm của $BD \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB .

□

———— HẾT ————

21 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC LONG AN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 2\sqrt{8} - 3\sqrt{18} + 4\sqrt{128} - 5\sqrt{32}.$

b) $B = \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + 2 \right) \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{x} + x}{1 + \sqrt{x}} \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).

2) Giải phương trình $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 5$.

Lời giải.

1)

a) $A = 4\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 32\sqrt{2} - 20\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$

b) $B = (\sqrt{x} + 2)(2 - \sqrt{x}) = 4 - x.$

2) Phương trình đã cho tương đương với

$$|3x - 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 5 \\ 3x - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2, x = \frac{4}{3}$

□

Câu 2.

1) Cho hai hàm số $(P) : y = x^2$ và $(d) : y = -3x + 4$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng phép tính.

2) Viết phương trình đường thẳng $(d_1) : y = ax + b$ biết (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và đi qua điểm $A(1; 5)$.

Lời giải.

1)

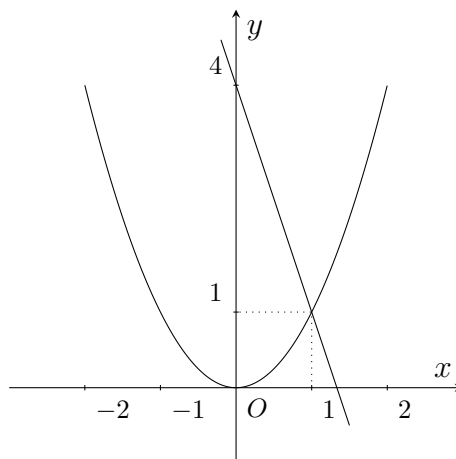
(a) Hàm số $(P) : y = x^2$

Tọa độ đỉnh $O(0; 0)$. Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

(b) Hàm số $(d) : y = -3x + 4$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$



(c) Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) :

$$x^2 = -3x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1, x = -4 \Rightarrow y = 16.$$

Vậy (P) và (d) có hai giao điểm là $A(1; 1)$ và $B(-4; 16)$.

2) Theo giả thiết ta được hệ phương trình $\begin{cases} b = 2 \\ 5 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases}$

Vậy $(d_1) : y = 3x + 2$.

□

Câu 3.

- Giải phương trình $2x^2 + 7x + 3 = 0$ (không giải trực tiếp bằng máy tính)
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ (không giải trực tiếp bằng máy tính)
- Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta = 25 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = -3, x = -\frac{1}{2}$.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

- c) Ta có $\Delta' = 1 > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = m^2 - 1$. Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4 \Leftrightarrow 4m^2 - 2(m^2 - 1) = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = \pm 1$.

□

Câu 4.

- Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 60^\circ, AB = 7\text{cm}$, kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$. Tính độ dài đoạn thẳng AH, AC, HC (kết quả làm tròn lấy một chữ số thập phân).
- Cho tam giác nhọn ABC có $AB = AC$. Đường tròn tâm (O) đường kính $AB = 2R$ cắt cạnh BC, AC lần lượt tại I và K . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt AI tại D ; H là giao

điểm của AI và BK .

- Chứng minh rằng tứ giác $IHKC$ là tứ giác nội tiếp được trong đường tròn.
- Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{DBH}$.
- Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $IHKC$ theo R trong trường hợp tam giác ABC đều.

Lời giải.

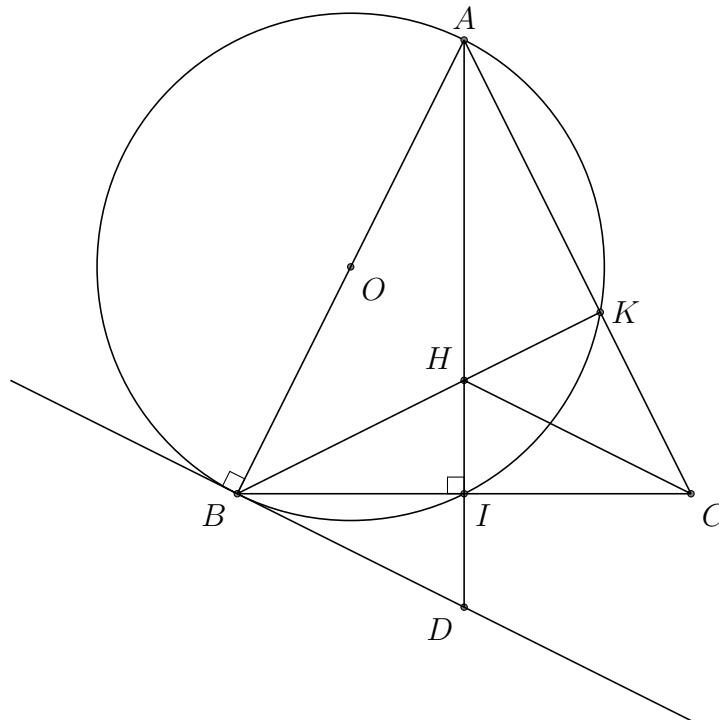
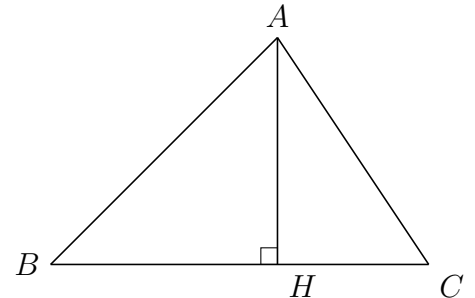
Bài 1: Ta có tam giác AHB vuông tại H nên

$$AH = AB \cdot \sin B = 7 \cdot \sin 45^\circ \approx 4,9 \text{ cm.}$$

Tam giác AHC vuông tại H nên

$$AC = \frac{AH}{\sin C} \approx \frac{4,9}{\sin 60^\circ} \approx 5,7 \text{ cm.}$$

$$HC = AH \cdot \tan C = 4,9 \cdot \cot 60^\circ \approx 2,8 \text{ cm.}$$



- Ta có $\widehat{AIB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{HKC} = \widehat{HIC} = 90^\circ$
Do đó $\widehat{HKC} + \widehat{HIC} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $IHKC$ nội tiếp được đường tròn.

- Ta có $\widehat{AIB} = 90^\circ$ nên $AI \perp BC$.

mà tam giác ABC cân tại A nên AI là phân giác.

$$\text{Suy ra } \widehat{BAI} = \widehat{CAI}$$

(1)

$$\text{Ta có } \widehat{BAI} = \widehat{DBI} \text{ (cùng chắn cung } \widehat{BI}) \text{ và } \widehat{KAI} = \widehat{KBI} \text{ (cùng chắn cung } \widehat{IK})$$

(2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{DBI} = \widehat{KBI}$

Vậy BC là phân giác góc $\widehat{DBH}$.

c) Tam giác ABC đều nên AI, BK là trung tuyến

Suy ra H là trọng tâm tam giác ABC

$$CO = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \Rightarrow CH = \frac{2}{3}CO = R\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Gọi R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IHCK$, khi đó $R' = \frac{CH}{2} = R\frac{\sqrt{3}}{3}$

Suy ra diện tích đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IHCK$ là $S = \pi R'^2 = \frac{1}{3}\pi R^2$

□

———— HẾT ————

22 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC NAM ĐỊNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Phần I - Trắc nghiệm

Câu 1. Điều kiện để biểu thức $\sqrt{(x^2+1)x}$ có nghĩa là

- (A) $x \leq 0$. (B) $x \geq 0$. (C) $x < 0$. (D) $x \neq 0$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ đi qua điểm

- (A) $M(0; 1)$. (B) $N(1; 0)$. (C) $P(3; 5)$. (D) $Q(3; -1)$.

Câu 3. Tổng hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - \sqrt{2} = 0$ là

- (A) 1. (B) -2. (C) $-\sqrt{2}$. (D) 2.

Câu 4. Trong các phương trình sau, phương trình nào có hai nghiệm dương?

- (A) $x^2 - 5x + 3 = 0$. (B) $x^2 - 3x + 5 = 0$. (C) $x^2 + 4x + 4 = 0$. (D) $x^2 - 25 = 0$.

Câu 5. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = x - 1$. (B) $y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})x + 1$.
(C) $y = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 1$. (D) $y = |\sqrt{3} - 2|x + 1|$.

Câu 6. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc ngoài là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = 10$ (cm). Diện tích tam giác ABC bằng

- (A) $25 \text{ (cm}^2\text{)}$. (B) $5\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$. (C) $25\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$. (D) $50 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Câu 8. Cho hình nón có chiều cao bằng 8 (cm) và thể tích bằng $96\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. Đường sinh của hình nón có độ dài bằng

- (A) 12 (cm). (B) 4 (cm). (C) 10 (cm). (D) 6 (cm).

Phần II - Tự luận

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-4} \right) \left(\sqrt{x}-1 + \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0$ và $x \neq 4$).

- 1) Chứng minh $P = \sqrt{x} + 3$.
- 2) Tìm các giá trị của x sao cho $P = x + 3$.

Lời giải.

1)

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-4} \right) \left(\sqrt{x}-1 + \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{x-4} - \frac{2}{x-4} \right) \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{x-4} \right) \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \sqrt{x} + 3 \end{aligned}$$

2) $\sqrt{x} + 3 = x + 3 \iff x - \sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x} = 1 \text{ hoặc } \sqrt{x} = 0 \text{ (loại)} \iff x = 1$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2(2m + 1)x + 4m^2 - 2m + 3 = 0$ (m là tham số).

- 1) Giải phương trình khi $m = 2$.
- 2) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2(x_1 + x_2 - x_1x_2) = 18$$

Lời giải.

- 1) $x^2 - 10x + 15 = 0 \iff x = 5 \pm \sqrt{10}$.
- 2) $\Delta' = (2m + 1)^2 - (4m^2 - 2m + 3) = 6m - 2 > 0 \iff m > \frac{1}{3}$. Theo định lý vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2(2m + 1)$ và $x_1x_2 = -2m + 3$, khi đó $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2(x_1 + x_2 - x_1x_2) = 18 \iff (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 \iff m = 1$ (thỏa mãn)

□

Câu 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{5}{x-2} - \frac{2y-4}{y-3} = 2 \\ \frac{x+2}{x-2} - \frac{2}{y-3} = 4 \end{cases}$$

Lời giải.

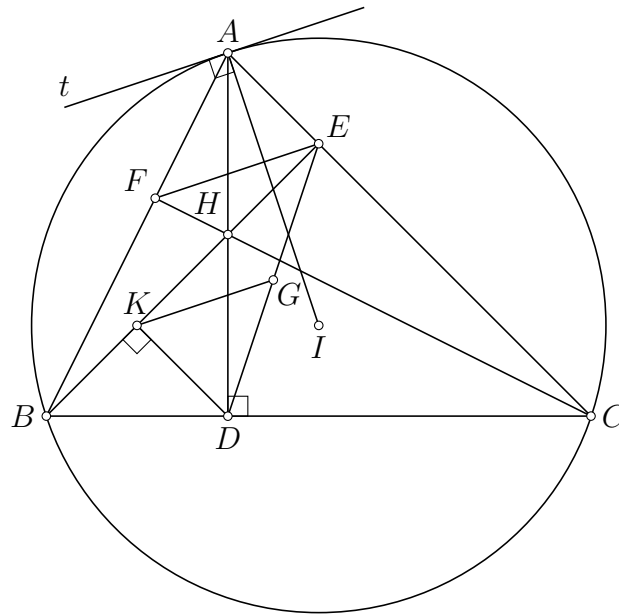
$$\begin{cases} \frac{5}{x-2} - \frac{2y-4}{y-3} = 2 \\ \frac{x+2}{x-2} - \frac{2}{y-3} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y-3} = 4 \\ \frac{4}{x-2} - \frac{2}{y-3} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{x-2} = 1 \\ \frac{4}{x-2} - \frac{2}{y-3} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm I . Gọi H là trực tâm và D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC . Kẻ DK vuông góc với đường thẳng BE tại K .

- 1) Chứng minh tứ giác $BECF$ là tứ giác nội tiếp và tam giác DKH đồng dạng với tam giác BEC .
- 2) Chứng minh $\widehat{BED} = \widehat{BEF}$.
- 3) Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DKE . Chứng minh $IA \perp KG$.

Lời giải.



- 1) Ta có $\widehat{ABE} + \widehat{BAC} = \widehat{ACF} + \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ cho nên tứ giác $BECF$ nội tiếp. Hai tam giác vuông DHK và BEC có $\widehat{DHK} = \widehat{DAC} = \widehat{EBC}$ cho nên đồng dạng.
- 2) Dễ thấy các tứ giác $DHEC$, $AEHF$ nội tiếp và $\widehat{BAD} = \widehat{BCF}$ cho nên $\widehat{BED} = \widehat{BEF}$.
- 3) Tam giác DEF vuông cho nên G là trung điểm của DE , tam giác KGE cân tại G suy ra $\widehat{GKE} = \widehat{BED} = \widehat{BEF}$ cho nên $KG \parallel EF$. Ta cần chứng minh $EF \perp IA$. Qua A dựng tiếp tuyến At , ta có $\widehat{BA}t = \widehat{BCA} = \widehat{AFE}$ cho nên $At \parallel EF$ kéo theo $EF \perp IA$.

□

Câu 5. Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{x} + \sqrt{3(2x^3+5x^2+4x+1)} = 5x^3 - 3x^2 + 8$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \geq 0$.

Áp dụng BDT Cauchy cho hai số thực không âm ta có :

$$2(x+1)\sqrt{x} \leq (x+1)^2$$

$$\sqrt{3(2x^3+5x^2+4x+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{12(2x^3+5x^2+4x+1)} \leq \frac{1}{4}(12+2x^3+5x^2+4x+1)$$

$$\text{Cho nên } VT \leq \frac{1}{4}(2x^3+9x^2+12x+17).$$

Xét hiệu $5x^3 - 3x^2 + 8 - \frac{1}{4}(2x^3+9x^2+12x+17) = \frac{3}{4}(6x^3-7x^2-4x+5) = \frac{3}{4}(x-1)^2(6x+5) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Vậy $2(x+1)\sqrt{x} + \sqrt{3(2x^3+5x^2+4x+1)} \leq 5x^3 - 3x^2 + 8$, dấu bằng xảy ra khi $x = 1$, cho nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

□

———— HẾT ————

23 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC NGHỆ AN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) (\sqrt{x}-3)$.

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn P .
- Tìm các giá trị của x để $P \leq 1$.

Lời giải.

$$\text{a) Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}.$$

Ta có

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-9} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \right) (\sqrt{x}-3) = \frac{4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} (\sqrt{x}-3) = \frac{4}{(\sqrt{x}+3)}.$$

- Từ kết quả trên, ta có

$$P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+3} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 9 \end{cases}.$$

□

Câu 2.

Trong kỳ thi vào lớp 10 THPT tỉnh Nghệ An, tại một phòng thi có 24 thí sinh dự thi. Các thí sinh đều làm bài trên giấy thi của mình. Sau khi thu bài cán bộ coi thi đếm được 33 tờ giấy thi và bài làm của thí sinh chỉ gồm 1 tờ hoặc 2 tờ giấy thi. Hỏi trong phòng đó có bao nhiêu thí sinh bài làm gồm 1 tờ giấy thi, bao nhiêu thí sinh bài làm gồm 2 tờ giấy thi? (Tất cả các thí sinh đều nộp bài).

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số học sinh làm bài 1 tờ và 2 tờ giấy thi ($x, y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=24 \\ x+2y=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=24 \\ y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=9 \end{cases}.$$

Vậy có 15 học sinh làm 1 tờ và 9 học sinh làm 2 tờ giấy thi.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 9 = 0$ (m là tham số). (1)

- Giải phương trình (1) khi $m = -2$.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2(x_1 + x_2) = 12$.

Lời giải.

- Với $m = -2$ ta có phương trình $x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -5$.

- b) Ta có $\Delta' = 9 > 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1 x_2 = m^2 - 9$. Do đó

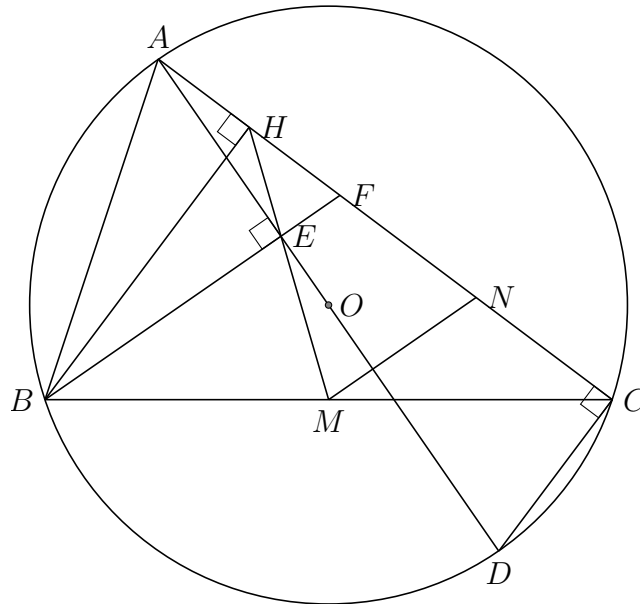
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2(x_1 + x_2) = 12 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = 12 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - (m^2 - 9) = 12 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1. \end{aligned}$$

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm. □

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , vẽ đường kính AD . Đường thẳng qua B vuông góc với AD tại E cắt AC tại F . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC và M là trung điểm của BC .

- Chứng minh $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $\widehat{MHC} + \widehat{BAD} = 90^\circ$.
- Chứng minh $\frac{HC}{HF} + 1 = \frac{BC}{HE}$.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{FED} = \widehat{FCD} = 90^\circ$ nên tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
- Vì tam giác BHC vuông tại H và M là trung điểm BC nên $MH = MC$, do đó ta có $\widehat{MHC} = \widehat{MCH}$. Mặt khác $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ nên $\widehat{MHC} + \widehat{BAD} = \widehat{MCH} + \widehat{BCD} = 90^\circ$.
- Gọi N là trung điểm FC , ta có $MN \parallel BF$.
Do $\widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ nên $ABEH$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{BHE} = \widehat{BAE} = \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ - \widehat{MCH} = 90^\circ - \widehat{MHC} = \widehat{BHM},$$

nên ta có H, E, M thẳng hàng. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{BC}{HE} &= \frac{2MH}{HE} = \frac{2HN}{HF} = \frac{2HF + 2FN}{HF} \\ &= \frac{HF + HF + FC}{HF} = \frac{HF + HC}{HF} = 1 + \frac{HC}{HF}. \end{aligned}$$

□

Câu 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$ab(a+1) + bc(b+1) + ca(c+1) \geq 2$$

Lời giải.

Vì $0 \leq a, b, c \leq 1$ nên ta có

$$(1-a)(1-b) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-1 \Rightarrow a^2b \geq a^2+ab-a.$$

Tương tự: $b^2c \geq b^2+bc-b, c^2a \geq c^2+ca-c.$

Suy ra

$$VT \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) - (a + b + c) = (a + b + c)(a + b + c - 1) \geq 2.$$

Bài toán được chứng minh.

□

———— HẾT ————

24 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC NINH BÌNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tính $A = \sqrt{25} + \sqrt{36}$.
- b) Hàm số $y = 2x + 3$ là hàm đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$? Vì sao?
- c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Tính $A = \sqrt{25} + \sqrt{36} = 5 + 6 = 11$.
- b) Hàm số $y = 2x + 3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì $a = 2 > 0$.
- c) Ta có hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} 6x + 3y = 9 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$
- Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

□

Câu 2.

- a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{3x+1}{x-1}$. (với $x \geq 0, x \neq 1$)
- b) Cho phương trình $x^2 + 4x + m - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số). Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 2$.

Lời giải.

- a) Ta có
- $$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 3x-1}{x-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

- b) Ta có $\Delta' = 4 - (m - 1) = 5 - m$

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $5 - m > 0 \Leftrightarrow m < 5$ (*).

Theo định lí Vi-et:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$$
. Khi đó

$$x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow 3m - 7 = 2 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn (*))}.$$

Vậy $m = 3$.

□

Câu 3. Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30km. Một ca nô đi xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi lại ngược dòng từ bến B về bến A . Thời gian ca nô đi xuôi dòng ít hơn thời gian ca nô đi ngược dòng là 1 giờ. Tìm vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Lời giải.

Gọi vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là x (đơn vị km/h; điều kiện $x > 4$).

Khi đó vận tốc của ca nô khi nước xuôi dòng là $x + 4$ (km/h).

Vận tốc của ca nô khi nước ngược dòng là $x - 4$ (km/h)

Thời gian khi ca nô xuôi dòng là $\frac{30}{x+4}$ (giờ).

Thời gian khi ca nô ngược dòng là $\frac{30}{x-4}$ (giờ)

Theo bài ra ta có phương trình $\frac{30}{x-4} - \frac{30}{x+4} = 1$

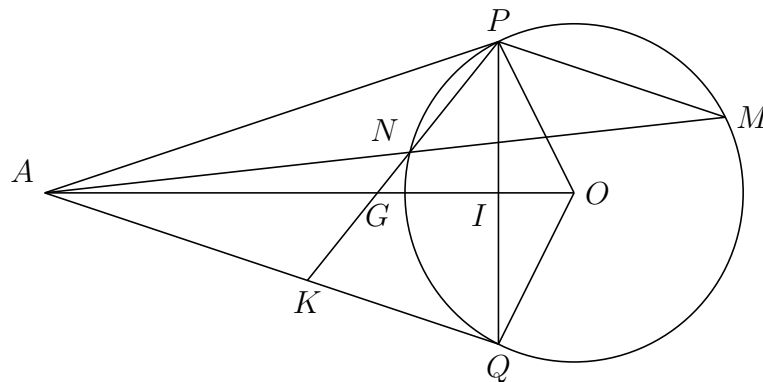
Giải phương trình, ta được $x^2 - 256 = 0$, suy ra $x = 16$.

Vậy vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 16 km/h. $\square$

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , bán kính R . Điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 3R$. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AP và AQ với đường tròn tâm O (P, Q là hai tiếp điểm). Từ điểm P kẻ đường thẳng song song với AQ , cắt (O) tại M (M khác P). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O) . Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K .

- Chứng minh rằng tứ giác $APOQ$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng $KA^2 = KN.KP$.
- Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AO và PK . Tính độ dài đoạn thẳng AG theo R .

Lời giải.



- Xét tứ giác $APOQ$ có
 $\widehat{APO} = 90^\circ$ (gt)
 $\widehat{AQO} = 90^\circ$ (gt)
suy ra $\widehat{APO} + \widehat{AQO} = 180^\circ$.
Mà hai góc ở vị trí đối nhau nên $APOQ$ là tứ giác nội tiếp.
- Ta có $\widehat{APN} = \widehat{AMP}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung NP).
Mà $\widehat{NAK} = \widehat{AMP}$ (hai góc so le trong $PM \parallel AQ$), suy ra $\widehat{APN} = \widehat{NAK}$.
Ta có $\triangle AKN \sim \triangle PKA$ vì $\widehat{AKP}$ chung và $\widehat{APN} = \widehat{NAK}$ (cmt).
Do đó $\frac{KA}{KP} = \frac{KN}{KA}$ suy ra $KA^2 = KN.KP$ (1).
- Ta có Gọi I là giao điểm của AO và PQ . Ta có $AP = AQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), $OP = OQ = R$ suy ra AO là đường trung trực của PQ , do đó $AO \perp PQ$ tại I là trung điểm của PQ .

Ta có $AQ \perp AO$. Xét tam giác vuông AQO có đường cao QI . Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$OQ^2 = OI.OA \Rightarrow OI = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

$$\text{Suy ra } AI = OA - OI = \frac{8}{3}R$$

Ta có $\triangle K N Q \sim \triangle K Q P$ (g.g) vì $\widehat{N K Q}$ chung và $\widehat{K Q N} = \widehat{K P Q}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung NQ).

$$\text{Suy ra } \frac{KN}{KQ} = \frac{KQ}{KP}, \text{ do đó } KQ^2 = KN.KP \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) suy ra $KA = KQ$, suy ra K là trung điểm AQ . Vậy tam giác APQ có các trung tuyến AI và PK cắt nhau ở G nên G là trọng tâm. Suy ra $AG = \frac{2}{3}AI = \frac{16}{9}R$. $\square$

Câu 5.

- a) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $(16x^4 + 1)(y^4 + 1) = 16x^2y^2$.
b) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x > y; xy = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

Lời giải.

- a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $16x^4 + 1 \geq 2\sqrt{16x^4} = 8x^2 \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{1}{2}$.
 $y^4 + 1 \geq 2\sqrt{y^4} = 2y^2 \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y = 1$ và $y = -1$.
Nhân từng vế hai đẳng thức trên ta có $(16x^4 + 1)(y^4 + 1) \geq 16x^2y^2$
suy ra $(16x^4 + 1)(y^4 + 1) = 16x^2y^2$ khi và chỉ khi $x = \pm\frac{1}{2}$ và $y = \pm 1$. Vậy các cặp số cần tìm là $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}; 1\right); \left(\frac{1}{2}; -1\right); \left(-\frac{1}{2}; 1\right); \left(-\frac{1}{2}; -1\right) \right\}$

- b) Ta có $M = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2xy}{x - y} = (x - y) + \frac{2}{x - y}$ (vì $xy = 1$)

Do $x > y$ nên $x - y > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$M \geq 2\sqrt{(x - y) \cdot \frac{2}{x - y}} = 2\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $xy = 1$ và $x - y = \frac{2}{x - y} \Leftrightarrow \left(x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}; y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)$

hoặc $\left(x = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}; y = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)$ $\square$

———— HẾT ————

25 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC NINH THUẬN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Giải bất phương trình $4x - 3 > 2(x - 1)$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$$

Lời giải.

a) Ta có: $4x - 3 > 2(x - 1) \Leftrightarrow 4x - 2x > 3 - 2 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Nghiệm của bất phương trình là: $x > \frac{1}{2}$

b) Ta có:
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + 3(3x - 5) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 11x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{11} \\ y = \frac{14}{11} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{23}{11}; \frac{14}{11}\right)$.

□

Câu 2. Cho biểu thức $P = \sqrt{x(x - 6) + 9}$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7}$.

Lời giải.

a) Ta có :

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{x(x - 6) + 9} = \sqrt{x^2 - 6x + 9} \\ &= \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3| \end{aligned}$$

b) Với $x = \sqrt{7}$ ta có : $P = |\sqrt{7} - 3| = 3 - \sqrt{7}$

□

Câu 3. Cho hàm số bậc hai: $y = ax^2$ (1).

a) Xác định hệ số a biết đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm $A(2; 2)$.

b) Vẽ đồ thị hàm số (1) khi $a = \frac{1}{2}$.

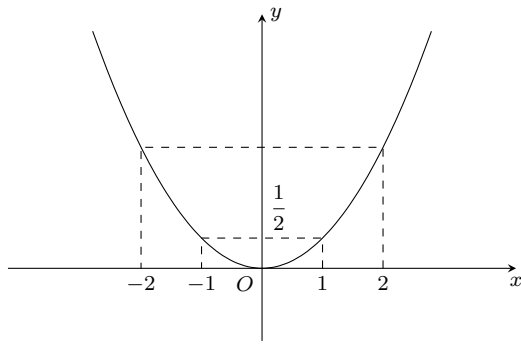
Lời giải.

a) Vì đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm $A(2; 2)$ nên ta có : $2 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

b) Khi $a = \frac{1}{2}$ thì hàm số trở thành $y = \frac{1}{2}x^2$. Ta có bảng giá trị của hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị của hàm số:

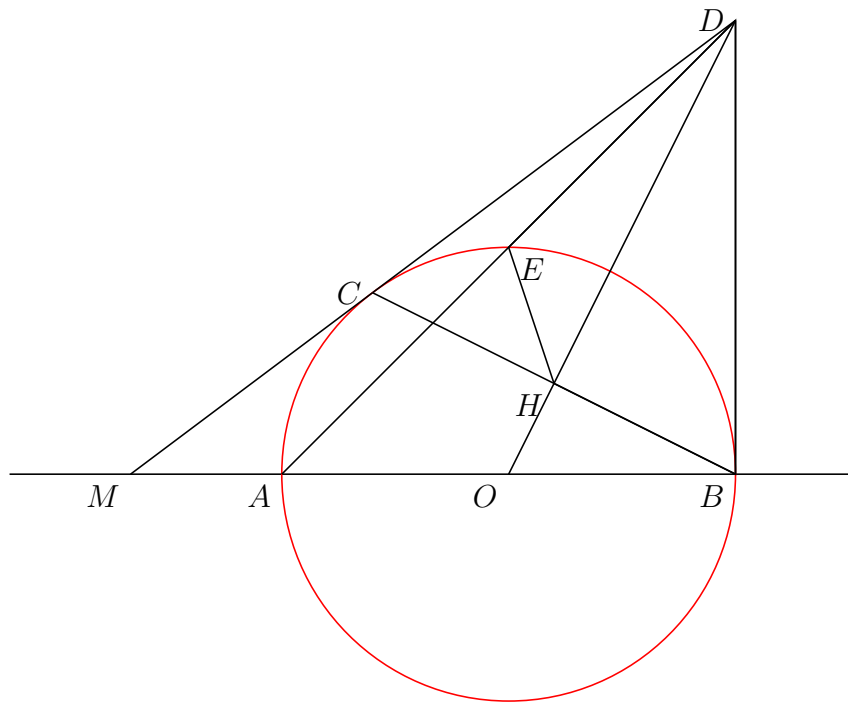


□

Câu 4. Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm M nằm ngoài đường tròn (O) . Qua M kẻ đường thẳng đi qua tâm O cắt đường tròn (O) tại điểm A và B ($MA < MB$). Tiếp tuyến MC (C là tiếp điểm) với đường tròn (O) cắt tiếp tuyến tại B với đường tròn (O) ở D ; BC và OD cắt nhau tại H ; AD cắt đường tròn (O) tại E ($E \neq A$).

- Chứng minh rằng tứ giác $BDEF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Chứng minh $AE \cdot AD = 4R^2$.
- Tính diện tích tam giác BCD theo R khi $\widehat{BMD} = 30^\circ$.

Lời giải.



- Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $DB = DC$; $OB = OC = R$. Suy ra OD là đường trung trực của BC nên $OD \perp BC \Rightarrow \widehat{BHD} = 90^\circ$.
Lại có: $\widehat{AEB} = \widehat{BED} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BED} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $BDEF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Trong tam giác ABD ($\widehat{ABD} = 90^\circ$) có $BD \perp AE$ nên ta có:
 $AD \cdot AE = AB^2 \Leftrightarrow AD \cdot AE = 4R^2$

c) Ta có: $\widehat{BMD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MOC} = 60^\circ$ (do tam giác MOC vuông) $\Rightarrow \triangle OAC$ đều $\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CBD} = 60^\circ$. Suy ra tam giác BCD đều.

Mặt khác: $\triangle ABC$ vuông tại C , ta có:

$$BC = AC \cdot \sin 60^\circ = 2R \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Vậy diện tích tam giác BCD là:

$$S = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}$$

□

Câu 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 - x^2 - 7y^2 = 4xy$.

Lời giải.

Ta có: $x^2y^2 - x^2 - 7y^2 = 4xy \Leftrightarrow x^2y^2 - 3y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow y^2(x^2 - 3) = (x + 2y)^2$ (1).

- Nếu $y = 0 \Rightarrow y = 0$ nên $(0, 0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
- Nếu $y \neq 0$ thì $x^2 - 3$ phải là số chính phương. Giả sử $x^2 - 3 = k^2 (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x - k)(x + k) = 3 = 1 \cdot 3 = -1 \cdot (-3)$.

Vì $x - k < x + k$ suy ra

$$\left[\begin{cases} x - k = 1 \\ x + k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 2 \\ k = 1 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x - k = 1 \\ x + k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = -2 \\ k = 1 \end{cases} \right. \right.$$

Lần lượt thay $x = 2$ và $x = -2$ vào phương trình (1) ta được $y = -2$ và $y = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên: $(0, 0)$, $(2, -2)$ và $(-2, 2)$

□

————— **HẾT** —————

26 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC PHÚ THỌ

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải phương trình $x - 20 = 16$.
b) Giải bất phương trình $2x - 3 > 5$.

Lời giải.

- a) Ta có $x - 20 = 16 \Leftrightarrow x = 36$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 36$.
b) Ta có $2x - 3 > 5 \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$. Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 4$.

□

Câu 2. Cho hàm số $y = (2m + 1)x + m + 4$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d).

- a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 2)$.
b) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) có phương trình $y = 5x + 1$.
c) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

- a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 2)$ khi và chỉ khi

$$2 = (2m + 1).(-1) + m + 4 \Leftrightarrow m = 1.$$

- b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) : $y = 5x + 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m + 1 = 5 \\ m + 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

- c) Gọi $B(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (d) đi qua. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} y_0 &= (2m + 1)x_0 + m + 4, \forall m \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (2x_0 + 1)m + x_0 - y_0 + 4 &= 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 + 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy điểm cố định cần tìm $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 5 = 0$ (m là tham số).

- a) Giải phương trình với $m = 1$.
b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + 3x_2 = 7$.

Lời giải.

a) Với $m = 1$ ta có phương trình $x^2 - 2x - 4 = 0$.

Có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-4) = 5 > 0$, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ và $x_2 = 1 + \sqrt{5}$.

b) Phương trình $x^2 - 2x + m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6. (*)$$

Theo Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = m - 5 & (2) \end{cases}$$

Theo bài ra ta có

$$2x_1 + 3x_2 = 7 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) + x_2 = 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + x_2 = 7 \Leftrightarrow x_2 = 3.$$

Thay vào (1) ta được $x_1 = -1$, thay vào (2) ta được $m - 5 = -3 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn (*)).
Vậy $m = 2$.

□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi H là trực tâm và I, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ đỉnh A, B của tam giác ABC ($I \in BC, K \in AC$). Gọi M là trung điểm của BC , kẻ HJ vuông góc với AM tại J .

- Chứng minh rằng bốn điểm A, H, J, K cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{IHK} = \widehat{MJK}$.
- Chứng minh rằng tam giác AJK và tam giác ACM đồng dạng.
- Chứng minh rằng $MJ \cdot MA < R^2$.

Lời giải.

a)

Vì $HJ \perp AM, BK \perp AC$ suy ra $\widehat{AJH} = \widehat{AKH} = 90^\circ$, mặt khác hai góc này cùng chắn đoạn AH nên tứ giác $AHJK$ nội tiếp đường tròn, hay bốn điểm A, H, J, K cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó suy ra $\widehat{AJK} = \widehat{AHK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AK}$).

Mà $\widehat{AJL} + \widehat{KJM} = 180^\circ$ và $\widehat{AHK} + \widehat{IHK} = 180^\circ$ (các góc ở vị trí kề bù), suy ra $\widehat{IHK} = \widehat{MJK}$.

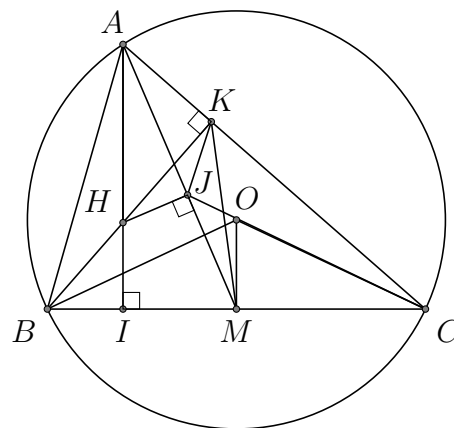
- b) Theo ý a) ta có $\widehat{AJK} = \widehat{AHK}$, mà $\widehat{AHK} = \widehat{BHI}$ (đối đỉnh), nên ta có $\widehat{AJK} = \widehat{BHI}$.
Mặt khác, $\widehat{BHI} = \widehat{BCA}$ (cùng phụ với $\widehat{HBI}$) nên $\widehat{AJK} = \widehat{BCA}$.

Hai tam giác AJK và ACM có chung góc $\widehat{CAM}$ và $\widehat{AJK} = \widehat{BCA}$ nên $\triangle AJK \sim \triangle ACM$ (g-g).

- c) Sử dụng kết quả ý b) ta có

$$\widehat{ACB} + \widehat{MJK} = \widehat{AJK} + \widehat{MJK} = 180^\circ$$

Từ đó tứ giác $MJKC$ nội tiếp được trong một đường tròn, suy ra $\widehat{MJC} = \widehat{MKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{MC}$). (1)



Mặt khác tam giác BKC vuông tại K , có KM là đường trung tuyến nên $KM = MC = MB$, hay tam giác MKC cân tại M , suy ra $\widehat{MKC} = \widehat{MCK}$. (2)

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{MJC} = \widehat{MCA}$.

Xét hai tam giác MJC và MCA : có $\widehat{JMC}$ chung, $\widehat{MJC} = \widehat{MCA}$ nên $\triangle MJC \sim \triangle MCA$ (g-g), suy ra $\frac{MJ}{MC} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MJ.MA = MC^2$.

Mà $MC = \frac{BC}{2} < \frac{d}{2} = R$ (với d là đường kính), từ đó suy ra $MJ.MA = MC^2 < R^2$.

□

Câu 5. Cho ba số dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + \frac{18}{ab + bc + ca}.$$

Lời giải.

Do trong ba số $(a-1), (b-1), (c-1)$ luôn có hai số có tích không âm. Nên không giảm tính tổng quát, ta giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$.

Từ đó ta có

$$2c(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2abc \geq 2bc + 2ca - 2c. \quad (1)$$

Mặt khác

$$(a-b)^2 + (c-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2c + 2ab. \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \geq 2ab + 2bc + 2ca - 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Cuối cùng ta có

$$P \geq 2(ab + bc + ca) + \frac{18}{ab + bc + ca} \geq 2\sqrt{2(ab + bc + ca) \cdot \frac{18}{ab + bc + ca}} - 1 = 11.$$

Vậy $P_{\min} = 11$ khi $a = b = c = 1$.

□

————— **HẾT** —————

27 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC QUẢNG NAM

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Không dùng máy tính bỏ túi, hãy rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{26} + 5\sqrt{2})\sqrt{19 - 5\sqrt{13}}$.
- b) Cho biểu thức $B = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{3x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
Rút gọn B và tìm x để $B = 1$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2}(\sqrt{13} + 5)\sqrt{19 - 5\sqrt{13}} = (\sqrt{13} + 5)\sqrt{38 - 10\sqrt{13}} \\ &= (\sqrt{13} + 5)\sqrt{(5 - \sqrt{13})^2} = (\sqrt{13} + 5)(5 - \sqrt{13}) = 25 - 13 = 12. \end{aligned}$$

- b) Điều kiện: $(x > 0)$, ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - (3\sqrt{x} - 1) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - (3\sqrt{x} - 1) \\ &= x - \sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 1 = x - 4\sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Để } B = 1 \text{ thì } x^2 - 4\sqrt{x} = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 4 \end{cases}.$$

□

Câu 2.

- a) Cho parabol $(P): y = ax^2$. Tìm hệ số a để đường thẳng $(d): y = 2$ cắt (P) tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB vuông (với O là gốc tọa độ).
- b) Tìm tham số m để phương trình $x^2 + (m - 2)x - (m - 1)(2m - 3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt sao cho nghiệm này bằng bình phương nghiệm kia.

Lời giải.

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$ax^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{a}$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $a > 0$. Khi đó, $A\left(\sqrt{\frac{2}{a}}, 2\right)$ và $B\left(-\sqrt{\frac{2}{a}}, 2\right)$.

Do A, B đối xứng qua Oy nên để tam giác OAB vuông tại O thì $\sqrt{\frac{2}{a}} = 2$ suy ra $a = \frac{1}{2}$.

- b) Ta có $\Delta = (3m - 4)^2$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m \neq \frac{4}{3}$.

Hai nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = 3 - 2m \end{cases}$. Ta có hai trường hợp sau

TH1. $x_1 = x_2^2$

Suy ra, $m - 1 = (3 - 2m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 13m + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$.

TH2. $x_2 = x_1^2$

Suy ra, $3 - 2m = (m - 1)^2 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Vậy, $m \in \left\{2; \frac{5}{4}; \pm\sqrt{2}\right\}$.

□

Câu 3.

a) Giải phương trình $(\sqrt{x-3} + 2)^2 + x = 13$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{3}{y+1} = -2 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 7. \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \geq 3$. Phương trình tương đương với

$$2x + 4\sqrt{x-3} - 12 = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) + 4\sqrt{x-3} - 6 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x-3} \geq 0$ phương trình trở thành $2t^2 + 4t - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3(\text{loại}) \end{cases}$.

Với $t = 1$ suy ra $x = 4$. Vậy $\mathcal{S} = \{4\}$.

b) Đặt $u = \frac{1}{x-2}; v = \frac{1}{y+1}$, hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u + 3v = -2 \\ 5u - 2v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}$.

Nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; -2)$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC ($AB > AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm I , gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn I với các cạnh BC, CA và AB . Các đường thẳng DE, DF lần lượt cắt tia AI tại K và L , gọi H là đường cao hạ từ A xuống BC .

a) Giả sử số đo góc $\widehat{BAC} = \alpha$, hãy tính số đo góc $\widehat{BIC}$ theo α .

b) Chứng minh $BK \parallel EF$.

c) Gọi M là trung điểm của BC , chứng minh tứ giác $KMLH$ nội tiếp.

Lời giải.

a) Ta tìm được $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BIK} &= 180^\circ - \widehat{AIB} \\ &= 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2} \\ &= \widehat{CDE} = \widehat{BDK}.\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $BIDK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BKI} = 90^\circ$ suy ra $BK \parallel EF$.

c) Chứng minh được $AHKB$ và $ALHC$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra,

$$\widehat{LHM} = \widehat{LAC} = \widehat{LAB} = \widehat{MHK} (1)$$

BK, CL cắt AC, AB tại P, Q suy ra K, L lần lượt là trung điểm của BP, CQ . Suy ra $MK = \frac{CP}{2} = \frac{BQ}{2} = ML (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MLHK$ nội tiếp.

□

Câu 5. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1$ và $x + y = 3xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 4xy$.

Lời giải.

Ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ suy ra $3xy \geq 2\sqrt{xy}$ suy ra $xy \geq \frac{4}{9}$.

Do $x, y \leq 1$ suy ra $(1-x)(1-y) \geq 0$ suy ra $x + y - xy \leq 1 \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{2}$.

Đặt $xy = t \left(\frac{4}{9} \leq t \leq \frac{1}{2} \right)$ suy ra $P = 9t^2 - 6t$.

Ta có

$$P = (9t - 4) \left(t - \frac{2}{9} \right) - \frac{8}{9}$$

Do $t \geq \frac{4}{9}$ nên $P \geq -\frac{8}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{4}{9}$.

Vậy $\min P = -\frac{8}{9}$ khi $\begin{cases} xy = \frac{4}{9} \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Ta có

$$P = 9t^2 - 6t = \left(9t - \frac{3}{2} \right) \left(t - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{4}$$

Do $\frac{4}{9} \leq t \leq \frac{1}{2}$ nên $\left(9t - \frac{3}{2} \right) \left(t - \frac{1}{2} \right) \leq 0$. Suy ra $P \leq -\frac{3}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ \left(1; \frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \right\}$.

Vậy $\max P = -\frac{3}{4}$.

□

————— HẾT —————

28 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC QUẢNG NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt{12} - \sqrt{3}$.

b) $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

2. Giải phương trình $x^2 - x - 2 = 0$.

Lời giải.

1. Rút gọn biểu thức:

a) Ta có : $A = \sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 2\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

2. Giải phương trình $x^2 - x - 2 = 0$. Ta có: $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$ và $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$

□

Câu 2.

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = -3 \end{cases}$.

2. Tìm giá trị của m để hai đường thẳng $(d_1) : mx + y = 1$ và $(d_2) : x - my = m + 6$ cắt nhau tại một điểm M thuộc đường thẳng $(d) : x + 2y = 8$.

Lời giải.

a) Ta có : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -6 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1; -2)$

b) Để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau thì: $\frac{m}{1} \neq \frac{1}{-m} \Leftrightarrow m^2 \neq -1$ luôn thỏa mãn với $\forall m$

Với $(d) : x + 2y = 8 \Rightarrow x = 8 - 2y$ (1)

Với $(d_1) : mx + y = 1 \Rightarrow m = \frac{1-y}{x}$ (2)

Với $(d_2) : x - my = m + 6 \Rightarrow m = \frac{x-6}{1+y}$

Do đó : $\frac{1-y}{x} = \frac{x-6}{1+y} \Leftrightarrow 1 - y^2 = x^2 - 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 1 = 0$ (3)

Thay (1) vào (3) ta có phương trình: $5y^2 - 20y + 15 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = 3$.

Với $y = 1 \Rightarrow x = 6$ thay vào (2) ta được $m = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $y = 3 \Rightarrow x = 2$ thay vào (2) ta được $m = -1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với $m = 0$ và $m = -1$ thì hai đường thẳng $(d_1) : mx + y = 1$ và $(d_2) : x - my = m + 6$ cắt nhau tại một điểm M thuộc đường thẳng $(d) : x + 2y = 8$.

□

Câu 3. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Theo kế hoạch một người công nhân phải hoàn thành 84 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật nên thực tế mỗi giờ người đó đã làm được nhiều hơn 2 sản phẩm so với số sản phẩm được làm trong một giờ theo kế hoạch. Vì vậy người đó hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch mỗi giờ người công nhân phải làm bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.

Gọi x là số sản phẩm mà người công nhân phải làm mỗi giờ theo kế hoạch (sản phẩm, $x \in \mathbb{N}, 0 < x < 84$).

Theo bài ra:

Số sản phẩm mà người công nhân đã hoàn thành theo thực tế là : $x + 2$ (sản phẩm).

Thời gian mà người công nhân phải hoàn thành theo kế hoạch là: $\frac{84}{x}$ (h).

Thời gian hoàn thành theo thực tế là : $\frac{84}{x+2}$ (h)

Do người công nhân hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1h nên ta có phương trình:

$$\frac{84}{x} - \frac{84}{x+2} = 1$$

Giải phương trình trên ta được : $x_1 = 12$ (thỏa mãn điều kiện)

và $x_2 = -14$ (không thỏa điều kiện).

Vậy theo kế hoạch mỗi giờ người công nhân phải làm 12 sản phẩm.

□

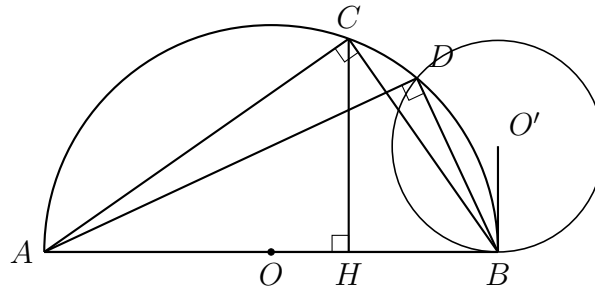
Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , trên nửa đường tròn lấy điểm C (C không trùng với A, B). Gọi H là hình chiếu của C trên đường thẳng AB . Trên cung CD lấy điểm D (D khác C, B), hai đường thẳng AB và CH cắt nhau tại E .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BDEH$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AC^2 = AC.AE$.

c) Gọi (O') là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với AB tại B . Đường tròn (O') cắt CB tại F (khác B). Chứng minh rằng $EF \parallel AB$.

Lời giải.



- a) Xét đường tròn $\widehat{ADH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{EDB} = 90^\circ$
 Từ giả thiết suy ra : $\widehat{CHB} = 90^\circ$ hay $\widehat{EHB} = 90^\circ$
 Xét tứ giác $BDEH$ có $\widehat{EDB} + \widehat{EHB} = 180^\circ$ nên nội tiếp được đường tròn.
- b) Xét $\triangle AEH$ và $\triangle ABD$ có góc A chung, $\widehat{AHE} = \widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle ABD (g - g)$,
 suy ra: $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} \Leftrightarrow AD \cdot AE = AH \cdot AB$ (1)
 Xét tam giác vuông AEH có CH là đường cao, ta có: $AC^2 = AH \cdot AB$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $AC^2 = AC \cdot AE$ (điều phải chứng minh)
- c) Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{BDF}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung), $\widehat{BDF} + \widehat{FDA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{FDA} = 90^\circ$
 Mặt khác : $\widehat{ABC} = \widehat{ECH}$ (cùng phụ nhau với $\widehat{HCB}$) $\Rightarrow \widehat{ACH} + \widehat{FDA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{FDA}$ hay $\widehat{ECF} = \widehat{FDE}$, suy ra tứ giác $ECDF$ nội tiếp.
 Lại có: $\widehat{DEF} = \widehat{DCF}$ hay $\widehat{DEF} = \widehat{DCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FD) mà $\widehat{DCB} = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DEF} = \widehat{DAB}$ (hai góc đồng vị), nên $EF \parallel AB$

□

Câu 5. Với x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + xy = 15$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải.

vì x, y là các số thực dương nên theo BĐT Cô si ta có:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \text{ dấu } = \text{ xảy ra khi } x = y \text{ hay } x + x + x^2 = 15 \Rightarrow x = y = 3$$

Theo giả thiết: $x + y + xy = 15 \Rightarrow xy = 15 - (x + y)$. Do đó:

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \\ &= (x + y)^2 - 30 + 2(x + y) \\ &\geq (2\sqrt{xy})^2 - 30 + 2.2\sqrt{xy} \end{aligned}$$

Dấu = xảy ra khi $x = y = 3$.

Vậy $P_{\min} = 4.3^2 - 30 + 4.3 = 18$ khi $x = y = 3$

□

———— HẾT ————

29 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC SƠN LA

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{x}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ (với $x > 0; x \neq 1$).

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm giá trị của x để $P > \frac{1}{2}$.

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \\ &= \frac{x - 1}{x}. \end{aligned}$$

- Với $x > 0; x \neq 1$ thì $P > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x - 1) > x \Leftrightarrow x > 2$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số).

- Giải phương trình trên khi $m = 6$.
- Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 3$.

Lời giải.

- Với $m = 6$ phương trình trở thành $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-(-5) + 1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-(-5) - 1}{2} = 2 \end{cases}$$

- Phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (-5)^2 - 4.1.m \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4}.$$

Theo định lý Vi - ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = m \end{cases} \quad (1)$$

Ta lại có $|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 9$. (2)

Thay (1) vào (2) ta có phương trình $5^2 - 4m = 9 \Leftrightarrow m = 4$.

Đối chiếu với điều kiện $m \leq \frac{25}{4}$. Ta có $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 3. Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc mỗi ô tô?

Lời giải.

Gọi vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai theo thứ tự là : $v_1; v_2 (v_1 > 0; v_2 > 0)$

Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên ta có phương trình thứ nhất là:

$$v_1 - v_2 = 10 \quad (1)$$

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là $t_1 = \frac{120}{v_1}$ (h)

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là $t_2 = \frac{120}{v_2}$ (h)

Vì ô tô thứ nhất đến trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ nên ta có phương trình thứ hai:

$$t_2 - t_1 = 0,4 \Leftrightarrow \frac{120}{v_2} - \frac{120}{v_1} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{120(v_1 - v_2)}{v_1 v_2} = 0,4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 10 \\ \frac{120(v_1 - v_2)}{v_1 v_2} = 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + 10 \\ v_2(v_2 + 10) = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + 10 \\ v_2^2 + 10v_2 - 3000 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + 10 \\ \begin{cases} v_2 = 50 & (\text{thỏa mãn}) \\ v_2 = -55 & (\text{không thỏa mãn}) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 60 \\ v_2 = 50 \end{cases}.$$

□

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$; AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn $(O; R)$ cắt các đường thẳng AC ; AD thứ tự tại E và F .

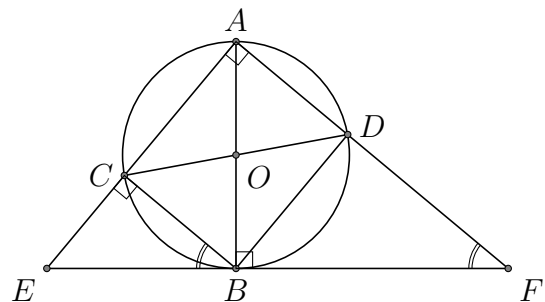
- Chứng minh rằng tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh $\triangle ACD \sim \triangle CBE$.
- Chứng minh rứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.
- Gọi S, S_1, S_2 thứ tự là diện tích của $\triangle AEF, \triangle BCE$ và $\triangle BDF$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}.$$

Lời giải.

a)

Xét tứ giác $ACBD$ có: $AB = CD$;
 $OA = OB = OC = OD$. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.



b) Tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật nên ta có

$$\widehat{CAD} = \widehat{BCE} = 90^\circ \quad (3)$$

Lại có $\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{BC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) và $\widehat{ACD} = \frac{1}{2} \text{ số } \widehat{AD}$ (góc nội tiếp)

Mà $BC = AD$ (do BC và AD là hai cạnh của hình chữ nhật). Suy ra

$$\widehat{CBE} = \widehat{ACD} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle ACD \sim \triangle CBE$.

c) Vì $ACBD$ là hình chữ nhật nên $CB \parallel AF$, suy ra

$$\widehat{CBE} = \widehat{DFE} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{DFE}$ do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp đường tròn.

d) Do $CB \parallel AF$ nên ta có $\triangle CBE \sim \triangle AFE$, suy ra $\frac{S_1}{S} = \frac{EB^2}{EF^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{EB}{EF}$.

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{BF}{EF}$.

Từ đó suy ra $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = S$.

□

Câu 5. Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 2\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Lời giải.

Ta có $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Mặt khác ta lại có $a+b \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{4}{a+b} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow P \geq \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \\ a + b \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a = b = \sqrt{2}.$

Vậy $\min P = \sqrt{2}$ khi $a = b = \sqrt{2}$.

□

———— HẾT ————

30 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC THÁI BÌNH**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Không dùng máy tính, hãy tính $A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$.
- b) Chứng minh rằng $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{3}{\sqrt{x} - 3}\right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{x + 9} = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

Lời giải.

- a) $A = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = 2$
- b) $VT = \frac{x - 3\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 9}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{x + 9} = \frac{1}{\sqrt{x} - 3} = VP$

□

Câu 2. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2(m - 1)x + m^2 + 2m$ (m là tham số).

- a) Tìm m để đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 3)$.
- b) Chứng minh rằng parabol (P) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 là hoành độ của hai điểm A, B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 > 2016$.

Lời giải.

- a) Đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 3) \Leftrightarrow 2(m - 1) + m^2 + 2m = 3 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$
- b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$x^2 = 2(m - 1)x + m^2 + 2m \Leftrightarrow x^2 - 2(m - 1)x - m^2 - 2m = 0$$

Ta có $\Delta' = 2m^2 + 1 > 0$ với $\forall m$ nên (P) luôn cắt d tại hai điểm phân biệt.

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1x_2 = -m^2 - 2m \end{cases}$. Theo đề bài

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 > 2016 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 > 2016 \Leftrightarrow 4(m - 1)^2 - 4m^2 - 8m - 2016 > 0 \\ &\Leftrightarrow m < -\frac{503}{4} \end{aligned}$$

□

Câu 3.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases}$
- b) Cho tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 15 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 3 cm. Tìm độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Lời giải.

- a) Ta có $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 4 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

- b) Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ nhất là x (cm, $0 < x < 12$)

Độ dài cạnh góc vuông còn lại là $x + 3$ cm.

$$\text{Theo định lí Pitago } x^2 + (x + 3)^2 = 15^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 108 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ (TM)} \\ x = -12 \text{ (Loại)} \end{cases}$$

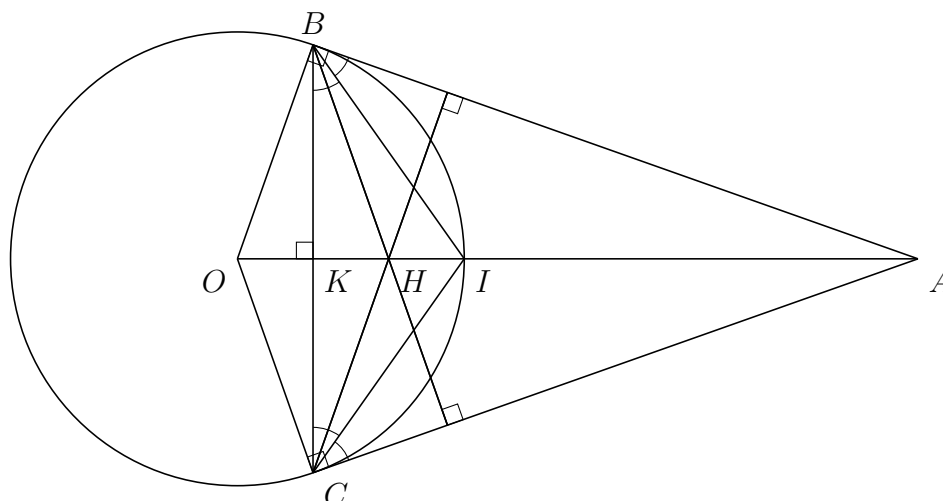
Vậy độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là 9 cm và 12 cm.

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm).

- Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
- Gọi I là giao điểm của đoạn OA với đường tròn (O). Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- Cho $OB = 3$ cm, $OA = 5$ cm. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải.



- a) Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) (tại B, C) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ \Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO .

- b) Vì $\begin{cases} OB \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OB \parallel CH$ (1). Tương tự $OC \parallel BH$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $BOCH$ là hình bình hành. Mà $OB = OC$ nên $BOCH$ là hình thoi.

- c) Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$. Vì I là giao điểm của đoạn AO với (O) nên I là điểm chính giữa của cung (nhỏ) $\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{IBC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BC}$ (3) (tính chất góc nội tiếp).

Vì I là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ và AB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ABI} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BC}$ (4).

Từ (3) và (4) ta suy ra BI là tia phân giác $\widehat{ABC}$, do vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- d) Gọi K là giao điểm của OA và $BC \Rightarrow K$ là trung điểm của BC và $BK \perp AO$.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác AOB vuông tại B : $AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = 4$ cm.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác AOB vuông tại B :

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{25}{144} \Rightarrow BK = \frac{12}{5} \Rightarrow AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \frac{16}{5} \text{ cm.}$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot BC = \frac{192}{25} \text{ cm}^2.$$

□

Câu 5. Giải phương trình $x^3 + (3x^2 - 4x - 4)\sqrt{x+1} = 0$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Đặt $y = \sqrt{x+1}$ ($y \geq 0$) $\Rightarrow x = y^2 - 1$. Khi đó phương trình trở thành $x^3 + 3x^2y - 4y^3 = 0$.

- Nếu $y = 0$ thì $x = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $y \neq 0$, chia hai vế cho y^3 ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \end{cases}$.

$$\oplus \text{ Với } x = y \Rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (vì } y \geq 0) \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\oplus \text{ Với } x = -2y \Rightarrow y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2} - 1 \text{ (vì } y \geq 0) \Rightarrow x = 2 - 2\sqrt{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2 - 2\sqrt{2} \right\}$.

□

———— HẾT ————

31 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC THÁI NGUYÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho hàm số $y = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 3$ có đồ thị (d) . Hàm số đã cho là đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$? Giải thích? Tìm tọa độ giao điểm của (d) với trục tung.

Lời giải.

Hàm số $y = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì $a = \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$.

Cho $x = 0$ ta có $y = 3$ suy ra tọa độ giao điểm của (d) với trục tung là $(0; 3)$. □

Câu 2. Không dùng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức: $A = (2 + 3\sqrt{2})^2 - \sqrt{288}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (2 + 3\sqrt{2})^2 - \sqrt{288} = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 - \sqrt{144 \cdot 2} \\ &= 4 + 12\sqrt{2} + 18 - 12\sqrt{2} \\ &= 22. \end{aligned}$$

□

Câu 3. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x} - 4}{x - 2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x} - 2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$. Hãy rút gọn B và tính giá trị của B khi $x = 3 + \sqrt{8}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} + \frac{3}{\sqrt{x} - 2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{x} - (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \right) \\ &= \frac{4(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{4} \\ &= \sqrt{x} - 1 \end{aligned}$$

□

Với $x = 3 + \sqrt{8} = (\sqrt{2} + 1)^2$ ta có $\sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$. Do đó $B = \sqrt{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}$.

Câu 4. Xác định các hệ số a và b biết hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = 4 \\ bx - 2y = -2 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y) = (2; -1)$.

Lời giải.

Vì hệ có nghiệm $(2; -1)$ nên thế $x = 2; y = -1$ vào hệ ta có:

$$\begin{cases} 2a + b(-1) = 4 \\ 2b - 2(-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 4 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

□

Với $a = 1; b = -2$ ta có hệ $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; -1)$ thì $a = 1$ và $b = -2$.

Câu 5. Không dùng máy tính cầm tay hãy giải phương trình:

$$x^2 + 6x - 2016 = 0.$$

Lời giải.

Ta có $a = 1$, $b = 6$ ($b' = 3$), $c = -2016$.

$$\Delta' = 3^2 - 1 \cdot (-2016) = 2025 > 0, \sqrt{\Delta'} = 45.$$

Phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -3 + 45 = 42$; $x_2 = -3 - 45 = -48$. □

Câu 6. Cho phương trình $x^2 - 2mx + (m^2 - 4) = 0$ (1), m là tham số.

- Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 26$.

Lời giải.

- Ta có $\Delta = m^2 - (m^2 - 4) = 4 > 0, \forall m$. Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m .

- Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 4 \end{cases}.$$

$$\text{Mà } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2m)^2 - 2(m^2 - 4) = 2m^2 + 8.$$

$$\text{Theo đề bài } x_1^2 + x_2^2 = 26 \Rightarrow 2m^2 + 8 = 26 \Rightarrow m = \pm 3.$$

Thử lại: Với $m = 3$, ta có phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 5 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 26$, thỏa mãn đề bài.

Tương tự với $m = -3$ cũng thỏa mãn đề bài. Vậy $m = \pm 3$. □

Câu 7. Không tính từng giá trị cụ thể, hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác $\cos 20^\circ, \sin 38^\circ, \cos 55^\circ, \tan 48^\circ, \sin 88^\circ$ theo thứ tự tăng dần, giải thích?

Lời giải.

Ta có biến đổi sau: $\sin 38^\circ = \cos 52^\circ, \sin 88^\circ = \cos 2^\circ$.

Với $0 < \alpha < 90^\circ$, nếu α càng lớn thì $\cos \alpha$ càng nhỏ và $\cos \alpha < 1$ nên $0 < \cos 55^\circ < \cos 52^\circ < \cos 20^\circ < \cos 2^\circ < 1$.

Nếu $45^\circ \leq \beta < 90^\circ$ thì $\tan \beta \geq 1 \Rightarrow \tan 48^\circ > 1$.

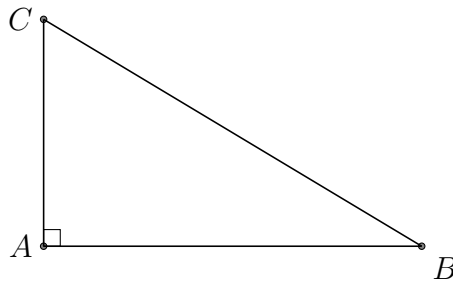
Do đó ta sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

$$\cos 55^\circ, \sin 38^\circ, \cos 20^\circ, \sin 88^\circ, \tan 48^\circ$$

□

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\sin B = \frac{1}{3}$. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C .

Lời giải.



Ta có $\sin B = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{3}$.

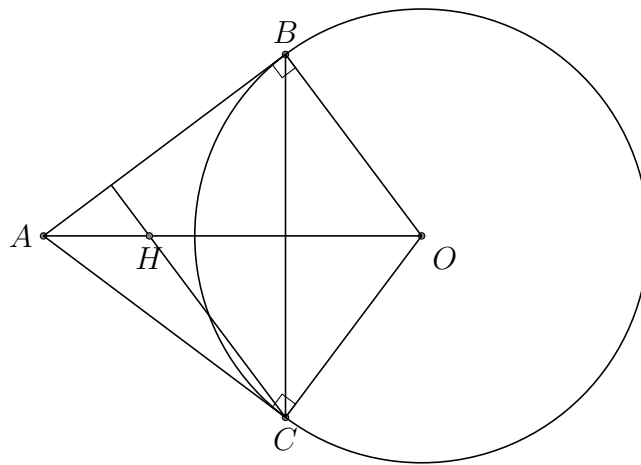
Suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

hay $\cot C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, suy ra $\tan C = 2\sqrt{2}$.

$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \tan C \cdot \cos C = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ □

Câu 9. Cho đường tròn tâm O và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Qua C kẻ một đường thẳng song song với OB , cắt OA tại H . Chứng minh rằng tứ giác $ABOC$ nội tiếp được trong một đường tròn và H là trực tâm của tam giác ABC .

Lời giải.



Xét tứ giác $ABOC$ có $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ (Theo tính chất tiếp tuyến).

Suy ra tứ giác $ABOC$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Ta có $\begin{cases} CH \parallel OB \\ OB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \perp AB$.

Trong tam giác ABC có: $\begin{cases} CH \perp AB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC . □

Câu 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại I .

a) Chứng minh rằng: $IA \cdot DC = ID \cdot AB$.

b) Tính tổng $AB^2 + CD^2$ theo R .

Lời giải.

32 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC THANH HÓA-ĐỀ A

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

1) Giải các phương trình sau:

a) $x - 5 = 0$.

b) $x^2 - 4x + 3 = 0$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 4. \end{cases}$$

Lời giải.

1)

a) $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{5\}$.

b) $x^2 - 4x + 3 = 0$. Có $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = 1, x = 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1; 3\}$.

2)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3.1 + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

□

Câu 2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{2(x - 2\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$ (với $x > 0$ và $x \neq 1$).

1) Rút gọn biểu thức A .

2) Tìm các số nguyên x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Lời giải.

1) Có

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \right] : \frac{2(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{2(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

2) $A = \frac{\sqrt{x} - 1 + 2}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$.

Vì x nguyên nên ta có A nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1$ là ước của 2.

Mặt khác $x > 0, x \neq 1$ nên $\sqrt{x} - 1 > -1$. Do đó

Vậy $x = 4$ hoặc $x = 9$ thỏa mãn đề bài.

□

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : y = mx + 1$ và parabol $(P) : y = 2x^2$.

- 1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 3)$.
- 2) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
Hãy tính giá trị của biểu thức $T = x_1x_2 + y_1y_2$.

Lời giải.

- 1) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 3) \Leftrightarrow 3 = m.1 + 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$.

- 2) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$2x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$$

Có $\Delta = m^2 - 4.2.(-1) = m^2 + 8$. Vì $m^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow m^2 + 8 \geq 8 > 0, \forall m$.

Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m \Rightarrow (d)$ luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \forall m$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) và $y_1 = 2x_1^2, y_2 = 2x_2^2$.

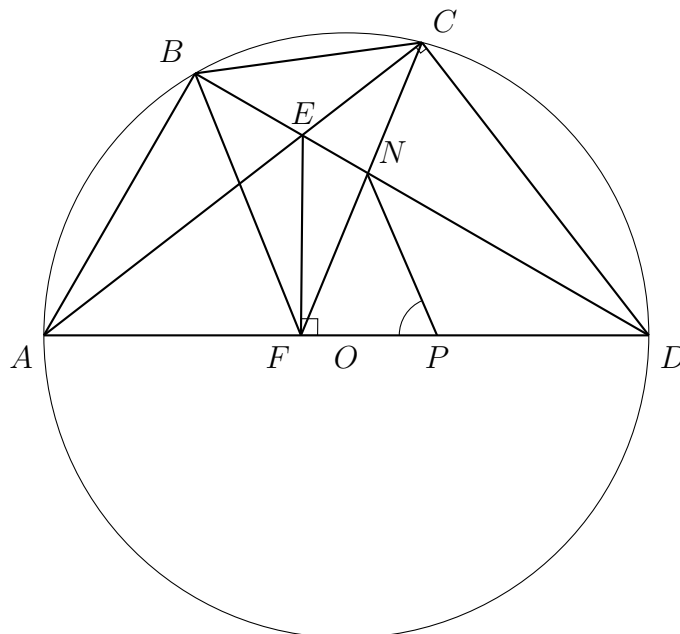
Theo định lý Viét ta có: $x_1x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow T = x_1x_2 + 2x_1^2.2x_2^2 = x_1x_2 + 4(x_1x_2)^2 = \frac{1}{2}$

□

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E . Gọi F là điểm thuộc đường thẳng AD sao cho EF vuông góc với AD . Đường thẳng CF cắt đường tròn đường kính AD tại điểm thứ hai là M . Gọi N là giao điểm của BD và CF . Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác $CEFD$ nội tiếp đường tròn.
- 2) FA là đường phân giác của góc $\widehat{BFM}$.
- 3) $BD \cdot NE = BE \cdot ND$.

Lời giải.



- 1) Có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), hay $\widehat{ECD} = 90^\circ$.

Mặt khác, $EF \perp AD$ nên $\widehat{EFD} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{ECD} + \widehat{EFD} = 180^\circ$, do đó $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

- 2) Vì $CEFD$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{CFD} = \widehat{CED}$ (do hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

(1)

Chứng minh tương tự có tứ giác $ABEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BFA} = \widehat{BEA}$ (do hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB). (2)

Có $\widehat{BEA} = \widehat{CED}$, $\widehat{AFM} = \widehat{CFD}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{BFA} = \widehat{AFM}$, do đó FA là tia phân giác của $\widehat{BFM}$.

3) Vẽ $NP \parallel BF$ ($P \in AD$).

Ta có $\widehat{NPF} = \widehat{BFA}$ (đồng vị); $\widehat{BFA} = \widehat{NFP} \Rightarrow \widehat{NPF} = \widehat{NFP} \Rightarrow \triangle NFD$ cân tại $N \Rightarrow NP = NF$.

Vì $NP \parallel BF$ nên $\frac{NP}{BF} = \frac{DN}{DB} \Rightarrow \frac{NF}{BF} = \frac{DN}{DB}$. (4)

Vì $\widehat{BFA} = \widehat{NFP}$ nên $\widehat{EFB} = \widehat{EFN}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

Suy ra FE là phân giác $\widehat{BFN}$ của $\triangle BFN$. Theo định lý đường phân giác ta có $\frac{NF}{BF} = \frac{NE}{BE}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{DN}{DB} = \frac{NE}{BE} \Rightarrow BD \cdot NE = BE \cdot DN$ (đpcm). □

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a^2 + 2b^2 \leq 3c^2$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{3}{c}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số, ta có

$$(a + 2b)^2 = (1 \cdot a + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}b)^2 \leq (1 + 2)(a^2 + 2b^2) \leq 3 \cdot 3c^2 = 9c^2 \Rightarrow a + 2b \leq 3c.$$

Với mọi $x, y, z > 0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{a + b + c} = \frac{9}{a + 2b} \geq \frac{9}{3c} = \frac{3}{c}$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. □

————— **HẾT** —————

33 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC THANH HÓA, ĐỀ B

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1) Giải các phương trình sau:

a) $x - 6 = 0$.

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2. \end{cases}$$

Lời giải.

1)

a) $x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{6\}$.

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$. Có $a + b + c = 1 - 5 + 4 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = 1, x = 4$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1; 4\}$.

2)
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3.1 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(1; -1)$.

□

Câu 2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{y\sqrt{y} - 1}{y - \sqrt{y}} - \frac{y\sqrt{y} + 1}{y + \sqrt{y}} \right) : \frac{2(y - 2\sqrt{y} + 1)}{y - 1}$ (với $y > 0$ và $y \neq 1$).

1) Rút gọn biểu thức B .

2) Tìm các số nguyên y để biểu thức B có giá trị nguyên.

Lời giải.

1) Có

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{(\sqrt{y} - 1)(y + \sqrt{y} + 1)}{\sqrt{y}(\sqrt{y} - 1)} - \frac{(\sqrt{y} + 1)(y - \sqrt{y} + 1)}{\sqrt{y}(\sqrt{y} + 1)} \right] : \frac{2(\sqrt{y} - 1)^2}{(\sqrt{y} - 1)(\sqrt{y} + 1)} \\ &= \left(\frac{y + \sqrt{y} + 1}{\sqrt{y}} - \frac{y - \sqrt{y} + 1}{\sqrt{y}} \right) : \frac{2(\sqrt{y} - 1)}{(\sqrt{y} + 1)} \\ &= \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y} + 1}{2(\sqrt{y} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{y} + 1}{\sqrt{y} - 1}. \end{aligned}$$

2) $B = \frac{\sqrt{y} - 1 + 2}{\sqrt{y} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{y} - 1}$.

Vì y nguyên nên ta có B nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{y} - 1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{y} - 1$ là ước của 2.

Mặt khác $y > 0, y \neq 1$ nên $\sqrt{y} - 1 > -1$. Do đó

Vậy $y = 4$ hoặc $y = 9$ thỏa mãn đề bài.

□

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : y = nx + 1$ và parabol $(P) : y = 2x^2$.

- 1) Tìm n để đường thẳng (d) đi qua điểm $B(1; 3)$.
- 2) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.
Hãy tính giá trị của biểu thức $S = x_1x_2 + y_1y_2$.

Lời giải.

- 1) Đường thẳng (d) đi qua điểm $B(1; 3) \Leftrightarrow 3 = n.1 + 1 \Leftrightarrow n = 2$.

Vậy $n = 2$.

- 2) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$2x^2 = nx + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - nx - 1 = 0 \quad (1)$$

Có $\Delta = n^2 - 4.2.(-1) = n^2 + 8$. Vì $n^2 \geq 0, \forall n \Rightarrow n^2 + 8 \geq 8 > 0, \forall n$.

Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $n \Rightarrow (d)$ luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2) \forall n$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) và $y_1 = 2x_1^2, y_2 = 2x_2^2$.

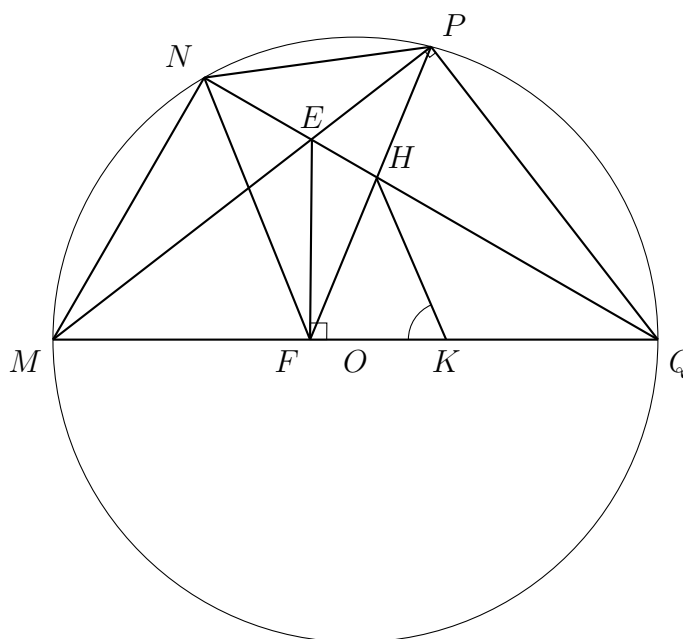
Theo định lý Viét ta có: $x_1x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow S = x_1x_2 + 2x_1^2.2x_2^2 = x_1x_2 + 4(x_1x_2)^2 = \frac{1}{2}$

□

Câu 4. Cho tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn đường kính MQ . Hai đường chéo MP và NQ cắt nhau tại E . Gọi F là điểm thuộc đường thẳng MQ sao cho EF vuông góc với MQ . Đường thẳng PF cắt đường tròn đường kính MQ tại điểm thứ hai là M . Gọi N là giao điểm của NQ và PF . Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác $PEFQ$ nội tiếp đường tròn.
- 2) FM là đường phân giác của góc $\widehat{NFM}$.
- 3) $NQ \cdot NE = NE \cdot NQ$.

Lời giải.



- 1) Có $\widehat{MPQ} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), hay $\widehat{EPQ} = 90^\circ$.
Mặt khác, $EF \perp MQ$ nên $\widehat{EFQ} = 90^\circ$.
Suy ra $\widehat{EPQ} + \widehat{EFQ} = 180^\circ$, do đó $PEFQ$ là tứ giác nội tiếp.

- 2) Vì $PEFQ$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{PFQ} = \widehat{PEQ}$ (do hai góc nội tiếp cùng chắn cung PQ) (1).

Chứng minh tương tự có tứ giác $MNEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NFM} = \widehat{NEM}$ (do hai góc nội tiếp cùng chắn cung MN) (2).

Có $\widehat{NEM} = \widehat{PEQ}$, $\widehat{MFM} = \widehat{PFQ}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{NFM} = \widehat{MFM}$, do đó FM là tia phân giác của $\widehat{NFM}$.

- 3) Vẽ $NK \parallel NF$ ($K \in MQ$).

Ta có $\widehat{NKF} = \widehat{NFM}$ (đồng vị); $\widehat{NFM} = \widehat{NFK} \Rightarrow \widehat{NKF} = \widehat{NFK} \Rightarrow \triangle NFK$ cân tại $N \Rightarrow NK = NF$.

Vì $NK \parallel NF$ nên $\frac{NK}{NF} = \frac{QN}{QN} \Rightarrow \frac{NF}{NF} = \frac{QN}{QN}$ (4)

Vì $\widehat{NFM} = \widehat{NFK}$ nên $\widehat{EFN} = \widehat{EFN}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

Suy ra FE là phân giác $\widehat{NFN}$ của $\triangle NFN$. Theo định lý đường phân giác ta có $\frac{NF}{NF} = \frac{NE}{NE}$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{QN}{QN} = \frac{NE}{NE} \Rightarrow NQ \cdot NE = NE \cdot QN$ (đpcm)

□

Câu 5. Cho m, n, p là các số thực dương thỏa mãn: $m^2 + 2n^2 \leq 3p^2$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \geq \frac{3}{p}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số, ta có

$$(m + 2n)^2 = (1 \cdot m + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}n)^2 \leq (1 + 2)(m^2 + 2n^2) \leq 3 \cdot 3p^2 = 9p^2 \Rightarrow m + 2n \leq 3p.$$

Với mọi $x, y, z > 0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \geq \frac{9}{m + n + p} = \frac{9}{m + 2n} \geq \frac{9}{3p} = \frac{3}{p}$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = n = p$.

□

————— HẾT —————

34 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VĨNH LONG

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Không sử dụng máy tính cầm tay.

a) Tính giá trị biểu thức sau: $A = 2\sqrt{12} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{75}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{6}{3 + \sqrt{3}}$.

Lời giải.

a) $A = 2\sqrt{4 \cdot 3} - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 4\sqrt{25 \cdot 3} = 4\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

b) $B = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{6}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}{\sqrt{3}} + \frac{6(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}$
 $= \sqrt{3} - 2 + \frac{6(3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = \sqrt{3} - 2 + 3 - \sqrt{3} = 1$.

□

Câu 2. Giải các phương trình và hệ phương trình sau

a) $x^2 - 14x + 49 = 0$.

b) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$.

c) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có: $\Delta = 0$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = 7$.

b) Đặt $t = x^2, t \geq 0$, phương trình trở thành $t^2 + 8t - 9 = 0$.

Giải ra được $t = 1$ (nhận); $t = -9$ (loại).

Khi $t = 1$, ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 1$

c) Ta lấy (1) - (2) từng vế ta được: $x = -5$.

Thay $x = -5$ vào (1) ta được: $y = 11$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(-5; 11)$.

□

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$.

a) Vẽ đồ thị parabol (P) .

b) Tìm a và b để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $(0; -1)$ và tiếp xúc với (P) .

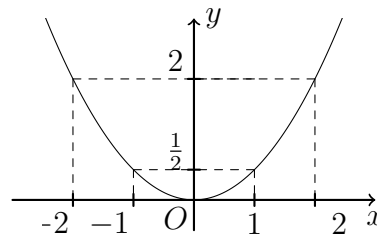
Lời giải.

a) Vẽ Parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$.

Bảng giá trị giữa x và y :

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1/2	0	1/2	8

Vẽ đồ thị:



b) Vì đường thẳng $(d) : y = ax + b$ đi qua điểm $(0; -1)$ nên $b = -1$, ta có $(d) : y = ax - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $\frac{x^2}{2} = ax - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2 = 0$. (*)

Ta có: $\Delta = a^2 - 2$.

Đường thẳng (d) tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$.

Vậy giá trị phải tìm là: $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = -1 \end{cases}, \begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = -1 \end{cases}$.

□

Câu 4. Hai đội công nhân cùng làm xong một công việc trong 12 ngày. Nhưng họ chỉ làm cùng nhau được 6 ngày thì đội II phải đi làm việc khác, còn đội I tiếp tục làm với năng suất tăng gấp đôi so với lúc ban đầu nên đã hoàn thành phần việc còn lại sau đó 7 ngày. Hỏi nếu riêng mỗi đội làm xong công việc đó trong mấy ngày?

Lời giải.

Gọi x là phần công việc của đội I làm trong một ngày ($0 < x < 1$).

y là phần công việc của đội II làm trong một ngày ($0 < y < 1$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} 12x + 12y = 1 \\ 20x + 6y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{28} \\ y = \frac{1}{21} \end{cases}$.

Vậy nếu làm riêng thì đội I làm xong công việc sau 28 ngày, đội II sau 21 ngày.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao ($H \in BC$) có $BC = 10$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài AB , BH và số đo góc C (số đo góc C làm tròn đến độ).

Lời giải.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông ABC . Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 = 10^2 - 8^2 = 36.$$

$$\text{Vậy } AB = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

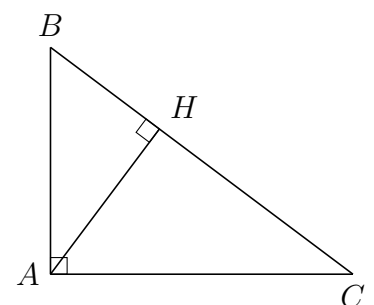
Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông ABC :

$$AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ cm.}$$

Tính $\widehat{C}$:

$$\sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} \Rightarrow \widehat{C} \simeq 37^\circ.$$

□

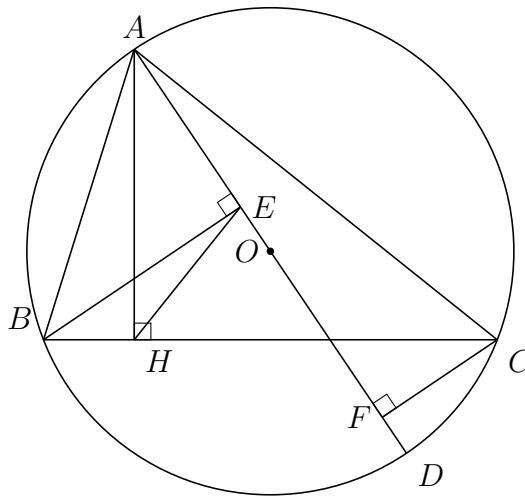


Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O và có $AB < AC$. Vẽ đường kính AD của đường tròn (O) . Kẻ BE và CF vuông góc với AD (E, F thuộc AD). Kẻ AH vuông góc BC (H thuộc BC).

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABHE$ nội tiếp.

b) Chứng minh HE vuông góc với AC .

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{AHB} = 90^\circ$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính AB .

$\widehat{AEB} = 90^\circ$ suy ra E thuộc đường tròn đường kính AB .

Suy ra tứ giác $ABHE$ nội tiếp.

b) Do tứ giác $ABHE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHC} = \widehat{BAE}$

Mà $\widehat{BCD} = \widehat{BAE}$ (cùng chắn cung BD) $\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{EHC}$

Do đó: HE song song CD .

Vậy: $CD \perp AC \Rightarrow HE \perp AC$.

□

Câu 7. Cho phương trình bậc hai $4x^2 - 2\sqrt{10}x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $\sqrt{x_1^4 + 8x_2^2} + \sqrt{x_2^4 + 8x_1^2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2 \Rightarrow x_1^2 = 2 - x_2^2.$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x_1^4 + 8x_2^2} = \sqrt{(2 - x_2^2)^2 + 8x_2^2} = \sqrt{(2 + x_2^2)^2} = 2 + x_2^2.$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{x_2^4 + 8x_1^2} = 2 + x_1^2$$

$$\text{Vậy: } \sqrt{x_1^4 + 8x_2^2} + \sqrt{x_2^4 + 8x_1^2} = x_1^2 + x_2^2 + 4 = 6.$$

□

————— **HẾT** —————

35 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VINH PHÚC

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = 2016x + 1$ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

(A) $M(1; 0)$.

(B) $N(0; 1)$.

(C) $P(0; 2017)$.

(D) $Q(1; 2015)$.

Câu 2. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{1-x}$ là

(A) $x \leq 1$.

(B) $x \geq 1$.

(C) $x > 1$.

(D) $x < 1$.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là $a\sqrt{2}$. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ bằng

(A) a .

(B) $a\sqrt{2}$.

(C) $2a$.

(D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

$AC = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$. Vậy bán kính là a .

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho tam giác ABC có góc A bằng 60° . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , khi đó góc BIC bằng

(A) 60° .

(B) 90° .

(C) 120° .

(D) 150° .

Câu 5.

a) Tính giá trị của biểu thức $P = -\sqrt{2} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

b) Một hãng taxi quy định giá thuê xe đi mỗi km là 11 nghìn đồng với 10 km đầu tiên và 7,5 nghìn đồng với các km tiếp theo. Hỏi một hành khách thuê taxi của hãng đó đi quãng đường dài 18 km thì phải trả bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải.

a) Ta có $P = -\sqrt{2} + \sqrt{2-2\sqrt{2}+1} = -\sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = -1$.

b) Số tiền hành khách phải trả là: $10 \cdot 11 + 8 \cdot 7,5 = 170$ (nghìn). □

Câu 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ 2x + my = 4 \end{cases}$ với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = 2$.

Lời giải.

a) Với $m = 1$, ta có $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$.

b) Ta có $D = m^2 + 2, D_x = m + 4, D_y = 4m - 2$.

Do đó hệ luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m+4}{m^2+2} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{4m-2}{m^2+2} \end{cases}$.

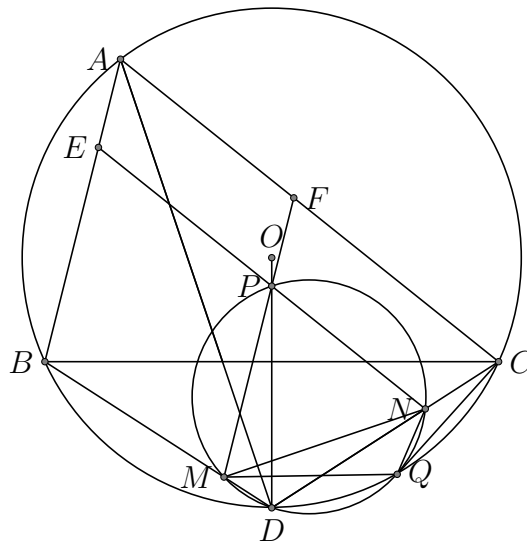
$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{m+4}{m^2+2} + \frac{4m-2}{m^2+2} = 2 \Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

□

Câu 7. Cho tam giác ABC nhọn, không cân và nội tiếp (O) . Phân giác của góc BAC cắt đường tròn (O) tại D (khác A). Trên đoạn OD lấy điểm P (P khác O và D). Các đường thẳng đi qua P và tương ứng song song với AB, AC lần lượt cắt DB, DC tại M và N .

- Chứng minh $\widehat{MPN} = \widehat{BAC}$ và 4 điểm P, M, D, N cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh tam giác PMN cân tại P .
- Đường tròn đi qua 4 điểm P, M, D, N cắt (O) tại Q và D . Chứng minh rằng QA là phân giác của góc MQN .

Lời giải.



- Ta có $\widehat{MPN} = \widehat{EPF} = \widehat{BAC}$ (Tứ giác $AEPF$ là hình bình hành). Suy ra $\widehat{MPN} + \widehat{BDC} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $MPND$ nội tiếp.
- Ta có $\widehat{PMN} = \widehat{PDN} = \widehat{JDC}$ (1). (góc nội tiếp chắn cùng một cung) Chứng minh tương tự ta có $\widehat{PNM} = \widehat{PDM} = \widehat{JDB}$ (2).

Vì D là điểm chính giữa của cung BC nhỏ nên J là điểm chính giữa của cung BC lớn. Nên từ (1) và (2) suy ra đpcm.

- Từ b) suy ra QP là phân giác của góc MQN . Ta sẽ chứng minh Q, P, A thẳng hàng. Ta có $\widehat{NPQ} = \widehat{NDQ} = \widehat{CDQ} = \widehat{CAQ}$. Mà $PN \parallel AC$ nên suy ra A, P, Q thẳng hàng. Suy ra đpcm.

□

Câu 8. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $|x - 2y| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $|y - 2x| \leq \frac{1}{\sqrt{y}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + 2y$.

Lời giải.

Ta có

$$|x - 2y| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2y + 4xy^2 \leq 1 \quad (6)$$

$$\text{và } |y - 2x| \leq \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow y^3 - 4xy^2 + 4x^2y \leq 1. \quad (7)$$

Cộng (1) và (2) ta được $x^3 + y^3 \leq 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số ta có

$$x^3 + x^3 + 1 \geq 3x^2 \text{ và } 2y^3 + 2 + 2 \geq 6y.$$

Suy ra $x^2 + 2y \leq 3$. Dấu "=" khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3 khi $x = y = 1$. □

36 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BÀ RỊA - VŨNG TÀU

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $A = 3\sqrt{16} - 2\sqrt{9} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 3x - y = 7. \end{cases}$

c) Giải phương trình $x^2 + x - 6 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có: $A = 3.4 - 2.3 + 2 = 8$.

b) Ta có: $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -1)$.

c) Ta có: $\Delta = 1^2 - 4.1.(-6) = 25 > 0$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2$; $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3$.

□

Câu 2.

a) Vẽ parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$.

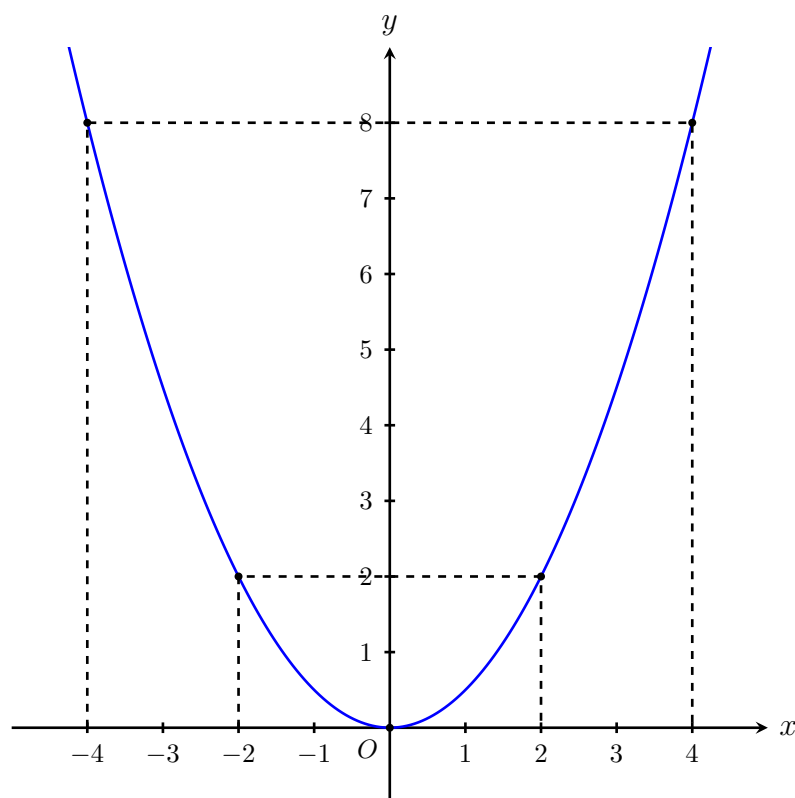
b) Tìm giá trị của m để đường thẳng $(d) : y = 2x + m$ đi qua điểm $M(2; 3)$.

Lời giải.

a) Bảng giá trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị:



- b) Vì đường thẳng $(d) : y = 2x + m$ đi qua điểm $M(2; 3)$ nên ta có: $3 = 2.2 + m \Leftrightarrow m = -1$.
 Vậy $m = -1$.

□

Câu 3.

- a) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - mx - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 4$.
- b) Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó, biết rằng nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì mảnh đất đó có diện tích không đổi.
- c) Giải phương trình $x^4 + (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - 1 = 0$.

Lời giải.

- a) Ta có: $a.c = 1.(-2) = -2 < 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 với mọi giá trị m .

Theo định lí Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = -2$.

Ta có: $x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 4 \Leftrightarrow x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 4 \Leftrightarrow -2 + 2m = 4 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy $m = 3$.

- b) Gọi x (m) là chiều rộng của mảnh đất lúc đầu ($x > 0$). Khi đó, chiều dài của mảnh đất lúc đầu là $\frac{360}{x}$ (m).

Chiều rộng của mảnh đất sau khi tăng là $x + 3$ (m) và chiều dài của mảnh đất sau khi giảm là $\frac{360}{x} - 4$ (m).

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$(x+3)\left(\frac{360}{x}-4\right)=360$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(360-4x)=360x$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-270=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ x=-18 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \end{cases}$$

Vậy chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lúc đầu là: 15 m và 24 m.

c) Ta có:

$$x^4+(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-1)+(x^2+1)\sqrt{x^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-1+\sqrt{x^2+1})=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-1+\sqrt{x^2+1}=0 \text{ (vì } x^2+1>0 \text{ với mọi } x)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}$ ($t \geq 1$), ta được phương trình:

$$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ t=-2 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \end{cases}$$

Với $t=1$, ta có: $\sqrt{x^2+1}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm: $x=0$.

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , C là điểm trên đoạn OA (C khác O và A). Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt nửa đường tròn (O) tại D . Gọi E là trung điểm đoạn CD . Tia AE cắt nửa đường tròn (O) tại M .

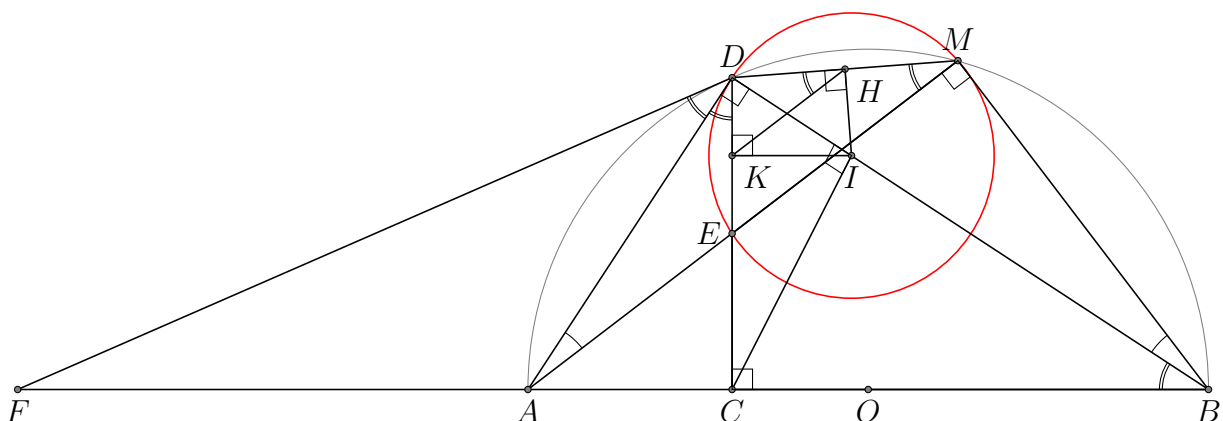
a) Chứng minh tứ giác $BCEM$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{AMD} + \widehat{DAM} = \widehat{DEM}$.

c) Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường thẳng AB tại F . Chứng minh $FD^2 = FA.FB$ và $\frac{CA}{CD} = \frac{FD}{FB}$.

d) Gọi $(I; r)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác DEM . Giả sử $r = \frac{1}{2}CD$. Chứng minh CI song song với AD .

Lời giải.



- a) Ta có: $\widehat{EMB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
 Tứ giác $BCEM$ có $\widehat{ECB} + \widehat{EMB} = 180^\circ$ nên nội tiếp được trong một đường tròn.
- b) Ta có $BCEM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{DEM}$ (1).
 Lại có: $\begin{cases} \widehat{DAM} = \widehat{DBM} \text{ (cùng chắn cung MD)} \\ \widehat{AMD} = \widehat{DBA} \text{ (cùng chắn cung AD)} \end{cases}$
 $\Rightarrow \widehat{DAM} + \widehat{AMD} = \widehat{DBM} + \widehat{DBA} = \widehat{MBA}$ (2).
 Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{AMD} + \widehat{DAM} = \widehat{DEM}$.
- c) Xét hai tam giác FDA và FBD , ta có: $\widehat{F}$ chung, $\widehat{FDA} = \widehat{FBD}$ (cùng chắn cung AD).
 $\Rightarrow \triangle FDA \sim \triangle FBD \Rightarrow \frac{FD}{FB} = \frac{FA}{FD}$ hay $FD^2 = FA.FB$.
 Ta có: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa tròn) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{FBD}$ (cùng phụ $\widehat{DAB}$).
 Mà $\widehat{FDA} = \widehat{FBD}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{ADC}$. Suy ra DA là tia phân giác của $\widehat{FDC}$.
 Tam giác CDF có DA là đường phân giác nên ta có $\frac{AC}{AF} = \frac{DC}{DF}$ hay $\frac{CA}{CD} = \frac{FA}{FD}$.
 Mà $\frac{FD}{FB} = \frac{FA}{FD}$ (cmt) nên ta có: $\frac{CA}{CD} = \frac{FD}{FB}$.
- d) Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEM nên $IE = r = \frac{CD}{2}$.
 Mà E là trung điểm của CD nên ta có $\triangle CID$ vuông tại $I \Rightarrow CI \perp ID$.
 Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $MD, ED \Rightarrow IH \perp MD, IK \perp ED$.
 Tứ giác $KIHD$ có $\widehat{IHD} + \widehat{IKD} = 180^\circ$ nên nội tiếp được trong đường tròn.
 $\Rightarrow \widehat{KID} = \widehat{KHD}$ (cùng chắn cung KD).
 Tam giác DEM có $HM = HD$ và $KD = KE$ nên HK là đường trung bình của $\triangle DEM$.
 $\Rightarrow HK \parallel ME \Rightarrow \widehat{KHD} = \widehat{AMD}$ (hai góc đồng vị) $\Rightarrow \widehat{KID} = \widehat{AMD} = \widehat{ABD}$.
 Mà $\widehat{KID} + \widehat{KDI} = 90^\circ$ và $\widehat{CDB} + \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KDI} = \widehat{CDB} \Rightarrow DI \equiv BD \Rightarrow CI \perp BD$.
 Ta có $\begin{cases} CI \perp BD \\ AD \perp BD \end{cases} \Rightarrow CI \parallel AD$.

□

Câu 5. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{a-b}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
 $P = ab + \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có: $2(a+b) = 2\sqrt{ab}(a-b) \leq \frac{(2\sqrt{ab})^2 + (a-b)^2}{2} = \frac{4ab + (a-b)^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$.
 $\Rightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) \geq 0$ hay $a+b \geq 4$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$P = ab + \frac{a-b}{\sqrt{ab}} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2}{a+b} \geq 2\sqrt{a+b} \geq 4.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4, đạt được khi $\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=2\sqrt{ab} \\ \sqrt{ab}=\frac{a+b}{a-b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2+\sqrt{2} \\ b=2-\sqrt{2} \end{cases}$.

□

37 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC YÊN BÁI

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Không sử dụng máy tính. Tính giá trị của biểu thức: $A = 2015 + \sqrt{36} - \sqrt{25}$.
- b) Rút gọn biểu thức: $P = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$, với $a \geq 0; a \neq 1$.

Lời giải.

a) Ta có: $A = 2015 + \sqrt{36} - \sqrt{25} = 2015 + 6 - 5 = 2016$.

b) Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có:

$$P = \left[1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right] \left[1 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1}\right] = (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a}) = 1 - a.$$

□

Câu 2. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x^2$.

- a) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .
- b) Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm A và B (với A có hoành độ âm, B có hoành độ dương).
 Bằng tính toán hãy tìm tọa độ các điểm A và B .

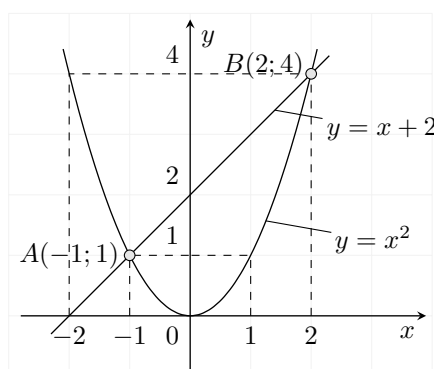
Lời giải.

a) Ta có bảng:

x	0	-2
$y = x + 2$	2	0

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị:



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1.$$

Vậy tọa độ của hai điểm A và B lần lượt là: $A(-1; 1); B(2; 4)$.

□

Câu 3.

a) Giải phương trình: $5x + 6 = 3x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x + 2y = 17 \end{cases}.$$

c) Tìm m để phương trình: $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 4m - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

d) Hàng ngày, bạn An đi học từ nhà trường trên quãng đường dài 8 km bằng xe máy điện với vận tốc không đổi. Hôm nay, vẫn trên đoạn đường đó, 2 km đầu bạn An đi với vận tốc như

mọi khi, sau đó vì xe bị non hơi nên bạn đã dừng 1 phút để bơm. Để đến trường đúng giờ như mọi ngày, bạn An phải tăng vận tốc lên thêm 4 km/h. Tính vận tốc xe máy điện của bạn An khi tăng tốc. Với vận tốc đó bạn A có vi phạm luật giao thông hay không? Tại sao? Biết rằng đoạn đường bạn An đi là trong khu vực đông dân cư.

Lời giải.

a) $5x + 6 = 3x \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$. Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-3\}$

b) Ta có: $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x + 2y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 20 \\ x + 2y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x + 2y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: (5; 6)

c) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (m+3)^2 - (m^2 + 4m - 7) > 0$
 $\Leftrightarrow 2m + 16 > 0 \Leftrightarrow m > -8$.

Vậy với $m > -8$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

d) Gọi vận tốc xe máy điện của An lúc bình thường là x (km/h) ($x > 0$).

Vận tốc xe máy điện của An khi tăng tốc là $x + 4$ (km/h).

Thời gian An đi từ nhà đến trường lúc bình thường là: $\frac{8}{x}$ (h).

Đổi 1 phút = $\frac{1}{60}$ h. Thời gian An đi từ nhà đến trường hôm nay là: $\frac{2}{x} + \frac{1}{60} + \frac{6}{x+4}$ (h).

Ta có: $\frac{8}{x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{60} + \frac{6}{x+4} \Leftrightarrow \frac{6}{x} - \frac{6}{x+4} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow \frac{24}{x(x+4)} = \frac{1}{60}$

$x^2 + 4x - 1440 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -40 & (\text{loại}) \\ x = 36 & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$

Vậy vận tốc xe máy điện của An khi tăng tốc là $36 + 4 = 40$ (km/h).

Vận tốc này không vi phạm luật giao thông vì trong khu vực đông dân cư, vận tốc tối đa của xe máy điện là 40 (km/h).

□

Câu 4.

1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của tam giác ABC ($D \in AC, E \in AB$).

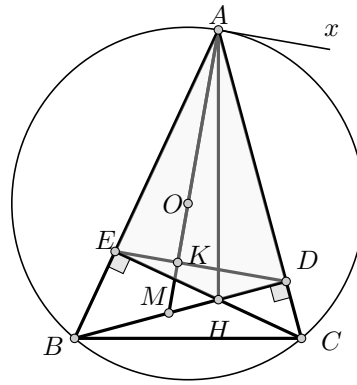
a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Đường thẳng AO cắt ED và BD lần lượt tại K và M . Chứng minh rằng $AK \cdot AM = AD^2$.

c) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

2. Từ miếng tôn phẳng hình chữ nhật có chiều dài 1,5 dm và chiều rộng 1,4 dm. Người ta tạo nên mặt xung quanh của những chiếc hộp hình trụ. Trong hai cách làm, hỏi cách nào thì được chiếc hộp có thể tích lớn hơn.

Lời giải.



1.

a) Vì $HE \perp AB, HD \perp AC$ nên $\widehat{HEA} = \widehat{HAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEA} + \widehat{HAD} = 180^\circ$

Do đó tứ giác $ADHE$ nội tiếp.

b) Trong nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B , vẽ tia tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) .

Do đó: $\widehat{CAx} = \widehat{CBA}$.

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BEDC$ là nội tiếp đường tròn.
 $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{CBA} \Rightarrow \widehat{CAx} = \widehat{ADE} \Rightarrow Ax \parallel DE$, mà $Ax \perp OA$ nên $OA \perp DE$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADM , ta có $AK \cdot AM = AD^2$.

c) Ta có: $\widehat{KDM} = \widehat{KAD} (= 90^\circ - \widehat{KDA})$.

Mà tứ giác $ADHE$ nội tiếp nên $\widehat{KDM} = \widehat{EAH}$

Do đó: $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$

2. Cách 1: Chu vi đáy hình trụ là 1,5 dm, chiều cao hình trụ là $h_1 = 1,4$ dm.

Hình trụ này có bán kính đáy $r_1 = \frac{1,5}{2\pi} = \frac{3}{4\pi}$ dm,

diện tích đáy $S_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 = \frac{9}{16\pi}$ dm².

Khi đó ta có: $V_1 = S_1 \cdot h_1 = \frac{9}{16\pi} \cdot 1,4 = \frac{63}{80\pi}$ dm³.

Cách 2: Chu vi đáy hình trụ là 1,4 dm, chiều cao hình trụ là $h_2 = 1,5$ dm.

Hình trụ có: $r_2 = \frac{1,4}{2\pi} = \frac{7}{10\pi}$ dm; $S_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot \left(\frac{7}{10\pi}\right)^2 = \frac{49}{100\pi}$ dm².

Khi đó: $V_2 = S_2 \cdot h_2 = \frac{49}{100\pi} \cdot 1,5 = \frac{147}{200\pi}$ dm³.

Ta có: $V_1 > V_2$ nên cách 1 sẽ cho hình trụ có thể tích lớn hơn.

□

Câu 5. Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $(a+b)(a+b-1) = a^2 + b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}.$$

Lời giải.

Từ điều kiện đề bài suy ra $(a+b)^2 - (a+b) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a+b = 2ab$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $a+b = 2ab \leq \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 2(a+b) \Rightarrow a+b \geq 2$.

Ta lại có: $a^4 + b^2 \geq 2a^2b$; $b^4 + a^2 \geq 2b^2a$.

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{2a^2b + 2b^2a} + \frac{1}{2b^2a + 2a^2b} = \frac{2}{2ab(a+b)} = \frac{1}{ab(a+b)}$$

Mà $a + b \geq 2 \Rightarrow ab \geq 1 \Rightarrow ab(a+b) \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{ab(a+b)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow Q \leq \frac{1}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 1$.

Vậy $Q_{\max} = \frac{1}{2}$ khi $a = b = 1$.

□

———— HẾT ————

38

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC AN GIANG

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau đây:

a. $\sqrt{3}x + \sqrt{12}x = \sqrt{27}$.

b. $x^2 + x - 20 = 0$.

c.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
.

Lời giải.

a. $\sqrt{3}x + \sqrt{12}x = \sqrt{27} \Leftrightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{12})x = \sqrt{27} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 1$.

b. $x^2 + x - 20 = 0$.

Ta có $\Delta = 1^2 - 4.1.(-20) = 81 > 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 4 \\ x = -5 \end{cases}$.

c.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$
.

□

Câu 2. Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

b. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng (d) : $y = -2x + 1$ bằng phép tính.

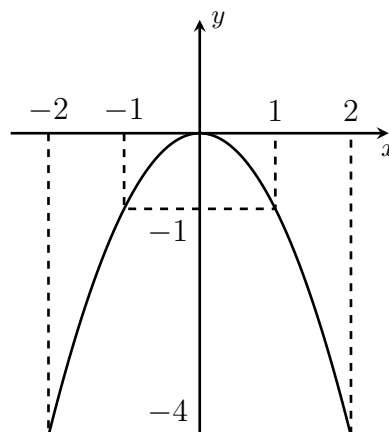
Lời giải.

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

Ta có, bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị hàm số:



b. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng (d) : $y = -2x + 1$ bằng phép tính.

Ta có, phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 = -2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) với (d) là điểm $M(1; -1)$.

□

Câu 3. Cho phương trình bậc hai ẩn $x: x^2 + (4m + 1)x + 2m - 8 = 0$ (m là tham số).

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi tham số m .
- Tìm m để hai nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện $|x_1 - x_2| = 17$.

Lời giải.

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi tham số m .

Ta có: $\Delta = (4m + 1)^2 - 4(2m - 8) = 16m^2 + 33 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó, phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

- Tìm m để hai nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện $|x_1 - x_2| = 17$.

Do phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , nên theo định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = -4m - 1$ và $x_1 x_2 = 2m - 8$. (1)

Từ giả thiết $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 17^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 17^2$.

Thay (1) vào ta được: $(-4m - 1)^2 - 4(2m - 8) = 17^2 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \end{cases}$.

□

Câu 4. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn đó (Ax nằm cùng nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn). Tia phân giác của góc CAx cắt nửa đường tròn tại D . Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E . Kẻ EH vuông góc với Ax tại H .

- Chứng minh tứ giác $AHEC$ nội tiếp.
- Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$.
- Chứng minh tam giác ABE cân.
- Tia BD cắt AC và Ax lần lượt tại F và K . Chứng minh $AKEF$ là hình thoi.

Lời giải.

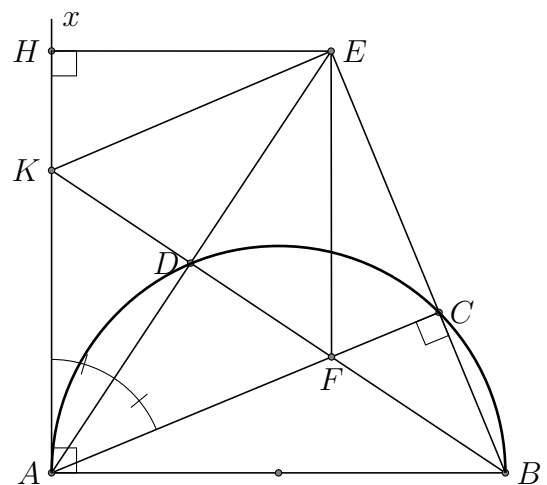
- Chứng minh tứ giác $AHCE$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AHEC$, ta có: $\widehat{AHE} = 90^\circ$
(do $EH \perp Ax$ tại H).

Lại có $\widehat{ACE} = 90^\circ$ (kề bù với góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra: $\widehat{AHE} + \widehat{ACE} = 180^\circ$.

Mà H, C là hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $AHCE$ nội tiếp.



- Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$.

Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{DAx}$ (cùng chắn cung $\widehat{AD}$) (1)

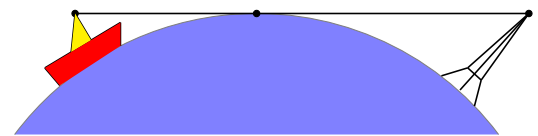
$\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ (cùng chắn cung $\widehat{DC}$) (2)

- Từ (1), (2) và $\widehat{DAx} = \widehat{DAC}$, suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$.
- c. Chứng minh tam giác ABE cân.
 $\widehat{EAB} + \widehat{EAx} = 90^\circ$ và $\widehat{AEB} + \widehat{DBC} = 90^\circ$
 Mà $\widehat{DAx} = \widehat{EAC} = \widehat{DBC}$ nên $\widehat{EAB} = \widehat{AEB}$. Vậy tam giác ABE cân tại B .
- d. Tia BD cắt AC và Ax lần lượt tại F và K . Chứng minh $AKEF$ là hình thoi.
 Tam giác AKF có AD là phân giác, là đường cao nên $\triangle AKF$ cân tại A .
 Suy ra AD là trung tuyến. Do đó: D là trung điểm của FK . (3)
 Tam giác ABE cân tại B và có BD là đường cao nên D là trung điểm của AE . (4)
 Từ (3) và (4) suy ra $AKEF$ là hình bình hành.
 Mặt khác, AD là phân giác của góc A nên $AKEF$ là hình thoi.

□

Câu 5.

Ngon Hải đăng Kê gà ở tỉnh Bình Thuận là ngọn tháp thấp đèn gần bờ biển dùng để định hướng cho tàu thuyền giao thông trong khu vực vào ban đêm. Đây là ngọn hải đăng được xem là cổ xưa và cao nhất Việt Nam, chiều cao của ngọn đèn so với mặt nước biển là 65 m. Hỏi:



- Một người quan sát đứng tại vị trí đèn của Hải đăng nhìn xa tối đa bao nhiêu km trên biển?
- Cách bao xa thì một người quan sát đứng ở trên tàu bắt đầu trông thấy ngọn đèn này, biết rằng mắt người quan sát đứng ở trên tàu có độ cao 5 m so với mặt nước biển?
 (Cho biết bán kính Trái Đất gần bằng 6400 km và điều kiện quan sát trên biển là không bị hạn chế)

Lời giải.

- Một người quan sát đứng tại vị trí đèn của Hải đăng nhìn xa tối đa bao nhiêu km trên biển?

Giả sử chiều cao của ngọn Hải đăng là AM và điểm xa nhất mà người đứng trên ngọn Hải đăng quan sát được là điểm T , trên mặt biển. Khi đó ta có:

$$\triangle MTA \sim \triangle MBT \text{ (g-g)}.$$

$$\text{Suy ra: } MT^2 = MA.MB$$

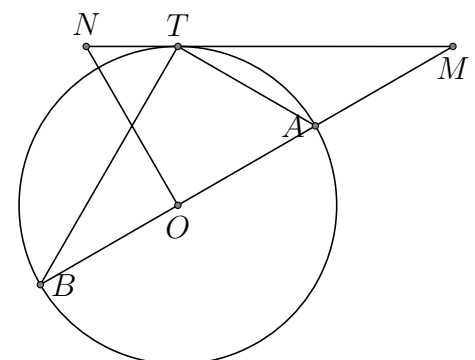
$$\Rightarrow MT = \sqrt{MA.MB} = \sqrt{65.(65 + 2.6400000)} \approx 29 \text{ km.}$$

Vậy một người quan sát đứng tại vị trí đèn của Hải đăng nhìn xa tối đa khoảng 29 km.

- Cách bao xa thì một người quan sát đứng ở trên tàu bắt đầu trông thấy ngọn đèn này, biết rằng mắt người quan sát đứng ở trên tàu có độ cao 5 m so với mặt nước biển?

$$\text{Tương tự ta cũng có: } NT = \sqrt{5(5 + 2.6400000)} \approx 8 \text{ km.}$$

$$\text{Suy ra: } MN \approx 29 + 8 = 37 \text{ km.}$$



Vậy cách một khoảng 37 km thì một người quan sát đứng ở trên tàu bắt đầu trông thấy ngọn đèn này.



———— HẾT ————

39 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BẮC GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{25} + 3\sqrt{8} - 2\sqrt{18}$.
 b) Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x + m$ đi qua điểm $K(2; 3)$.

Lời giải.

- a) $A = \sqrt{25} + 3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} = 5 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 5$.
 b) Đồ thị hàm số $y = 2x + m$ đi qua $K(2; 3) \Leftrightarrow 3 = 4 + m \Leftrightarrow m = -1$.

□

Câu 2.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$.
 b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{1 - \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1}$ (với $x \geq 0$, $x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{4}$).
 Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 0$.
 c) Cho phương trình $x^2 - (2m + 5)x + 2m + 1 = 0$ (1), với x là ẩn, m là tham số.
 a. Giải phương trình (1) khi $m = -\frac{1}{2}$.
 b. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

- a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 30 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 33 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.
 Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(3; 1)$.
 b) Với $x \geq 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{4}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{1 - \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \right] \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 1} = \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} B < 0 &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 1} < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vậy với $0 \leq x < \frac{1}{4}$ thì $B < 0$.

c)

a. Phương trình $x^2 - (2m + 5)x + 2m + 1 = 0$ (1)

Khi $m - \frac{1}{2}$, phương trình (1) trở thành: $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Vậy khi $m = -\frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có tập nghiệm $S = \{0; 4\}$.

b. $\Delta = (2m + 5)^2 - 4(2m + 1) = 4m^2 + 12m + 21 = (2m + 3)^2 + 12 > 0 \forall m$.

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 5 \\ x_1 x_2 = 2m + 1 \end{cases}$

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi: $\begin{cases} 2m + 5 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2} \quad (*)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} P^2 &= (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = (x_1 + x_2) - 2\sqrt{x_1 x_2} \\ &= 2m + 5 - 2\sqrt{2m + 1} = (2m + 1 - 2\sqrt{2m + 1} + 1) + 3 \\ &= (\sqrt{2m + 1} - 1)^2 + 3 \geq 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P \geq \sqrt{3}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{2m + 1} = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = 0$ là giá trị cần tìm. Khi đó $\min P = \sqrt{3}$.

□

Câu 3.

Để chuẩn bị cho năm học mới, học sinh hai lớp 9A và 9B ủng hộ thư viện 738 quyển sách gồm hai loại sách giáo khoa và sách tham khảo. Trong đó mỗi học sinh lớp 9A ủng hộ 6 quyển sách giáo khoa và 3 quyển sách tham khảo, mỗi học sinh lớp 9B ủng hộ 5 quyển sách giáo khoa và 4 quyển sách tham khảo. Biết số sách giáo khoa ủng hộ nhiều hơn số sách tham khảo là 166 quyển. Tính số học sinh mỗi lớp.

Lời giải.

Gọi số học sinh của lớp 9A, 9B lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

$\Rightarrow$ Lớp 9A ủng hộ $6x$ quyển sách giáo khoa và $3x$ quyển sách tham khảo.

Lớp 9B ủng hộ $5y$ quyển sách giáo khoa và $4y$ quyển sách tham khảo.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x + 9y = 738 \\ (6x + 5y) - (3x + 4y) = 166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 82 \\ 3x + y = 166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 42 \\ y = 40 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy lớp 9A có 42 học sinh, lớp 9B có 40 học sinh.

□

Câu 4.

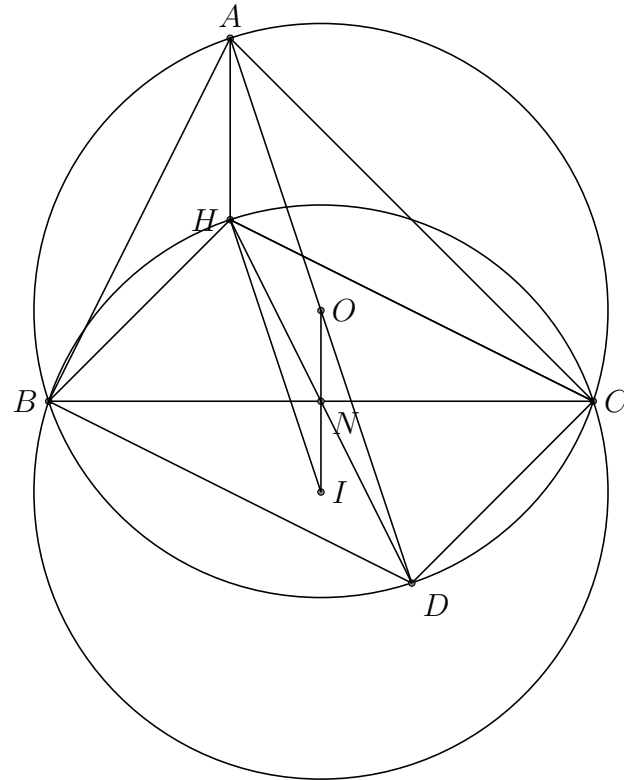
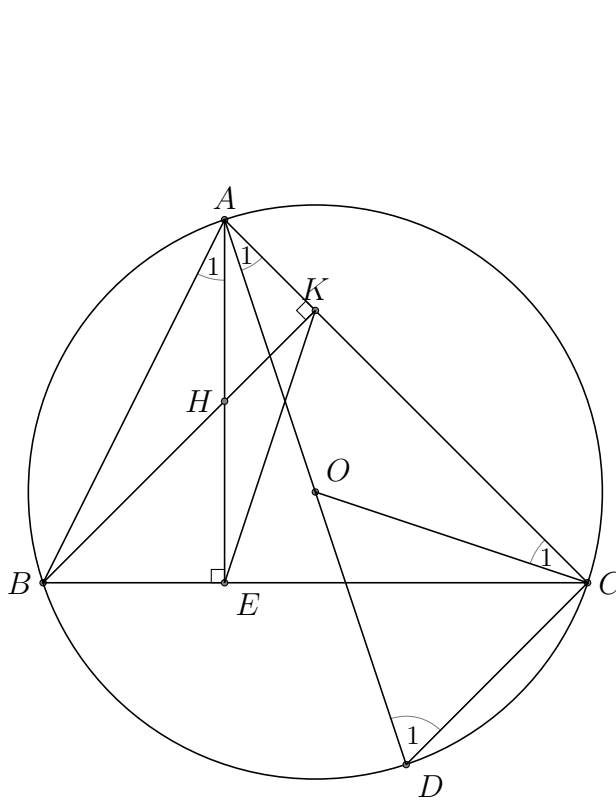
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R . Hai đường cao AE và BK của tam giác ABC cắt nhau tại H (với E thuộc BC , K thuộc AC).

a) Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh $CE.CB = CK.CA$.

- c) Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.
- d) Cho B, C cố định và A di động trên (C) nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC nhọn, khi đó H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T) , biết $R = 3$ cm.

Lời giải.



- a) Tứ giác $ABEK$ có:
$$\begin{cases} \widehat{AEB} = 90^\circ \text{ (} AE \perp BC \text{)} \\ \widehat{AKB} = 90^\circ \text{ (} BK \perp AC \text{)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABEK$ nội tiếp một đường tròn.

- b) $\triangle CEA$ và $\triangle CKB$ có:

$$\begin{cases} \widehat{ACB} \text{ chung} \\ \widehat{CEA} = \widehat{CKB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle CEA \sim \triangle CKB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CK} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CE \cdot CB = CK \cdot CA$$

- c) Vẽ đường kính AD của (O) .

Tam giác ABE vuông tại E nên $\widehat{A_1} + \widehat{ABC} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{D_1}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của (O)) $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$

$\triangle ACD$ có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{D_1} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$ ($\triangle OAC$ cân tại O) $\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$

Từ đó suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

- d) Gọi I là điểm đối xứng với O qua BC , OI cắt BC tại N

$\Rightarrow N$ là trung điểm của OI, BC và các điểm I, N cố định.

Ta có $BH \parallel CD$ (cùng $\perp AC$)

Tương tự: $CH \parallel BD$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow N$ là trung điểm của BC thì N cũng là trung điểm của HD .

$\triangle AHD$ có ON là đường trung bình $\Rightarrow AH = 2ON \Rightarrow AH = OI (= 2ON)$

Lại có: $AH \parallel OI$ (cùng $\perp BC$) $\Rightarrow$ Tứ giác $AHIO$ là hình bình hành

$\Rightarrow IH = OA = R = 3$ (cm) $\Rightarrow H$ thuộc đường tròn $(I; 3 \text{ cm})$ cố định

□

Câu 5.

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $2a + 3b \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{2002}{a} + \frac{2017}{b} + 2996a - 5501b$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2002}{a} + \frac{2017}{b} + 2996a - 5501b \\ &= \left(\frac{2002}{a} + 8008a \right) + \left(\frac{2017}{b} + 2017b \right) - 2506(2a + 3b). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si và sử dụng giả thiết $2a + 3b \leq 4$. Ta có:

$$\begin{aligned} Q &\geq 2\sqrt{\frac{2002}{a} \cdot 8008a} + 2\sqrt{\frac{2017}{b} \cdot 2017b} - 2506 \cdot 4 \\ Q &\geq 8008 + 4034 - 10024 = 2018 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2002}{a} = 8008a \\ \frac{2017}{b} = 2017b \\ 2a + 3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min Q = 2018 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

□

———— HẾT ————

40 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GD-ĐT BẮC NINH

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 5. \end{cases}$
- b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$.

Lời giải.

- a) $\begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$
 Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.
- b) Quy đồng và rút gọn ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{x-2-\sqrt{x}-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}.$$

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1) với m là tham số.

- a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
- b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Lập phương trình bậc hai nhận $x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2$ và $x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2$ là nghiệm.

Lời giải.

- a) Khi $m = 2$ ta được phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$. Giải ra được $x = 1$ hoặc $x = 3$.
- b) Ta có $\Delta' = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.
 Do x_1, x_2 là nghiệm của (1) nên

$$\begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + m^2 = 1 \\ x_2^2 - 2mx_2 + m^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2 = x_1 - 2 \\ x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2 = x_2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{Theo định lí Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases} \text{ do đó}$$

$$\begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) = 2m - 4 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = m^2 - 4m + 3 \end{cases}$$

Để thấy $(2m-4)^2 - 4(m^2 - 4m + 3) = 4 > 0$ nên phương trình cần lập là

$$x^2 - (2m-4)x + m^2 - 4m + 3 = 0.$$

□

Câu 3. Giải toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.

Một nhóm gồm 15 học sinh (cả nam và nữ) tham gia buổi lao động trồng cây. Các bạn nam trồng được 30 cây, các bạn nữ trồng được 36 cây. Mỗi bạn nam trồng được số cây như nhau và mỗi bạn nữ trồng được số cây như nhau. Tính số học sinh nam và học sinh nữ của nhóm biết rằng mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây.

Lời giải.

Gọi số học sinh nam là x , $x \in \mathbb{N}$, $0 < x < 15$, suy ra số học sinh nữ là $(15 - x)$. Khi đó, mỗi bạn nam trồng được $\frac{30}{x}$ cây và mỗi bạn nữ trồng được $\frac{36}{15 - x}$ cây. Từ giả thiết ta có phương trình

$$\frac{30}{x} = \frac{36}{15 - x} + 1$$

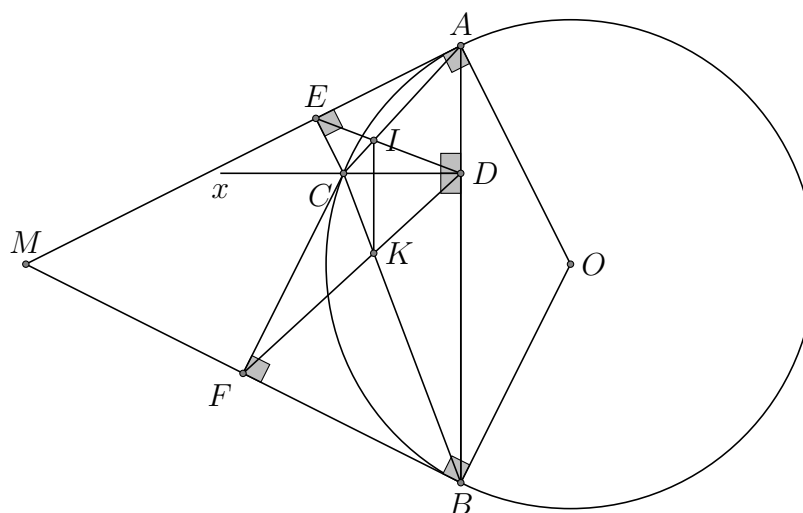
Giải phương trình này được nghiệm $x = 75$ (loại) hoặc $x = 6$ (thỏa mãn).

Vậy số bạn nam là 6 và số bạn nữ là 9. □

Câu 4. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không trùng với A, B). Từ điểm C kẻ CD vuông góc với AB , CE vuông góc với MA , CF vuông góc với MB ($D \in AB, E \in MA, F \in MB$). Gọi I là giao điểm của AC và DE , K là giao điểm của BC và DF . Chứng minh rằng

- Tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn.
- Hai tam giác CDE và CFD đồng dạng.
- Tia đối của tia CD là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$
- Đường thẳng IK song song với đường thẳng AB .

Lời giải.



- Tứ giác $ADCE$ có $\widehat{ADC} = \widehat{AEC} = 90^\circ$ nên $ADCE$ là tứ giác nội tiếp.

- b) Tứ giác $ADCE$ nội tiếp nên $\widehat{EAC} = \widehat{EDC}$. Tương tự, tứ giác $BDCF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$. Mặt khác, theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung thì $\widehat{EAC} = \widehat{CBD}$. Do đó $\widehat{EDC} = \widehat{CFD}$. Chứng minh tương tự thì $\widehat{CED} = \widehat{CDF}$. Vậy hai tam giác $\triangle CDE$ và $\triangle CFD$ đồng dạng với nhau.
- c) Gọi Cx là tia đối của tia CD . Tam giác $\triangle CDE$ đồng dạng với $\triangle CFD$ suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{DCF}$. Do đó $\widehat{ECx} = \widehat{FCx}$. Vậy Cx là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$.
- d) Ta có $\widehat{ICK} + \widehat{IDK} = \widehat{ICK} + \widehat{IDC} + \widehat{KDC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $ICKD$ nội tiếp, do đó $\widehat{CIK} = \widehat{KDC} = \widehat{CBF} = \widehat{CAB}$. Vậy $IK \parallel AB$.

□

Câu 5.

- a) Giải phương trình $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 6x^2$
- b) Cho bốn số thực dương x, y, z, t thỏa mãn $x + y + z + t = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{(x + y + z)(x + y)}{xyzt}$

Lời giải.

- a) Đặt $y = x^2 + 1$ ta được phương trình

$$(y - x)(y + 4x) = 6x^2 \Leftrightarrow y^2 + 3xy - 10y^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2x)(y + 5x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -5x \end{cases}$$

◇ Với $y = 2x$ thì $x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

◇ Với $y = -5x$ thì $x^2 + 1 = -5x \Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$.

- b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số thực dương ta có

$$\begin{aligned} x + y &\geq 2\sqrt{xy} \\ (x + y) + z &\geq 2\sqrt{(x + y)z} \\ (x + y + z) + t &\geq 2\sqrt{(x + y + z)t} \end{aligned}$$

Nhân vế với vế của bất đẳng thức trên và kết hợp điều kiện $x + y + z + t = 2$ ta được

$$\begin{aligned} 2(x + y)(x + y + z) &\geq 8\sqrt{xyzt(x + y)(x + y + z)} \\ \Rightarrow \sqrt{(x + y)(x + y + z)} &\geq 4\sqrt{xyzt} \\ \Rightarrow \frac{(x + y)(x + y + z)}{xyzt} &\geq 16 \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y \\ x + y = z \\ x + y + z = t \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$



———— HẾT ————

41 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BẾN TRE

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Không sử dụng máy tính cầm tay hãy

- a) Tính $\sqrt{18} - 2\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}$
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

Lời giải.

- a) Ta có $\sqrt{18} - 2\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \left(3 - 2 + \frac{5}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.
- b) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$
- Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

□

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P) : y = -2x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2x - 4$.

- a) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.
- b) Bằng phương pháp đại số, hãy tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Lời giải.

- a) Vẽ (P) ta lập bảng giá trị của $(P) : y = -2x^2$

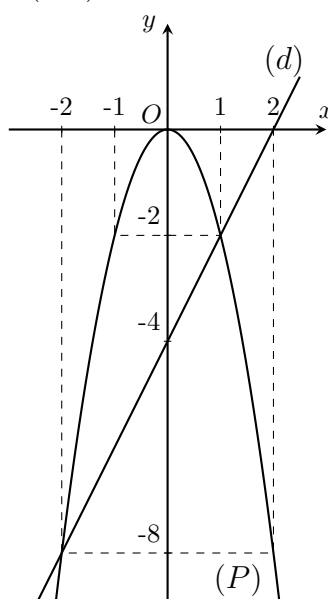
x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Vẽ $(d) : y = 2x - 4$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (0; -4)$.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2; 0)$.

Khi đó ta vẽ (d) đi qua $(0; -4)$ và $(2; 0)$.



- b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $-2x^2 = 2x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -2 \Rightarrow y = -8 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là: $(1; -2)$ và $(-2; -8)$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x - (2m + 1) = 0$ (1) (m là tham số).

- Giải phương trình (1) với $m = 2$.
- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- Tìm m để phương trình (1) luôn có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.

Lời giải.

- Với $m = 2$ phương trình trở thành $x^2 - 2x - 3 = 0$ Phương trình có: $a - b + c = 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$.

Vậy với $m = 2$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = 3$.

- Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 + 2 > 0, \forall m$.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

- Theo hệ thức vi-ét ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -(2m + 1) \end{cases}$

Theo đề bài ta cần x_1, x_2 là hai nghiệm đối nhau của phương trình (1) nên:

$$\begin{cases} S = 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 = 0 \\ -(2m + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy khi $m = 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau.

□

Câu 4. Cho đường tròn O , đường kính AB . Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M (M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$), MB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N . Chứng minh rằng

- Tứ giác $AKNH$ nội tiếp trong một đường tròn.
- $AM^2 = MK \cdot MB$.
- $\widehat{KAC} = \widehat{OMB}$.
- N là trung điểm của CK .

Lời giải.

42 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BÌNH ĐỊNH

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$; $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.
- Rút gọn biểu thức $T = A - B$.
- Tìm x để T là số nguyên.

Lời giải.

- Thay $x = 9$ và biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}-2} = \frac{3}{1} = 3.$$

- Ta có:

$$\begin{aligned} T = A - B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} - \frac{4\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{x-4} - \frac{2(\sqrt{x}-2)}{x-4} - \frac{4\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4-4\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+4}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

- T nguyên $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z}$ hay $\sqrt{x}+2$ là ước của 4.

Ta có $U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$.

Cho $\sqrt{x}+2$ bằng các giá trị trong tập $U(4)$ ta được $\begin{cases} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Vậy $x = 0$ thì T là số nguyên.

□

Câu 2. Cho phương trình : $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$ (m là tham số)

- Giải phương trình khi $m = 0$.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu và thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Lời giải.

- Với $m = 0$ phương trình trở thành: $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$.

Vậy $S = \{-3; 3\}$.

- Để phương trình có hai nghiệm phân biệt và trái dấu thì:

$$a.c < 0 \Leftrightarrow -6m - 9 < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}$$

$$\text{Mặt khác } x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13$$

(1)

$$\text{Áp dụng định lí Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -6m - 9 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được: $4m^2 - 2(-6m - 9) = 13 \Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} \text{ (nhận)} \\ m = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy $m = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu và thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 13$. □

Câu 3. Một đám đất hình chữ nhật có chu vi là 24 m. Nếu tăng độ dài một cạnh lên 2 m và giảm độ dài cạnh còn lại 1 m thì diện tích đám đất sẽ tăng thêm 1 m². Tính độ dài các cạnh lúc ban đầu của đám đất.

Lời giải.

Gọi x, y (m) là độ dài các cạnh của đám đất hình chữ nhật lúc ban đầu ($x, y > 0$).

Vì chu vi là 24 m nên ta có:

$$2(x + y) = 24 \Leftrightarrow x + y = 12. \quad (1)$$

Diện tích đám đất ban đầu là: $S_1 = xy$.

Nếu tăng độ dài một cạnh lên 2 m và giảm độ dài cạnh còn lại 1 m thì diện tích đám đất là:

$$S_2 = (x + 2)(y - 1).$$

Vì tăng độ dài một cạnh lên 2 m và giảm độ dài cạnh còn lại 1 m thì diện tích đám đất sẽ tăng thêm 1 m² nên ta có:

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + 1 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(y - 1) &= xy + 1 \\ \Leftrightarrow x - 2y + 3 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (nhận)}.$

Vậy độ dài các cạnh lúc ban đầu của đám đất lúc ban đầu là 5 m và 7 m. □

Câu 4. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm (O) , M là một điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

- Bốn điểm M, D, B, F thuộc một đường tròn và bốn điểm M, D, E, C thuộc một đường tròn;
- Ba điểm D, E, F thẳng hàng;
- $\frac{BC}{MD} = \frac{CA}{ME} + \frac{AB}{MF}$.

Lời giải.

a) Ta có: D và F lần lượt là hình chiếu của M lên BC và AB .

$$\Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{BFM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow DMFB$ nội tiếp đường tròn.

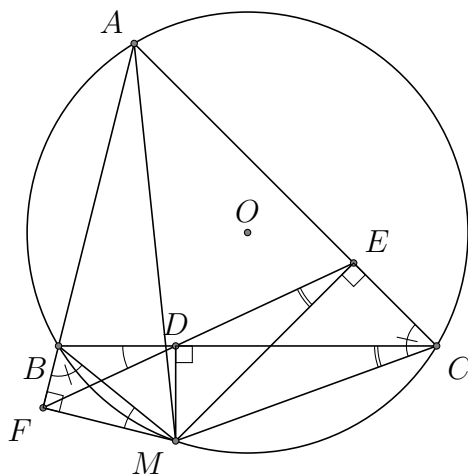
$\Rightarrow M, D, B, F$ thuộc một đường tròn.

Ta có: D và E lần lượt là hình chiếu của M lên BC và AC .

$$\Rightarrow \widehat{MDC} = 90^\circ = \widehat{MEC}$$

$\Rightarrow MDEC$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow M, D, E, C$ thuộc một đường tròn.



b) Ta có: $\widehat{FMB} = \widehat{FDB}$ (do $MDBF$ nội tiếp). (i)

$\widehat{CME} = \widehat{CDE}$ (do $DECM$ nội tiếp). (ii)

Mặt khác, tứ giác $ACMB$ nội tiếp (O) nên $\widehat{FBM} = \widehat{ACM}$. (1)

Xét hai tam giác vuông FBM và ECM , ta có:
$$\begin{cases} \widehat{FBM} + \widehat{FMB} = 90^\circ \\ \widehat{CME} + \widehat{ECM} = 90^\circ \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FMB} = \widehat{CME}$. (iii)

Từ (i), (ii) và (iii) suy ra $\widehat{FDB} = \widehat{CDE}$.

$\Rightarrow E, F, D$ thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{ME} + \frac{AB}{MF} &= \frac{AE - EC}{ME} + \frac{AF + FB}{MF} \\ &= \frac{AE}{ME} - \frac{EC}{ME} + \frac{AF}{MF} + \frac{FB}{MF} \\ &= \tan \widehat{AME} - \tan \widehat{CME} + \tan \widehat{AMF} + \tan \widehat{FMB} \\ &= \tan \widehat{AME} + \tan \widehat{AMF} \text{ (cmt câu b)} \\ &= \tan \widehat{BMD} + \tan \widehat{MDC} \text{ (do tứ giác } ABMC \text{ nội tiếp)} \\ &= \frac{BD}{MD} + \frac{CD}{MD} \\ &= \frac{BC}{MD} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$



Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ca} + \frac{c^5}{ab} \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các dãy 5 số thực dương $\left\{\frac{a^5}{bc}; \frac{a^5}{bc}; \frac{a^5}{bc}; b^3; c^3\right\}; \left\{\frac{b^5}{ac}; \frac{b^5}{ac}; \frac{b^5}{ac}; a^3; c^3\right\}$ và $\left\{\frac{c^5}{ab}; \frac{c^5}{ab}; \frac{c^5}{ab}; a^3; b^3\right\}$, ta có:

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{a^5}{bc} + \frac{a^5}{bc} + b^3 + c^3 \geq 5a^3$$

$$\frac{b^5}{ac} + \frac{b^5}{ac} + \frac{b^5}{ac} + a^3 + c^3 \geq 5b^3$$

$$\frac{c^5}{ab} + \frac{c^5}{ab} + \frac{c^5}{ab} + a^3 + b^3 \geq 5c^3$$

$$\text{Suy ra: } 3\left(\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ca} + \frac{c^5}{ab}\right) + 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq 5(a^3 + b^3 + c^3) \Rightarrow \frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ca} + \frac{c^5}{ab} \geq a^3 + b^3 + c^3. \quad \square$$

———— **HẾT** ————

43 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH DƯƠNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{27};$

2) $B = \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}.$

Lời giải.

1) $A = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{27} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$

2) $B = \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 2.$

□

Câu 2. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 4x + 9$.

1) Vẽ đồ thị (P) ;

2) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song (d) và (d_1) tiếp xúc (P) .

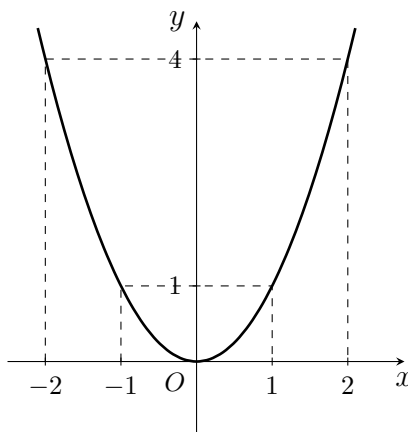
Lời giải.

1) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị



2) (d_1) song song (d) , suy ra (d_1) có phương trình: $y = 4x + b$ ($b \neq 9$).

(d_1) tiếp xúc (P) khi phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 4x + b$ (1) có nghiệm kép.

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x - b = 0$, do đó (1) có nghiệm kép khi và chỉ khi $4 + b = 0 \Leftrightarrow b = -4$.

Vậy $(d_1) : y = 4x - 4$.

□

Câu 3.

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$. Tính $P = (x + y)^{2017}$ với x, y vừa tìm được.

2) Cho phương trình $x^2 - 10mx + 9m = 0$ (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

- b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1 - 9x_2 = 0$.

Lời giải.

$$1) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 5y = 25 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 22 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$P = (2 - 1)^{2017} = 1.$$

2)

- a) Khi $m = 1$ phương trình đã cho trở thành $x^2 - 10x + 9 = 0$.

Ta có $a + b + c = 1 - 10 + 9 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = 9$;

- b) Điều kiện (1) có 2 nghiệm phân biệt là $25m^2 - 9m > 0$ (*)

Theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10m \\ x_1 - 9x_2 = 0 \\ x_1x_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_2 = 10m \\ x_1 - 9x_2 = 0 \\ x_1x_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = m \\ x_1 = 9m \\ 9m^2 - 9m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = m \\ x_1 = 9m \\ \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Với $m = 0$ ta có $25m^2 - 9m = 0$, suy ra $m = 0$ không thỏa mãn (*).

Với $m = 1$ ta có $25m^2 - 9m = 25.1^2 - 9.1 = 16 > 0$, suy ra $m = 1$ thỏa mãn (*).

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm. □

Câu 4. Hai đội công nhân đắp đê ngăn triều cường. Nếu hai đội cùng làm thì trong 6 ngày xong việc. Nếu làm riêng thì đội I hoàn thành công việc chậm hơn đội II là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội đắp xong đê trong bao nhiêu ngày?

Lời giải.

Gọi x (ngày) là thời gian làm một mình xong việc của đội I ($x > 9$), y (ngày) là thời gian làm một mình xong việc của đội II ($y > 6$). Ta có phương trình $x - y = 9$.

Trong 1 ngày lượng công việc làm được của đội I là $\frac{1}{x}$, đội II là $\frac{1}{y}$. Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$.

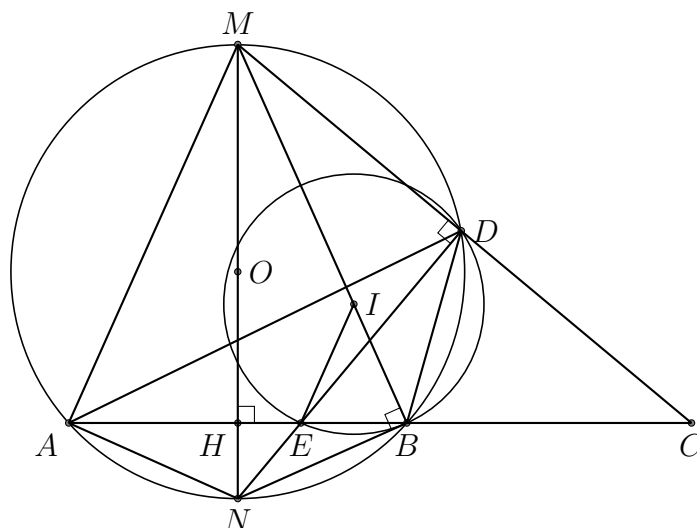
$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x - y = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + y \\ \frac{1}{9 + y} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + y \\ y^2 - 3y - 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + y \\ \begin{cases} y = 9 \\ y = -6 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 9 \end{cases}$$

Vậy thời gian làm một mình xong việc của đội I là 18 (ngày), đội II là 9 (ngày). □

Câu 5. Tam giác AMB cân tại M nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Kẻ MH vuông góc AB ($H \in AB$), MH cắt đường tròn tại N . Biết $MA = 10\text{cm}$, $AB = 12\text{cm}$.

- 1) Tính MH và bán kính R của đường tròn.
- 2) Trên tia đối tia BA lấy điểm C . Tia MC cắt đường tròn tại D , ND cắt AB tại E . Chứng minh tứ giác $MDEH$ nội tiếp và chứng minh các hệ thức sau: $NB^2 = NE \cdot ND$ và $AC \cdot BE = BC \cdot AE$.
- 3) Chứng minh NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .

Lời giải.



- 9

———— HẾT ————

44 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BÌNH THUẬN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ x + y = -2. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Do $a + b + c = 0$ nên $x = 1$ hoặc $x = 3$.
- b) $\begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3. \end{cases}$
- Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -3)$.

□

Câu 2. Cho biểu thức: $A = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{45} - \sqrt{500}$ và $B = \sqrt{20}$. Tính tích $A.B$?

Lời giải.

Ta có $A = 2\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = \sqrt{5}$, $B = 2\sqrt{5}$. Vậy $A.B = \sqrt{5}.2\sqrt{5} = 10$.

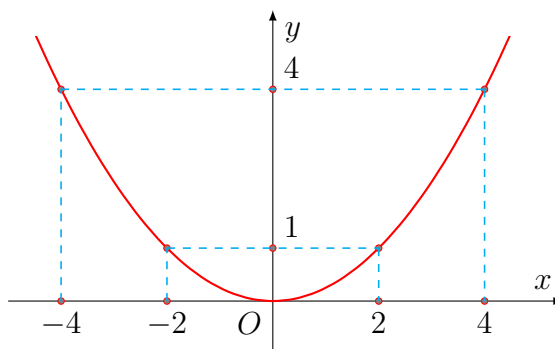
□

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) .

- a) Vẽ đồ thị (P) .
- b) Cho điểm A thuộc (P) và có hoành độ bằng 4. Tìm tham số m để đường thẳng $(d) : y = x - m$ đi qua A ?

Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.



- b) Ta có $A(4; 4)$, A thuộc $(d) : y = x - m$ khi và chỉ khi $4 = 4 - m \Leftrightarrow m = 0$.

□

Câu 4. Một nhóm học sinh có kế hoạch nhận trồng 200 cây tràm giúp cho gia đình bạn An. Vì có 2 học sinh bị bệnh không tham gia được nên mỗi học sinh còn lại phải trồng thêm 5 cây so với

dự định để hoàn thành kế hoạch (Biết số cây mỗi học sinh trồng là như nhau). Tính số học sinh thực tế đã tham gia trồng cây?

Lời giải.

Gọi số học sinh thực tế tham gia trồng cây là x ($x \in \mathbb{N}^*$), nên số học sinh ban đầu là $x + 2$. Số cây dự tính mỗi học sinh phải trồng là $\frac{200}{x+2}$.

Số cây thực tế mỗi học sinh phải trồng là $\frac{200}{x}$.

$$\text{Theo bài ta có } \frac{200}{x} = \frac{200}{x+2} + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -10. \end{cases}$$

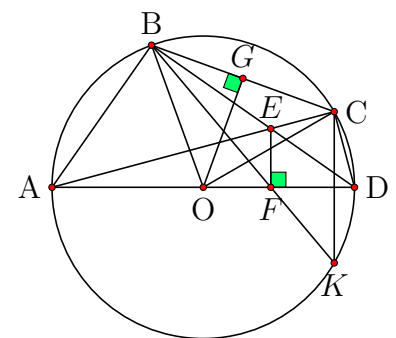
Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên số học sinh thực tế đã tham gia gia trồng cây là 8. □

Câu 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính $AD = 2R$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E . Kẻ EF vuông góc với AD tại F .

- Chứng minh: tứ giác $ABEF$ nội tiếp.
- Chứng minh: $\widehat{DBC} = \widehat{DBF}$.
- Tia BF cắt (O) tại K . Chứng minh: $EF \parallel CK$.
- Giả sử $\widehat{EFB} = 60^\circ$ tính theo R diện tích hình giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC ?

Lời giải.

- Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra tứ giác $ABEF$ có hai góc đối bằng 90° nên nội tiếp.
- Ta có $\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = \widehat{EBF}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung).
- Ta có $\widehat{EFB} = \widehat{EAB} = \widehat{CKB}$ mà góc $\widehat{EFB}$ và $\widehat{CKB}$ đồng vị nên $EF \parallel CK$.



- Ta có $\widehat{EFB} = 60^\circ$ suy ra góc $\widehat{EAB} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{ADB} = 120^\circ$ suy ra $BC = R\sqrt{3}$.

Kẻ OQ vuông góc với BC suy ra $BQ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BOQ} = 60^\circ$.

$$\text{nên } OQ = BQ \cdot \cot 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R}{2}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } BOC \text{ là: } S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot OQ = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Diện tích hình quạt } BOC \text{ là: } S_{qBOC} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120}{360} = \frac{2\pi \cdot R^2}{3}.$$

Vậy diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC là:

$$S_{vp} = S_{qBOC} - S_{BOC} = \frac{2\pi \cdot R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

□

———— HẾT ————

45 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC CÀ MAU

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{2a^2 + 4}{1 - a^2} - \frac{1}{1 + \sqrt{a}} - \frac{1}{1 - \sqrt{a}}$ (với $a \geq 0; a \neq 1$).

- Rút gọn biểu thức A .
- Khi $a > 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A .

Lời giải.

$$a) A = \frac{2a^2 + 4}{1 - a^2} - \frac{2}{1 - a} = \frac{2(a^2 - a + 1)}{1 - a^2}.$$

$$b) 2a^2 - 2a + 2 = \sqrt{3}(a^2 - 1) + (2 - \sqrt{3})a^2 - 2a + 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3}(a^2 - 1) + \frac{a^2 - 2(2 + \sqrt{3})a + (2 + \sqrt{3})^2}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A = -\sqrt{3} + \frac{(a - 2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(1 - a^2)}.$$

Vì $a > 1$ nên $1 - a^2 < 0 \Rightarrow A \leq -\sqrt{3}$. Dấu = xảy ra khi $a = 2 + \sqrt{3}$ (thỏa mãn $a > 1$).

Kết luận: với $a > 1$, giá trị lớn nhất của A là $-\sqrt{3}$ khi $a = 2 + \sqrt{3}$. □

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m \\ mx + y = 1 \end{cases}$

- Giải hệ phương trình khi $m = 2$.
- Xác định giá trị của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đường thẳng $y = -mx + 1$ tại một điểm nằm trên parabol $y = -2x^2$.

Lời giải.

$$a) \text{ Với } m = 2: \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

b) Xét phương trình hoành độ $-mx + 1 = -x + m \Leftrightarrow (m - 1)x = 1 - m (*)$.

- Với $m = 1$ ta có phương trình $(*)$ có vô số nghiệm.
- Với $m \neq 1$ thì $x = -1 \Rightarrow y = m + 1$. Thay $x = -1, y = m + 1$ vào $y = -2x^2$ ta có $m + 1 = -2(-1)^2 \Rightarrow m = -3$.

Kết luận: $m = -3$ thỏa mãn đề bài. □

Câu 3. Người ta hòa 8 kg chất lỏng loại I với 6 kg chất lỏng loại II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi loại chất lỏng, biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng loại I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại II là 200 kg/m^3 .

Lời giải.

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng II là $x \text{ (kg/m}^3, x > 0)$

$\Rightarrow$ khối lượng riêng của chất lỏng I là $x + 200$.

Thể tích của 8 kg chất lỏng loại I là $\frac{8}{x + 200}$.

Thể tích của 6 kg chất lỏng loại II là $\frac{6}{x}$.

Thể tích của hỗn hợp gồm 8 kg chất lỏng loại I và 6 kg chất lỏng loại II là:

$$\frac{14}{700} = \frac{8}{x+200} + \frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2 - 500x - 60000 = 0 \Leftrightarrow x = 600 \text{ (TM) hoặc } x = -100 \text{ (loại)}$$

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng I là 800 kg/m^3 và khối lượng riêng của chất lỏng II là 600 kg/m^3 . $\square$

Câu 4. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(k-2)x - 2k - 5 = 0$ (với k là tham số).

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị k .
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị k sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 18$.

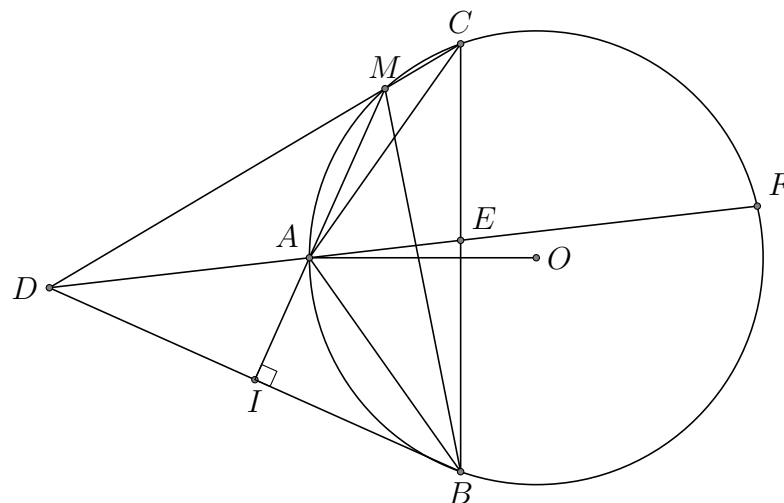
Lời giải.

- Ta có $\Delta = [-2(k-2)]^2 - 4(-2k-5) = 4(k^2 - 2k + 9) = 4[(k-1)^2 + 8] \geq 32 > 0$ với mọi $k \Rightarrow$ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.
- Áp dụng Viet ta có $x_1 + x_2 = 2(k-2)$, $x_1 x_2 = -2k - 5$.
 $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4(k-2)^2 + 2(2k+5) = 2(2k^2 - 6k + 13)$.
 Theo đề bài $x_1^2 + x_2^2 = 18 \Leftrightarrow 2k^2 - 6k + 13 = 9 \Leftrightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1, k = 2$. $\square$

Câu 5. Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{BC}$. Lấy điểm M bất kỳ trên cung nhỏ $\widehat{AC}$, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D .

- Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$.
- Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và $\widehat{BDC}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M .
- Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{AMD} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).
 Vì $AMCB$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{AMC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ABC}$.
 Vì A là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$ nên $AB = AC \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{AMB} = \widehat{AMD} \Rightarrow MA$ là tia phân giác $\widehat{BMD}$.
- b) Vì MA là tia phân giác góc $\widehat{BMD}$ và $MA \perp BD$ tại I nên I là trung điểm $BD \Rightarrow \triangle BAD$ cân tại $A \Rightarrow AB = AD \Rightarrow AB = AC = AD \Rightarrow A$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.
 Xét đường tròn (A) ta có $\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Mà dây BC cố định nên $\widehat{BAC}$ không đổi (do $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp (O)). Do đó $\widehat{BDC}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .
- c) Xét (O) có $\widehat{BFA} = \widehat{BCA} = \widehat{ABC}$ (tính chất góc nội tiếp).
 Do đó $\triangle AEB \sim \triangle ABF \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AF \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BEF$.

□

———— HẾT ————

46 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC CẦN THƠ

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau trên tập số thực.

a) $2x^2 - 9x + 10 = 0$; b) $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$; c) $(x-1)^4 - 8(x-1)^2 - 9 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 81 - 80 = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{9-1}{2 \cdot 2} = 2$ và $x_2 = \frac{9+1}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$.

b)

Cách 1. Phương pháp thế:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x - 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 10 \\ 3(3y + 10) - 2y = 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 10 \\ 7y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Cách 2. Phương pháp cộng đại số:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x - 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 3x - 9y = 30 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 7y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

c) Đặt $t = (x-1)^2 \geq 0$. Phương trình trở thành $\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 8t - 9 = 0 \end{cases}$ hay $t = 9$. Do đó $(x-1)^2 = 9$
hay $x = -2$ hoặc $x = 4$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2; 4\}$. □

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d : y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

a) Vẽ đồ thị (P) ;

b) Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ lần lượt là các giao điểm của (P) và d . Tính giá trị biểu thức

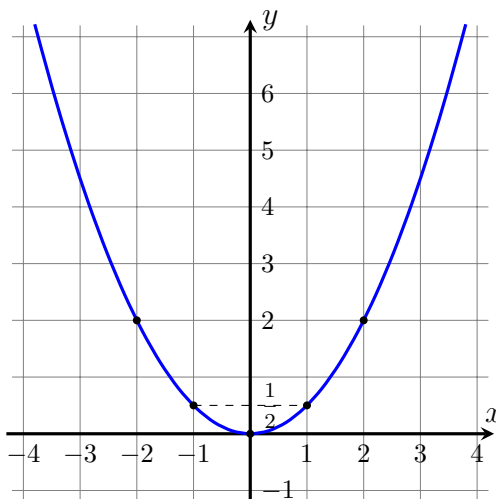
$$T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$

Lời giải.

a) Ta có bảng sau một số giá trị của x và y tương ứng

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị parabol (P)



- b) Hoàn chỉnh giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d là nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$. Phương trình trên có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -\frac{3}{2}$. Do đó

$$T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_1 + x_2}{\frac{1}{4}(x_1 + x_2) + 3} = \frac{4}{25}.$$

□

Câu 3. Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right)$ ($x > 0, x \neq 1$). Rút gọn biểu thức P và tìm các giá trị của x để $P > 1$.

Lời giải.

Với $x > 0$ và $x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}+1) - 2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Khi đó $P > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$.

Kết hợp với điều kiện ta được $P > 1$ khi và chỉ khi $0 < x < 4$ và $x \neq 1$. □

Câu 4. Để chuẩn bị tham gia Hội khỏe Phù Đổng cấp trường, thầy Thành là giáo viên chủ nhiệm lớp 9A tổ chức cho học sinh trong lớp thi đấu môn bóng bàn ở nội dung đánh đôi nam nữ (một nam kết hợp một nữ). Thầy Thành chọn $\frac{1}{2}$ số học sinh nam kết hợp với $\frac{5}{8}$ số học sinh nữ của lớp để lập thành các cặp thi đấu. Sau khi đã chọn được số học sinh tham gia thi đấu thì lớp 9A còn lại 16 học sinh làm cổ động viên. Hỏi lớp 9A có tất cả bao nhiêu học sinh?

Lời giải.

Gọi số học sinh nam và số học sinh nữ của lớp 9A lần lượt là x và y .

Thầy Thành chọn $\frac{1}{2}$ số học sinh nam và $\frac{5}{8}$ số học sinh nữ tạo thành các cặp thi đấu nên $\frac{x}{2} = \frac{5y}{8}$ hay $x = \frac{5y}{4}$.

Tổng số học sinh của lớp 9A là $x + y$, số các bạn tham gia thi đấu là $\frac{x}{2} + \frac{5y}{8} = x$. Do số các bạn ở lại làm cổ động viên là 16 nên $x + y = x + 16$ hay $y = 16$. Suy ra $x = 20$.

Vậy lớp 9A có 36 học sinh. □

Câu 5. Cho phương trình $x^2 - (m+4)x - 2m^2 + 5m + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt sao cho tích của hai nghiệm này bằng -30 . Khi đó, tính tổng hai nghiệm của phương trình.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt có tích bằng -30 khi

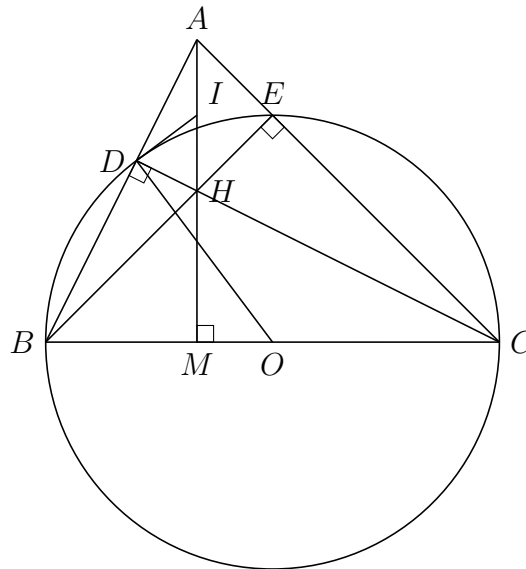
$$\begin{cases} \Delta = (m+4)^2 - 4(-2m^2 + 5m + 3) > 0 \\ -2m^2 + 5m + 3 = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2 > 0 \\ 2m^2 - 5m - 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Khi đó tổng hai nghiệm của phương trình là $m+4=1$. $\square$

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại các điểm D và E . Gọi H là giao điểm hai đường thẳng CD và BE .

- Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ nội tiếp trong một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này;
- Gọi M là giao điểm của AH và BC . Chứng minh $CM \cdot CB = CE \cdot CA$;
- Chứng minh ID là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
- Tính theo R diện tích tam giác ABC , biết $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ và $BC = 2R$.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (cùng chắn nửa đường tròn (O)). Suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ hay tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH . Từ đó I là trung điểm của AH .
- Theo câu a) thì BE , CD lần lượt là các đường cao hạ từ đỉnh B , C của tam giác ABC . Do đó H là trực tâm tam giác ABC và $AM \perp BC$. Hai tam giác CMA và CEB lần lượt vuông tại M và E có chung góc đỉnh C nên $\triangle CMA \sim \triangle CEB$ (g.g). Suy ra $\frac{CM}{CE} = \frac{CA}{CB}$ hay $CM \cdot CB = CE \cdot CA$.
- Tam giác IAD cân tại I do $IA = ID$ (câu a)) nên $\widehat{IDA} = \widehat{IAD}$. Tương tự $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$. Lại có $\widehat{IAD} = \widehat{OCD}$ (cùng phụ góc $\widehat{ABC}$) nên $\widehat{IDA} = \widehat{ODC}$. Suy ra

$$\widehat{IDO} = \widehat{IDH} + \widehat{ODC} = \widehat{IDH} + \widehat{IDA} = 90^\circ.$$

Vậy ID là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

- Ta có

$$\begin{cases} AM = BM \tan 45^\circ = BM \\ AM = CM \tan 60^\circ = \sqrt{3}CM \Rightarrow BM \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2R \Rightarrow AM = BM = (3 - \sqrt{3})R. \\ BM + CM = 2R \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = (3 - \sqrt{3}) R^2.$$

□

———— HẾT ————

47 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC CAO BẰNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- Thực hiện phép tính: $21 - \sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.
- Giải phương trình: $3x - 5 = x + 2$.
- Biết rằng với $x = 4$ thì hàm số $y = 2x + b$ có giá trị bằng 5. Tìm b .
- Giải phương trình: $2x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2}$.

Lời giải.

- $21 - \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 21 - \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5^2} = 21 - 4 \cdot 5 = 1$.
- $3x - 5 = x + 2 \Leftrightarrow 3x - x = 5 + 2 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$.
- $5 = 2 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 5 - 8 \Leftrightarrow b = -3$.
- Ta có $\Delta = (1 - 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-\sqrt{2}) = 9 + 4\sqrt{2} = (2\sqrt{2} + 1)^2$
suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:
 $x_1 = \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1}{4} = \frac{1}{2}$ và $x_2 = \frac{1 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 1}{4} = -\sqrt{2}$.

□

Câu 2. Một người đi xe đạp từ A tới B với vận tốc không đổi. Khi từ B trở về A , người đó tăng vận tốc 4 km/h so với lúc đi, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi biết rằng quãng đường AB dài 24 km.

Lời giải.

Đổi 30 phút = $\frac{1}{2}$ h

Gọi x km/h là vận tốc lúc đi ($x > 0$).

Khi đó vận tốc lúc về là: $x + 4$ km/h

Thời gian khi xe đi từ A đến B là: $\frac{24}{x}$ (h)

Thời gian khi xe về từ B đến A là: $\frac{24}{x + 4}$ (h)

Theo đề ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{24}{x} - \frac{24}{x + 4} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 48(x + 4) - 48(x) &= x(x + 4) \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -16 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc lúc đi là 12 km/h.

□

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm.

- Tính cạnh BC .
- Kẻ đường cao AH . Tính AH .

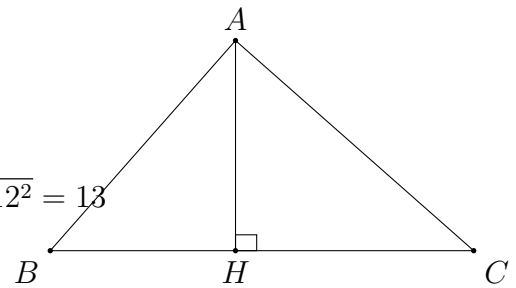
Lời giải.

- a) Áp dụng định lý Pi-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

Vậy $BC = 13$ (cm).

- b) Ta có $AH \cdot BC = AB \cdot AC$
 $\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$ (cm)



□

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Từ A và B kẻ tiếp tuyến Ax và By (Ax và By cùng thuộc nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn (O)). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M không trùng với A và B) kẻ tiếp tuyến thứ 3 cắt tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại E và F .

- a) Chứng minh tứ giác $AEMO$ là tứ giác nội tiếp.
 b) AM cắt OE tại P , BM cắt OF tại Q . Chứng minh tứ giác $MPOQ$ là hình chữ nhật.

Lời giải.

- a) Vì Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $Ax \perp AB$ hay $\widehat{OAE} = 90^\circ$.

Vì ME là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $ME \perp MO$ hay $\widehat{OME} = 90^\circ$.

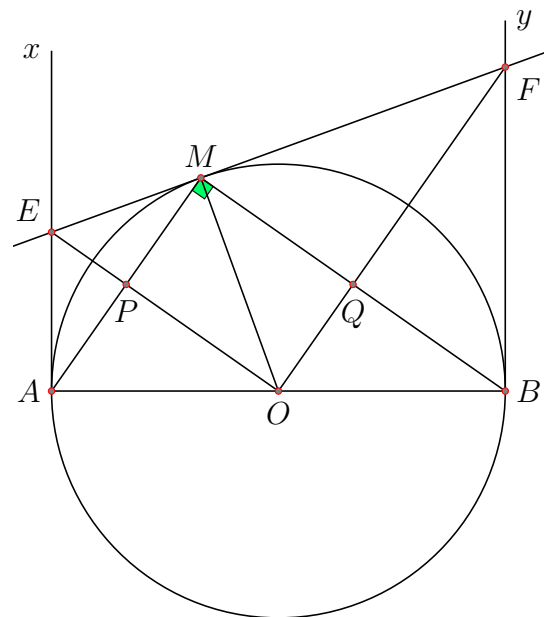
Tứ giác $AEMO$ có $\widehat{OME} + \widehat{OAE} = 180^\circ$ nên tứ giác $AEMO$ nội tiếp.

- b) Ta có $\begin{cases} EM = EA \text{ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)} \\ OA = OM \text{ (cùng bán kính)} \end{cases}$
 $\Rightarrow EO$ là đường trung trực của AM
 $\Rightarrow EM \perp AM$ hay $\widehat{OPM} = 90^\circ$.

Tương tự: $\widehat{OQM} = 90^\circ$

Mặt khác: M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$

Vậy tứ giác $MPOQ$ là hình chữ nhật.



□

Câu 5. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$ (m là tham số). Hãy tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ sao cho biểu thức $P = xy + 2(x + y)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải.

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ xy = m^2 - 3 \end{cases}$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4(m^2 - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Ta có: $P = xy + 2(x + y) = m^2 - 3 + 2m = (m + 1)^2 - 4$

Vì $-2 \leq m \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq (m + 1)^2 \leq 9 \Rightarrow P \geq -4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -4 , dấu " $=$ " xảy ra khi $m = -1$. □

———— HẾT ————

48

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC ĐẮKLAK

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải phương trình $5x - 18 = 3x + 24$.
- b) Rút gọn biểu thức $\sqrt{4x} + \sqrt{9x} - \sqrt{16x}$ với $x \geq 0$.
- c) Tìm x để biểu thức $A = \sqrt{5 - 3x}$ có nghĩa.

Lời giải.

- a) $5x - 18 = 3x + 24 \Leftrightarrow 5x - 3x = 24 + 18 \Leftrightarrow 2x = 42 \Leftrightarrow x = 21$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 21$

- b) Với $x \geq 0$ thì

$$\sqrt{4x} + \sqrt{9x} - \sqrt{16x} = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 4\sqrt{x} = \sqrt{x}.$$

- c) Biểu thức A có nghĩa

$$\Leftrightarrow 5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$$

□

Câu 2.

- a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ 3x - y^2 = 2 \end{cases}$$

- b) Tính chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật. Biết rằng nếu tăng cả chiều dài và chiều rộng lên $4cm$ thì ta được một hình chữ nhật có diện tích tăng thêm $80cm^2$ so với diện tích của hình chữ nhật ban đầu, còn nếu tăng chiều dài lên $5cm$ và giảm chiều rộng xuống $2cm$ thì ta được một hình chữ nhật có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật ban đầu.

Lời giải.

- a) $\begin{cases} y^2 = \frac{3 - x^2}{2} \\ 3x - y^2 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3 - x^2}{2} \\ 3x - \frac{3 - x^2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3 - x^2}{2} \\ 6x - (3 - x^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3 - x^2}{2} \\ x^2 + 6x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3 - x^2}{2} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -7 \text{ (Loại)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 1); (1; -1)$

- b) Gọi $x, y(cm)$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật lúc đầu ($x \geq y > 2$)

Khi đó: Diện tích hình chữ nhật sau khi tăng hai kích thước là $(x + 4)(y + 4)(cm^2)$. Diện tích hình chữ nhật sau khi tăng chiều dài, giảm chiều rộng $(x + 5)(y - 2)(cm^2)$.

Theo đề ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x + 4)(y + 4) - xy = 80 \\ (x + 5)(y - 2) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 16 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Vậy chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu là $10cm; 6cm$

□

Câu 3.

- Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+2)x + 6m + 2 = 0$ có hai nghiệm mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.
- Tìm tất cả các giá trị m là số nguyên khác $\neq 1$ sao cho giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = (m+2)x$ và $y = x + m^2 + 2$ có tọa độ là các số nguyên.

Lời giải.

- Phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = (m+2)^2 - (6m+2) \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 1 \geq 0$ (Đúng với mọi m)

Theo vi ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) & (a) \\ x_1 x_2 = 6m + 2 & (b) \end{cases}$$

Theo giả thiết giả sử $x_1 = 2x_2$ ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 3x_2 = 2(m+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4(m+2)}{3} \\ x_2 = \frac{2(m+2)}{3} \end{cases}$$

Thay vào (b) ta được:

$$\frac{4(m+2)}{3} \cdot \frac{2(m+2)}{3} = 6m + 2 \Leftrightarrow 4m^2 - 11m + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = \frac{7}{4}$

- Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} y = (m+2)x \\ y = x + m^2 + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x = x + m^2 + 2 \\ y = (m+2)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x = m^2 + 2 \\ y = (m+2)x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2 + 2}{m+1} = m - 1 + \frac{3}{m+1} \\ y = (m+2) \frac{m^2 + 2}{m+1} \end{cases} \quad (\text{Do } m \neq 1)$$

Do đó $x \in \mathbb{Z} (m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow m+1 \in (3) = \{-1; 1; -3; 3\} \Rightarrow m \in \{0; -2; 2; 4\}$

+) $m = 0 \Rightarrow y = 4 \in \mathbb{Z}; m = -1 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{Z}; m = 2 \Rightarrow y = 8 \in \mathbb{Z}; m = -4 \Rightarrow y = 12 \in \mathbb{Z}$

Vậy $m \in \{0; -2; 2; 4\}$ thì giao điểm của 2 đồ thị có tọa độ là các số nguyên

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một đường thẳng d cố định không giao nhau. Hạ OH vuông góc với d . M là một điểm tùy ý trên d (M không trùng với H). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn $(O; R)$ (P, Q là các tiếp điểm và tia MQ nằm giữa hai tia MH và MO). Dây cung PQ cắt OH và OM lần lượt tại I và K .

- Chứng minh rằng tứ giác $OMHQ$ nội tiếp.
- Chứng minh rằng $\widehat{OMH} = \widehat{OIP}$.
- Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì điểm I luôn cố định.
- Biết $OH = R\sqrt{2}$, tính $IP \cdot IQ$.

Lời giải.

1) Chứng minh rằng tứ giác $OMHQ$ nội tiếp.

$\widehat{OHM} = 90^\circ (OH \perp d)$; $\widehat{OQM} = 90^\circ (MQ \text{ là tiếp tuyến của } (O) \text{ tại } Q)$

Vậy tứ giác $OMHQ$ là nội tiếp (đpcm).

2) Chứng minh rằng $\widehat{OMH} = \widehat{OIP}$.

$OP = OQ (= R)$; $MP = MQ$ (MP, MQ là hai tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow OM$ là trung trực PQ

$\Rightarrow OM \perp PQ \Rightarrow \widehat{OKI} = 90^\circ$

Do đó: $\widehat{OIP} + \widehat{HOM} = 90^\circ (\triangle OIK, \widehat{OKI} = 90^\circ)$;

$\widehat{OMH} + \widehat{HOM} = 90^\circ (\triangle OHM, \widehat{OHM} = 90^\circ) \Rightarrow \widehat{OMH} = \widehat{OIP}$.

3) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì điểm I luôn cố định.

Xét $\triangle OIK$ và $\triangle OMH$ có: $\widehat{OIK} = \widehat{OMH}$ (cmt), $\widehat{OKI} = \widehat{OHM} = 90^\circ$

vậy $\triangle OIK \sim \triangle OMH$ (g-g) $\Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Rightarrow OI.OH = OK.OM$ (a)

Xét $\triangle OPM$ có: $\widehat{OPM} = 90^\circ$, $PK \perp OM \Rightarrow OK.OM = OP^2 = R^2$ (b)

từ (a); (b) $OI.OH = R^2$ không đổi mà O, d cố định nên OH không đổi $\Rightarrow OI$ không đổi $\Rightarrow I$ cố định (do I thuộc đường thẳng OH cố định)

4) Biết $OH = R\sqrt{2}$, tính $IP.IQ$.

Ta có $OI.OH = R^2 \Rightarrow OI = \frac{R^2}{OH} = \frac{R^2}{R\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow IH = OH - OI = R\sqrt{2} - \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$

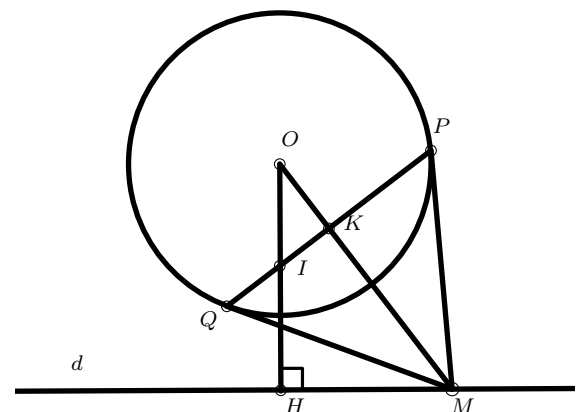
Ta có $\widehat{OHM} = \widehat{OQM} = \widehat{OPM} = 90^\circ$ (theo trên và MP là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow M, P, O, Q, H$ cùng thuộc một đường tròn đường kính OM

Xét $\triangle OIP$ và $\triangle QIH$ có: $\widehat{OIP} = \widehat{QIH}$; $\widehat{OPI} = \widehat{QHI}$

(góc nội tiếp cùng chắn cung OQ) vậy $\triangle OIP = \triangle QIH$ (g - g) $\Rightarrow \frac{IP}{IO} = \frac{IH}{IQ}$ (dd) $\Rightarrow IP.IQ =$

$IO.IH = \frac{R^2}{2}$.



□

Câu 5. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $xy = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = x^2 + y^2 + \frac{3}{x + y + 1}.$$

Lời giải.

Ta có $(x + y)^2 \geq 4xy = 4 \Rightarrow x + y \geq 2$ (vì $x + y > 0$)

Đặt $t = x + y \geq 2$.

Ta có: $M = x^2 + y^2 + \frac{3}{x + y + 1} = (x + y)^2 + \frac{3}{x + y + 1} - 2xy = t^2 + \frac{3}{t + 1} - 2 = \frac{t^3 + t^2 - 2t + 1}{t + 1}$

$M - 3 = \frac{t^3 + t^2 - 2t + 1}{t + 1} - 3 = \frac{t^3 + t^2 - 5t - 2}{t + 1} = \frac{(t - 2)(t^2 + 3t + 1)}{t + 1} \geq 0$ (vì $t \geq 2$)

$M \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$. Vậy $\min M = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$ $\square$

———— HẾT ————

49 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC ĐÀ NẴNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tính $A = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$.
 b) Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.

Lời giải.

- a) Tính $A = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$.
 Ta có: $A = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
 b) Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.
 $B = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{5 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 4} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$. $\square$

Câu 2.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$.
 b) Giải phương trình $\frac{10}{x^2 - 4} + \frac{1}{2 - x} = 1$.

Lời giải.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$.
 $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x = 2 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2 - 3y) - 3y = 4 \\ x = 2 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.
 b) Giải phương trình $\frac{10}{x^2 - 4} + \frac{1}{2 - x} = 1$.
 Điều kiện: $x \neq 2; x \neq -2$.
 $\frac{10}{x^2 - 4} + \frac{1}{2 - x} = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{1}{x - 2} = 1 \Leftrightarrow 10 - (x + 2) = (x - 2)(x + 2) \Leftrightarrow$
 $x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$.
 Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-4; 3\}$. $\square$

Câu 3. Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = mx + 4$, với m là tham số.

- a) Khi $m = 3$, tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số trên.
 b) Chứng minh rằng với mọi giá trị m , đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1; y_1)$ và $A_2(x_2; y_2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $(y_1)^2 + (y_2)^2 = 7^2$.

Lời giải.

- a) Với $m = 3$ ta có hàm số $y = mx + 4$ trở thành $y = 3x + 4$.
 Hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 3x + 4$ là nghiệm của phương trình:
 $x^2 = 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$.
 Khi $x = -1$, $y = 1$. Khi $x = 4$, $y = 16$.
 Vậy hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm $A_1(-1; 1)$ và $A_2(4; 16)$.

$$x^2 = 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 1) \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases} \Rightarrow B(4; 16) \end{cases}.$$

Vậy với $m = 3$ thì hai đồ thị trên cắt nhau tại hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(4; 16)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0. \quad (*)$$

Số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm của phương trình (*).

Phương trình (*) có $\Delta = m^2 - 4.(-4) = m^2 + 16 > 0, \forall m$.

Suy ra phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Hay hai đồ thị hàm số luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$.

Theo đề bài: $y_1^2 + y_2^2 = 7^2 \Leftrightarrow (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = 49 \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 49$

$$\Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 49 \Leftrightarrow [m^2 - 2(-4)]^2 - 2.(-4)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 8)^2 = 81 \Leftrightarrow m^2 + 8 = 9 \text{ (do } m^2 + 8 > 0) \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Vậy $m = \pm 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

□

Câu 4. Một đội xe vận chuyển 160 tấn gạo với khối lượng gạo mỗi xe chở bằng nhau. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 4 nữa nên mỗi xe chở ít hơn dự định lúc đầu là 2 tấn gạo (khối lượng gạo mỗi xe chở vẫn bằng nhau). Hỏi mỗi đội xe ban đầu có bao nhiêu chiếc?

Lời giải.

Gọi số xe ban đầu là x (chiếc xe), ($x \in \mathbb{N}^*$).

Đội xe cần vận chuyển 160 tấn gạo nên mỗi chở số tấn gạo là $\frac{160}{x}$ (tấn gạo).

Sau khi được bổ sung thêm 4 xe thì số xe vận chuyển gạo là $x + 4$ (chiếc xe).

Số tấn gạo mỗi xe phải chở sau khi bổ sung thêm xe là $\frac{160}{x+4}$ (tấn gạo).

Theo đề bài ta có, lúc sau mỗi xe chở ít hơn so với dự định 2 tấn gạo nên ta có phương trình:

$$\frac{160}{x} - \frac{160}{x+4} = 2 \Leftrightarrow 80(x+4-x) = x(x+4) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 320 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -20 \text{ (không thỏa mãn)} \\ x = 16 \text{ (tỏa mãn)} \end{cases}.$$

Vậy lúc đầu, đội có 16 xe.

□

Câu 5. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và C là một điểm trên nửa đường tròn (C khác A và B). Trên cung AC lấy điểm D (D khác A và C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB và E là giao điểm của BD và CH .

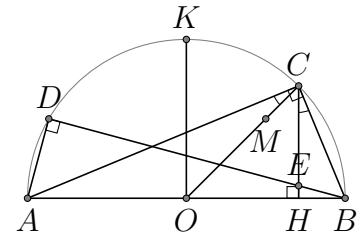
a) Chứng minh $ADEH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ACO} = \widehat{HCB}$ và $AB.AC = AC.AH + CB.CH$.

c) Trên đoạn OC lấy điểm M sao cho $OM = CH$. Chứng minh rằng khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho thì M chạy trên một đường cố định.

Lời giải.

- a) Ta có: $\widehat{ADE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\widehat{AHE} = 90^\circ$ (do $CH \perp AB$)
 Suy ra $\widehat{ADE} + \widehat{AHE} = 180^\circ$ suy ra, tứ giác $ADEH$ nội tiếp.
 b) Ta có: $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$ ($\triangle OAC$ cân tại O).
 $\widehat{ACO} = \widehat{HCB}$ (cùng phụ $\widehat{CBH}$).



Suy ra: $\widehat{ACO} = \widehat{HCB}$. (đpcm) (1)

Xét $\triangle ACB$ và $\triangle CHB$ có: $\widehat{ACB} = \widehat{CHB} = 90^\circ$, $\widehat{ABC}$ chung.

Suy ra $\triangle ACB \sim \triangle CHB \Rightarrow \frac{AC}{CH} = \frac{BC}{BH} \Rightarrow AC.BH = CB.CH$. (2)

Mà $BH = AB - AH$ thay vào (2) ta được: $AC.AB = AC.AH + CB.CH$ (đpcm)

c) Gọi K là điểm chính giữa cung AB (chứa điểm C). Suy ra $OK \perp AB \Rightarrow OK \parallel HC$.

Xét $\triangle OMK$ và $\triangle CHO$ có: $\widehat{MOK} = \widehat{HCO}$ (so le trong), $OM = CH$ (giả thiết), $OK = CO$ (cùng bằng bán kính)

Suy ra $\triangle OMK = \triangle CHO$ (c.g.c), suy ra $\widehat{OMK} = \widehat{CHO}$ (hai góc tương ứng bằng nhau)

Mà $\widehat{CHO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OMK} = 90^\circ$.

Vậy M chạy trên đường tròn đường kính OK cố định. (đpcm) □

———— HẾT ————

50 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC TỈNH ĐỒNG NAI**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Giải phương trình $x^2 - 9x + 20 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$
- c) Giải phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Lời giải.

- a) $x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 12x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 19 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

- c) Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0$.

$$\text{Ta có } \Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-3) = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1 - \sqrt{4}}{1} \\ t = \frac{1 + \sqrt{4}}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Với $t = 3$ suy ra $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

□

Câu 2. Cho hai hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và $y = x - 4$ có đồ thị lần lượt là (P) và (d) .

- a) Vẽ hai đồ thị (P) , (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) .

Lời giải.

- a) Vẽ hai đồ thị (P) , (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

* Đồ thị hàm $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

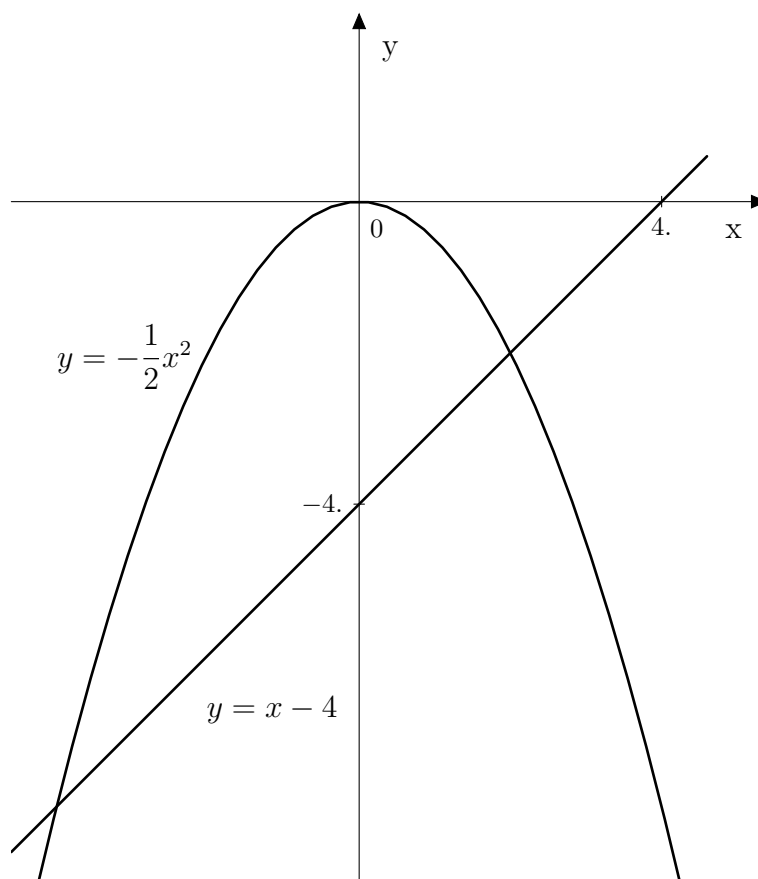
Bảng giá trị:

x	4	-2	0	2	4
y	-8	-2	0	2	-8

Nhận xét: Đồ thị hàm số là một đường parabol đi qua gốc tọa độ, nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị nằm phía dưới trục hoành.

* Đồ thị hàm $y = x - 4$.

Đồ thị hàm số $y = x - 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; -4)$ và $(4; 0)$.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$-\frac{1}{2}x^2 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = -2$.

Với $x = -4 \Rightarrow y = -8$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là: $(2; -2), (-4; -8)$.

□

Câu 3.

a) Cho $a > 0$ và $a \neq 4$. Rút gọn biểu thức $T = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right)$.

b) Một đội xe dự định chở 120 tấn hàng. Để tăng sự an toàn nên đến khi thực hiện đội xe được bổ sung thêm 4 chiếc xe, lúc này số tấn hàng của mỗi xe chở ít hơn số tấn hàng của mỗi xe dự định chở là 1 tấn. Tính số tấn hàng của mỗi xe dự định chở, biết số tấn hàng của mỗi xe chở khi dự định là bằng nhau, khi thực hiện là bằng nhau.

Lời giải.

a) Với $a > 0$ và $a \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right) = \left(\frac{(\sqrt{a}-2)^2 - (\sqrt{a}+2)^2}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} \right) \cdot \left(\frac{a-4}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \left(\frac{a-4\sqrt{a}+4-a-4\sqrt{a}-4}{a-4} \right) \cdot \left(\frac{a-4}{\sqrt{a}} \right) = \frac{-8\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = -8. \end{aligned}$$

b) Gọi x (xe) là số xe của đội lúc đầu, x nguyên dương.

Số tấn hàng mỗi xe dự định chở là $\frac{120}{x}$ (tấn).

Số xe của đội lúc sau là $x + 4$ (xe).

Số tấn hàng mỗi xe khi thực hiện chở $\frac{120}{x+4}$ (tấn).

Theo đề bài ta được phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{120}{x} - \frac{120}{x+4} &= 1 \Leftrightarrow 120(x+4) - 120x = x(x+4) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x - 480 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -24 \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số xe của đội lúc đầu là 20 xe.

□

Câu 4. Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow -4m+5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}.$$

Với $m < \frac{5}{4}$, áp dụng định lý Vi-ét, ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (1 - 2m)^2 - 2(m^2 - 1) \\ &= 2m^2 - 4m + 2 + 1 = 2(m-1)^2 + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn điều kiện $m < \frac{5}{4}$).

Vậy với $m = 1$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Biết ba góc CAB, BCA, ABC đều là góc nhọn. Gọi M là trung điểm của đoạn AH .

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $CE \cdot CO = CD \cdot CB$.

c) Chứng minh EM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .

d) Gọi I, J tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp hai tam giác BDF và EDC . Chứng minh rằng $\triangle DIJ = \triangle DFC$.

Lời giải.

1. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

BE là đường cao trong $\triangle ABC \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$

CF là đường cao trong $\triangle ABC \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$

$\Rightarrow AEHF$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh $CE.CA = CD.CB$

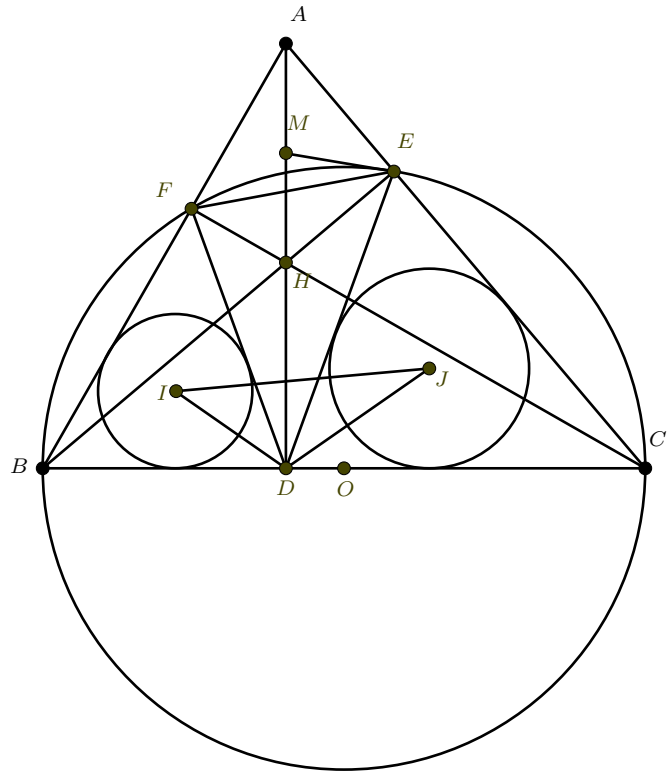
Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BEC$ có:

$$\widehat{ADC} = \widehat{BEC} (= 90^\circ)$$

Chung góc C

$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BEC$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{DC}{EC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow DC.BC = CE.AC.$$



3. Chứng minh EM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BEF$.

Ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC do $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$.

Gọi O là trung điểm của $BC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .

$\triangle OBE$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBE} = \widehat{OEB}$.

$\triangle AEH$ vuông tại E có EM là đường trung tuyến

$\Rightarrow ME = MH = MA \Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{MHE} = \widehat{BHD}$.

Mà $\widehat{BHD} + \widehat{OBE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OEB} + \widehat{MEH} = 90^\circ$

$\Rightarrow EM \perp OE$ tại $E \Rightarrow EM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .

4. Chứng minh $\triangle DIJ \sim \triangle DFC$.

Tứ giác $AFDC$ nội tiếp do $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BAC}$.

Lại có $\widehat{ABC} = \widehat{DBF} \Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle BAC$ (g-g)

Chứng minh tương tự, ta có $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ (g-g)

Do đó $\triangle DBF \sim \triangle DEC \Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{EDC}$

$\Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{IDF} = \widehat{EDJ} = \widehat{JDC} \Rightarrow \widehat{IDJ} = \widehat{FDC}$ (1).

Vì $\triangle DBF \sim \triangle DEC$ và DI, DJ là các đường phân giác nên $\frac{DI}{DF} = \frac{DJ}{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle DIJ \sim \triangle DFC \Rightarrow \widehat{DIJ} = \widehat{DFC}$. □

———— HẾT ————

51 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC GIA LAI

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = -4. \end{cases}$
- b) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, với $x > 0, x \neq 1$.

Lời giải.

- a) Ta có $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (-1; 2)$.

- b) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

□

Câu 2.

- a) Phân tích $5x + 7\sqrt{xy} - 6y + \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ thành nhân tử, với x, y là các số không âm.
- b) Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = (m^2 - m + 2017)x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- a) Ta có:

$$\begin{aligned} 5x + 7\sqrt{xy} - 6y + \sqrt{x} + 2\sqrt{y} &= 5x + 10\sqrt{xy} - 3\sqrt{xy} - 6y + \sqrt{x} + 2\sqrt{y} \\ &= 5\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) - 3\sqrt{y}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) + \sqrt{x} + 2\sqrt{y} \\ &= (\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 1). \end{aligned}$$

- b) Hàm số $y = (m^2 - m + 2017)x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$m^2 - m + 2017 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8067}{4} > 0. \quad (1)$$

Do $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ nên (1) luôn đúng với mọi số $m \in \mathbb{R}$. Vậy với mọi số $m \in \mathbb{R}$, hàm số $y = (m^2 - m + 2017)x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

□

Câu 3.

- a) Một tổ công nhân may lập kế hoạch may 60 bộ quần áo. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ này may nhiều hơn kế hoạch 2 bộ nên đã hoàn thành công việc ít hơn kế hoạch 1 ngày. Biết rằng số bộ quần áo may trong mỗi ngày như nhau. Hỏi tổ công nhân may đã lập kế hoạch để hoàn thành công việc trong bao nhiêu ngày?

- b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 14 = 0$.

Lời giải.

- a) Gọi số ngày tổ may hoàn thành công việc theo kế hoạch là x (ngày) ($x > 1$).

Theo kế hoạch, số bộ quần áo may trong một ngày là $\frac{60}{x}$ (bộ).

Thực tế, số bộ quần áo may được trong một ngày là $\frac{60}{x-1}$ (bộ).

Ta được phương trình

$$\frac{60}{x-1} - \frac{60}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -5. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x > 1$, ta nhận nghiệm $x = 6$. Vậy theo kế hoạch tổ công nhân may 60 bộ quần áo trong 6 ngày.

- b) Phương trình đã cho có hai nghiệm khi $\Delta' = 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Áp dụng định lý Vi-ét, ta được $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 \cdot x_2 = m - 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 14 = 0 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - 3(m - 1) + (m - 1)^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $m \leq 2$, ta được giá trị cần tìm là $m = -1$.

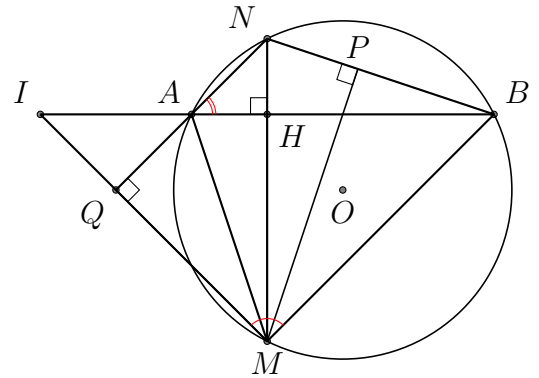
□

Câu 4. Cho đường tròn (O) có AB là một dây cung cố định không qua O . Từ một điểm M bất kì trên cung lớn AB (M không trùng với A và B) kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại H . Gọi MQ là đường cao của tam giác AMN (Q thuộc đường thẳng AN).

- Chứng minh các điểm A, M, H, Q cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi I là giao điểm của AB và MQ . Chứng minh tam giác BIM cân.
- Kẻ MP vuông góc với BN tại P . Xác định vị trí của M sao cho $MQ \cdot AN + MP \cdot BN$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

- a) Ta có $\widehat{AHM} = \widehat{AQM} = 90^\circ$. Suy ra các điểm A, M, H, Q cùng nằm trên một đường tròn (đó là đường tròn đường kính AM).
- b) Ta có $\widehat{BMN} = \widehat{BAN}$, $\widehat{BAN} = \widehat{HMQ}$. Suy ra $\widehat{BMN} = \widehat{HMQ}$. Do đó tam giác BMI cân tại M .
- c) Ta có: $MQ \cdot AN + MP \cdot BN$
 $= 2(S_{MAN} + S_{MBN}) = 2 \cdot S_{AMBN} = AB \cdot MN$.
 Do đó $MQ \cdot AN + MP \cdot BN$ đạt giá trị lớn nhất khi MN lớn nhất, hay MN là đường kính của (O) .
 Khi đó M nằm chính giữa cung $\widehat{AB}$.



□

Câu 5. Tìm các chữ số a, b, c biết $\overline{abc} - \overline{ac} = 2\overline{cb} + \overline{bc}$.

Lời giải.

Ta có $\overline{abc} - \overline{ac} = 2\overline{cb} + \overline{bc} \Leftrightarrow 90a = 2b + 21c$.

Vì a, b, c là các chữ số khác 0 nên $23 \leq 2b + 21c = 90a \leq 2 \cdot 9 + 21 \cdot 9 \leq 207$. Do đó $a \in \{1; 2\}$.

Với $a = 1$ thì $90a = 2b + 21c \Leftrightarrow 21c = 90 - 2b \Rightarrow 72 \leq 21c \leq 88 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow b = 3$.

Vậy $a = 1, b = 3, c = 4$.

Với $a = 2$ thì $90a = 2b + 21c \Leftrightarrow 21c = 180 - 2b \Rightarrow 162 \leq 21c \leq 178 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow b = 6$.

Vậy $a = 2, b = 6, c = 8$.

□

————— **HẾT** —————

52 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GD-ĐT HẢI DƯƠNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1) $(2x - 1)(x + 2) = 0.$

2) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3 - x = y. \end{cases}$

Lời giải.

1) Ta có : $(2x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm : $x = \frac{1}{2}$ và $x = -2$.

2) Ta có : $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3 - x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 - x = 5 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

□

Câu 2.

1) Cho hai đường thẳng $(d) : y = -x + m + 2$ và $(d') : y = (m^2 - 2)x + 3$. Tìm m để (d) và (d') song song với nhau.

2) Rút gọn biểu thức : $P = \left(\frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{x}{x - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$, với $x > 0; x \neq 1; x \neq 4$.

Lời giải.

1) $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = m^2 - 2 \\ m + 2 \neq 3 \end{cases} \Rightarrow m = -1.$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{x}{x - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} = \left[\frac{x - \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \right] : \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{-2}{\sqrt{x} + 1}.$

□

Câu 3.

1) Tháng đầu, hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai, do cải tiến kỹ thuật nên tổ I vượt mức 10% và tổ II vượt mức 12% so với tháng đầu, vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1000 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

2) Tìm m để phương trình $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$ (với m là tham số) có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 = 75$

Lời giải.

- 1) Gọi số chi tiết máy tháng đầu của tổ I là x chi tiết (x nguyên dương, $x < 900$).

Gọi số chi tiết máy tháng đầu của tổ II là y chi tiết (y nguyên dương, $y < 900$).

$$\text{Theo đề bài ta có hệ: } \begin{cases} x + y = 900 \\ 1, 1x + 1, 12y = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 500 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tháng đầu tổ I sản xuất được 400 chi tiết máy, tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy.

- 2) $\Delta = 29 - 12m$

Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow m \leq \frac{29}{12}$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = 3m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -5 - x_1 \\ x_1 \cdot x_2 = 3m - 1 \end{cases}$$

Mặt khác, theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 &= 75 \\ \Leftrightarrow x_1^3 + (5 + x_1)^3 - 3x_1(5 + x_1) &= 75 \\ \Leftrightarrow x_1^3 + 6x_1^2 + 30x_1 + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_1^2 + 5x_1 + 25) &= 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = -4 \end{aligned}$$

$$\text{Thay vào hệ thức } x_1 \cdot x_2 = 3m - 1 \Rightarrow 3m - 1 = 4 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = \frac{5}{3}$.

□

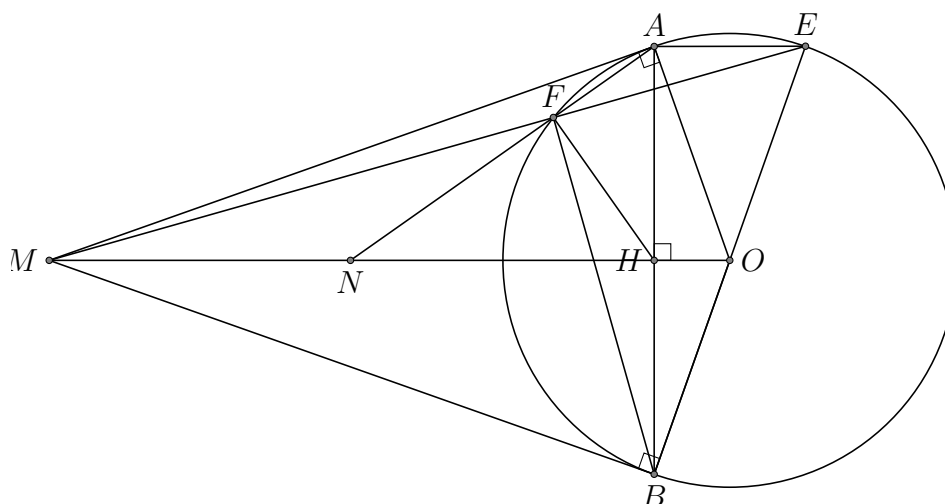
Câu 4. Cho đường tròn tâm O , bán kính R . Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N , H là giao điểm của MO và AB .

- 1) Chứng minh: Tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.

- 2) Chứng minh: $MN^2 = NF \cdot NA$ và $MN = NH$.

- 3) Chứng minh: $\frac{HB^2}{HF^2} = \frac{EF}{MF}$.

Lời giải.



- $$\begin{aligned} \frac{MA}{HB^2} &= \frac{HB}{HA^2} = \frac{FA \cdot NA}{HF^2} = \frac{NA}{FA \cdot FN} = \frac{NA}{NF}. \\ \text{Vì } AE \parallel MN \text{ nên } \frac{EF}{MF} &= \frac{FA}{NF} \text{ (hệ quả của định lý Ta - lét)} \\ \Rightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} &= \frac{NA}{NF} - \frac{FA}{NF} = \frac{NF}{NF} = 1. \end{aligned}$$

☐

Lời giải.

$$Q = \frac{x+1}{1+y^2} + \frac{y+1}{1+z^2} + \frac{z+1}{1+x^2} = \left(\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) =$$
$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{x(1+y^2) - xy^2}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2} \geq x - \frac{xy^2}{2y} = x - \frac{xy}{2}$$

Nên suy ra: $M = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \geq x+y+z - \frac{xy+yz+zx}{2} = 3 - \frac{xy+yz+zx}{2}.$

Lại có: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx \leq 3$.

Suy ra: $M \geq 3 - \frac{xy + yz + zx}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Xét $N = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+x^2}$, ta có:

$$\begin{aligned} 3 - N &= \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{x^2}{1+x^2} \leq \frac{y^2}{2y} + \frac{z^2}{2z} + \frac{x^2}{2x} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Suy ra: $N \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Từ đó suy ra : $Q \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là : $Q_{min} = 3$ đạt được khi $x = y = z = 1$. □

———— HẾT ————

53 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HẢI PHÒNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho hai biểu thức

$$A = 2\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}.$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \quad (\text{với } x > 0; x \neq 1).$$

- a) Rút gọn biểu thức A, B .
b) Tìm các giá trị của x sao cho giá trị biểu thức A gấp hai lần giá trị biểu thức B .

Lời giải.

- a) Ta có

$$A = 2\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = 2\sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{5^2 \cdot 2} + |\sqrt{2} + 1| = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 1.$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1}{\sqrt{x}(x - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- b) Giá trị của biểu thức A gấp hai lần giá trị của biểu thức B

$$\Leftrightarrow A = 2B \Leftrightarrow 1 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (nhận)}.$$

Vậy $x = 4$ thì giá trị của biểu thức A gấp hai lần giá trị của biểu thức B .

□

Câu 2.

- a) Tìm tất cả các giá trị của m để cả hai đường thẳng $y = 2x - m$ và $y = (m + 1)x - 1$ cùng cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -1$.
b) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x - 2(2y - 1) = 0 \\ 3x + 2y = 2(7 - x). \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Gọi A là điểm thuộc trục hoành có hoành độ $x = -1$. Khi đó $A(-1; 0)$.

Vì cả hai đường thẳng $y = 2x - m$ và $y = (m + 1)x - 1$ đều cắt trục hoành tại A nên

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - m = 0 \\ (m + 1) \cdot (-1) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

- b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 2(2y - 1) = 0 \\ 3x + 2y = 2(7 - x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ 5x + 2y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ 10x + 4y = 28 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 26 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 6 - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Câu 3.

- a) Cho phương trình: $x^2 - (m - 1)x - m = 0$ (1) (với x là ẩn số, m là tham số).

- a) Giải phương trình (1) với $m = 4$;
 b) Xác định các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện: $x_1(3 - x_2) + 20 \geq 3(3 - x_2)$.
- b) Bài toán có nội dung thực tế:

“Em có tưởng tượng được hai lá phổi (gọi tắt là phổi) của mình chứa khoảng bao nhiêu lít không khí hay không? Dung tích phổi của mỗi người phụ thuộc vào một số yếu tố, trong đó hai yếu tố quan trọng là chiều cao và độ tuổi.

Sau đây là một công thức ước tính dung tích chuẩn phổi của mỗi người:

Nam: $P = 0,057h - 0,022a - 4,23$

Nữ: $Q = 0,041h - 0,018a - 2,69$;

trong đó,

h : chiều cao tính bằng xentimét,

a : tuổi tính bằng năm,

P, Q : dung tích chuẩn của phổi tính bằng lít”...

(Toán 7, tập hai, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, tr. 29).

Bạn Hùng (nam) 15 tuổi, số đo chiều cao của bạn được biết qua bài toán sau:

Chiều cao của bạn Hùng tính bằng xentimét. Đó là một số tự nhiên có 3 chữ số, trong đó chữ số hàng trăm là 1, chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 2 và hai lần chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 4. Tính dung tích chuẩn phổi của bạn Hùng.

Lời giải.

- a)
- a) Với $m = 4$, phương trình (1) trở thành: $x^2 - 3x - 4 = 0$.
 Ta có $a = 1, b = -3, c = -4$. Vì $a - b + c = 1 + 3 - 4 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a} = 4$.
 Vậy với $m = 4$, phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 4$.
- b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$
 $\Leftrightarrow (m - 1)^2 + 4m > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.
 Do đó với $m \neq -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
 Áp dụng hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$
 Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} x_1(3 - x_2) + 20 \geq 3(3 - x_2) &\Leftrightarrow 3x_1 - x_1x_2 + 20 \geq 9 - 3x_2 \\ &\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) - x_1x_2 + 11 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3(m - 1) + m + 11 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m \geq -8 \Leftrightarrow m \geq -2. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq -1$, suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn yêu cầu bài toán khi $m \geq -2$ và $m \neq -1$.

- b) Gọi chiều cao của Hùng là số $\overline{abc}$ ($a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, a \neq 0$). Đơn vị là (cm).
 Vì chữ số hàng trăm là 1 nên $a = 1$.

Chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 2 nên: $c - b = 2$ (1).

Vì hai lần chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 4 nên: $2b - c = 4$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c - b = 2 \\ 2b - c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 + b \\ 2b - (2 + b) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 + b \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 8 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Nên chiều cao của Hùng là 168 cm.

Áp dụng công thức tính dung tích chuẩn của phổi, ta có dung tích chuẩn phổi của bạn Hùng là

$$P = 0,057.168 - 0,022.15 - 4,23 = 5,016 \text{ lít.}$$

□

Câu 4.

- a) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm).
 - a) Chứng minh rằng bốn điểm M, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn;
 - b) Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O của đường tròn đó sao cho điểm C nằm giữa hai điểm M và D . Tiếp tuyến tại điểm C và điểm D của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm N . Gọi H là giao điểm của AB và MO , K là giao điểm của CD và ON . Chứng minh rằng $OH.OM = OK.ON = R^2$;
 - c) Chứng minh rằng ba điểm A, B, N thẳng hàng.
- b) Hình trụ có đường kính đáy bằng 4 cm và chiều cao bằng đường kính đáy. Tính thể tích hình trụ (lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải.

1.

a) Ta có $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$ (vì MA và MB lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O)). Khi đó $\widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 180^\circ$. Nên $OAMB$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°). Vậy bốn điểm M, A, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xét tam giác OAM vuông tại A , $AH \perp MO$. Ta có $OA^2 = OM.OH = R^2$ (1).

Vì CN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{OCN} = 90^\circ$.

Xét tam giác ONC vuông tại C , $CK \perp ON$. Ta có $OC^2 = OK.ON = R^2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $OH.OM = OK.ON = R^2$.

c) Xét tam giác OMK và tam giác ONH có:

$\widehat{MON}$ là góc chung;

$OH.OM = OK.ON$ (chứng minh trên).

Nên $\triangle OMK \simeq \triangle ONH$.

Do đó $\widehat{OKM} = \widehat{OHN} = 90^\circ$.

Suy ra $NH \perp OM$.

Mà $AH \perp OM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên qua điểm H có AH và NH cùng vuông góc với OM . Hơn nữa A, H, B thẳng hàng. Vậy N, A, B thẳng hàng.

2. Bán kính đáy hình trụ là: $R = \frac{4}{2} = 2$ cm. Chiều cao hình trụ là: $h = 4$ cm.

Vậy thể tích hình trụ là: $V = \pi R^2 h = 3,14.2^2.4 = 50,24$ cm³.

□

Câu 5.

a) Cho hai số $x > 0, y > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

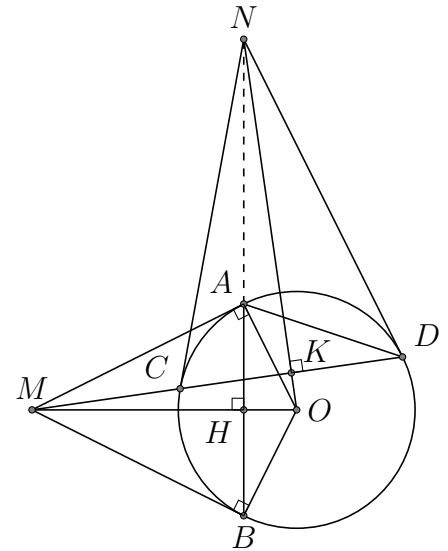
b) Cho số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 16$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a+2b+c} + \frac{1}{a+3b+2c} + \frac{1}{2a+b+3c} \leq \frac{8}{3}.$$

Lời giải.

a) Vì $x > 0, y > 0$ nên áp dụng Bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4}.$$



Suy ra

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y$.

b) Với ba số $a, b, c > 0$, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (*).$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \frac{ab+bc+ca}{abc} \\ &\Leftrightarrow 9abc \leq (a+b+c)(ab+bc+ca) \\ &\Leftrightarrow 18abc \leq (a+b+c)(2ab+2bc+2ca) \quad (**). \end{aligned}$$

Ta có: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ nên $2ab + 2bc + 2ca \leq (a+b+c)^2$.

Khi đó (**) trở thành $18abc \leq (a+b+c)^3$.

Theo Bất đẳng thức Cô-si ta có: $(a+b+c)^3 \geq 27abc \geq 18abc$.

Vậy $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$. Áp dụng bất đẳng thức

(*) và bất đẳng thức $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{3a+2b+c} + \frac{1}{a+3b+2c} + \frac{1}{2a+b+3c} \\ &= \frac{1}{a+b+a+b+a+c} + \frac{1}{a+b+b+c+b+c} + \frac{1}{a+c+b+c+a+c} \\ &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \right) \\ &\leq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \\ &= \frac{1}{36} \cdot 6 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} a+b=a+c=b+c \\ a=b=c \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{16}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. □

———— HẾT ————

54 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ NAM**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

Lời giải.

- a) Vì $a + b + c = 0$ nên $x = 1$ và $x = 3$ là nghiệm của phương trình.
- b) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ 3y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \end{cases}$

□

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $y = \frac{-x^2}{2}$ (P) và đường thẳng $y = x + m$ (d).

- a) Tìm tọa độ điểm M thuộc parabol (P) biết điểm M có tung độ bằng -8 .
- b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ phân biệt sao cho $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = \frac{33}{4}$.

Lời giải.

- a) Vì M thuộc (P) có tung độ bằng -8 nên $-\frac{x^2}{2} = -8 \Leftrightarrow x = \pm 4$. Vậy $M(-4; -8)$ hoặc $M(4; -8)$.
- b) Phương trình hoành độ giao điểm $-\frac{x^2}{2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m = 0$. Để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Ta có $y_1 = x_1 + m$, $y_2 = x_2 + m$ nên

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = \frac{33}{4} \Leftrightarrow 4x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{33}{4} \Leftrightarrow 4m^2 + 16m - 33 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} (\text{loại}) \\ m = -\frac{11}{2} (\text{TM}) \end{cases}$$

□

Câu 3.

- a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.
- b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0$, $x \neq 1$).

Rút gọn B . Tìm x là số nguyên dương khác 1 sao cho $B \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

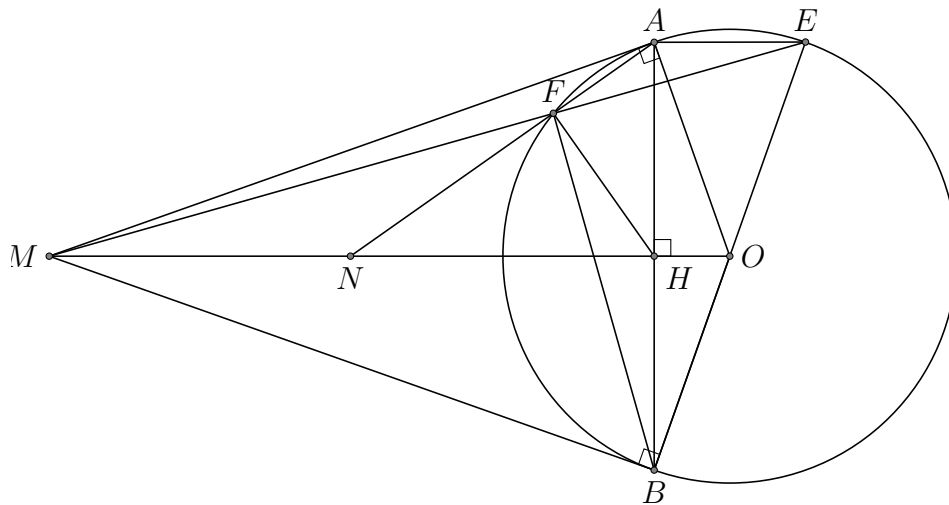
- a) $A = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3(2 + \sqrt{3}) = 6$.
- b) $B = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$. Ta có $B \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

□

Câu 4. Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA , MB đến đường tròn (O) (với A, B là các tiếp điểm). Gọi BE là đường kính của đường tròn (O) và F là giao điểm thứ hai của đường thẳng ME với đường tròn (O) . Đường thẳng AF cắt MO tại điểm N . Gọi H là giao điểm của MO và AB .

- a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp. c) Chứng minh $MN^2 = NF.NA$.
b) Chứng minh $AE \parallel MO$. d) Chứng minh $MN = NH$.

Lời giải.



- a) Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ nên $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.
b) Vì BE là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{BAE} = 90^\circ \Rightarrow AE \perp AB$. Mà MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp MO \Rightarrow AE \parallel MO$.
c) Vì $AE \parallel MO$ và MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{NMF} = \widehat{AEF} = \widehat{NAM} \Rightarrow \triangle NMA \sim \triangle NFM \Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{NA}{NM} \Rightarrow MN^2 = NF.NA$.
d) Ta có $\widehat{MFB} = \widehat{MHB} = 90^\circ$ nên $MFHB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FHN} = \widehat{FBM} = \widehat{NAH} \Rightarrow \triangle NAH \sim \triangle NHF \Rightarrow \frac{NA}{NH} = \frac{NH}{NF} \Rightarrow NH^2 = NA.NF \Rightarrow NH = NM$.

□

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$ và $a \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} + \frac{3}{(c+1)^2}$.

Lời giải.

- a) (Cách 1) Sử dụng $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ và $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$.
Đặt $x = \frac{1}{a+1}, y = \frac{1}{b+1}, z = \frac{1}{c+1}$ ($x, y, z > 0$). Vì $a \geq c$ nên $z \geq x$.
Ta có $P \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$.
Mà $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 9 \Rightarrow a + b + c \geq 3$.

Lại có $3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq 1 \Rightarrow 3 \geq 3abc \Rightarrow a + b + c \geq 3abc$.

Xét $xy + yz + zx = \frac{3(a+b+c+3)}{3abc+3(a+b+c)+12} \geq \frac{3(a+b+c+3)}{4(a+b+c+3)} = \frac{3}{4} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

b) (Cách 2) Sử dụng $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$.

Đặt $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1$ ($x, y, z > 0$). Vì $a \geq c$ nên $x \geq z \Rightarrow \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{x^2}$.

Ta có $P \geq 2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2$.

Từ giả thiết ta có $(x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$.

Lại có $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

□

———— HẾT ————

55 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ NỘI

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 5}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{x - 25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

- Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.
- Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 5}$.
- Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot |x - 4|$.

Lời giải.

a) Khi $x = 9$ ta có $A = \frac{\sqrt{9} + 2}{\sqrt{9} - 5} = \frac{3 + 2}{3 - 5} = -\frac{5}{2}$

b) Với $x \geq 0, x \neq 25$ thì

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{x - 25} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{20 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x} - 5) + 20 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{3\sqrt{x} - 15 + 20 - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 5}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} - 5} \text{ (điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

- c) Với $x \geq 0, x \neq 25$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= B \cdot |x - 4| \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 5} &= \frac{1}{\sqrt{x} - 5} \cdot |x - 4| \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 &= |x - 4| \quad (*) \end{aligned}$$

Nếu $x \geq 4, x \neq 25$ thì $(*)$ trở thành:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 2 &= x - 4 \\ \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Do $\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn).

Nếu $0 \leq x < 4$ thì $(*)$ trở thành: $\sqrt{x} + 2 = 4 - x$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Do $\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

Vậy có hai giá trị $x = 1$ và $x = 9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h

nên xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải.

Gọi vận tốc xe máy là x km/h. Điều kiện $x > 0$.

Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h. nên vận tốc ô tô là $x + 10$ km/h.

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{120}{x}$ h.

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{120}{x+10}$ h.

Xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút $= \frac{3}{5}$ h nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 120.5.(x+10) - 120.5.x - 3x.(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 30x - 6000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+50)(x-40) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -50 \\ x = 40. \end{cases} \text{ Kết hợp với điều kiện đầu bài ta được } x = 40.$$

Vậy vận tốc của xe máy là 40 km/h, vận tốc của ô tô là 50 km/h. □

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = mx + 5$.

(a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(0; 5)$ với mọi giá trị của m .

(b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| > |x_2|$.

Lời giải.

a) Giải hệ $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$.

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 1$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{y-1} \end{cases}$. Điều kiện $a; b \geq 0$. Khi đó hệ phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ 4a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - 2b \\ 4(5 - 2b) - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - 2b \\ -9b = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; 5)$.

b)

(a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(0; 5)$ với mọi giá trị của m .

Thay tọa độ điểm $A(0; 5)$ vào phương trình đường thẳng $(d): y = mx + 5$ ta được: $5 = m.0 + 5$ luôn đúng với mọi giá trị của tham số m nên đường thẳng (d) luôn đi qua điểm A với mọi giá trị của m .

(b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = mx + 5 \Leftrightarrow x^2 - mx - 5 = 0$$

Ta có tích hệ số $ac = -5 < 0$ nên phương trình hoành độ giao điểm luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m hay đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với

mọi m . Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

Ta có: $|x_1| > |x_2| \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 > 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$

Theo giả thiết: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$ do đó $x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

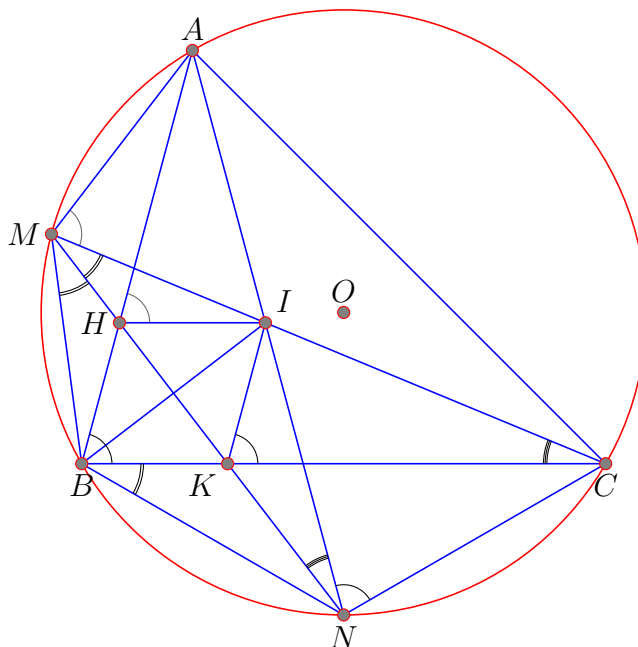
Vậy $m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 4. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$ và cung nhỏ $\widehat{BC}$. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I . Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K .

- Chứng minh các điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.
- Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
- Gọi PQ lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ . Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Lời giải.



- Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn. Ta có M là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow AM = BM \Rightarrow \widehat{MNA} = \widehat{MCB} \Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{ICK}$. Tứ giác $CNKI$ có C và N là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh KI dưới hai góc bằng nhau nên $CNKI$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).
Do đó bốn điểm C, N, I, K cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.

Ta có N là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow \widehat{BN} = \widehat{CN} \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Mà $\widehat{CBN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{CN}$)
 $\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BMN}$ (cùng bằng góc $\widehat{CMN}$) $\Rightarrow \widehat{KBN} = \widehat{BMN}$

Xét $\triangle KBN$ và $\triangle BMN$ có: $\begin{cases} \widehat{N} \text{ chung} \\ \widehat{KBN} = \widehat{BMN} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle KBN \sim \triangle BMN \Rightarrow \frac{KN}{BN} = \frac{BN}{MN} \Rightarrow NB^2 = NK \cdot NM$ (điều phải chứng minh).

c) Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)

Mà $\widehat{AMC} = \widehat{AHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{IC}$)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IKC}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HB \parallel IK$ (1).

Chứng minh tương tự phần 1 ta có tứ giác $AMHI$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{IKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AI}$)

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AHI}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $BK \parallel HI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHIK$ là hình bình hành.

Mặt khác AN, CM lần lượt là các tia phân giác của các góc A và C trong tam giác ABC nên I là giao điểm ba đường phân giác, do đó BI là tia phân giác của góc B .

Vậy tứ giác $BHIK$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

d) Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{NC}$ nên DN là trung trực của $BC \Rightarrow DN$ là phân giác $\widehat{BDC}$. Ta có $\widehat{KQC} = 2\widehat{KMC}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm của đường tròn (Q))

Lại có $\widehat{NDC} = \widehat{KMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BC}$)

Mà $\widehat{BDC} = 2\widehat{NDC} \Rightarrow \widehat{KQC} = \widehat{BDC}$

Xét tam giác $\triangle BDC$ và $\triangle KQC$ là các tam giác cân tại D và Q có hai góc $\widehat{BCD} = \widehat{BCQ}$ do vậy D, Q, C thẳng hàng nên $KQ \parallel PK$

Chứng minh tương tự ta có ta có D, P, B thẳng hàng và $DQ \parallel PK$

Do đó tứ giác $PDQK$ là hình bình hành nên E là trung điểm của PQ cũng là trung điểm của DK . Vậy D, E, K thẳng hàng (điều phải chứng minh). □

Câu 5. Cho các số thực a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn: $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca.$$

$$\text{Do đó: } 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) = 2 \cdot 9 = 18 \Rightarrow 2P \geq 18 \Rightarrow P \geq 9$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Vậy min $P = 9$ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Vì $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ nên $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$

Tương tự ta có $bc + 1 \geq b + c, ca + 1 \geq c + a$

Do đó $ab + bc + ca + 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow a + b + c \leq \frac{9+3}{2} = 6$

Mà $P = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - 18$

$\Rightarrow P \leq 36 - 18 = 18$. Dấu bằng xảy ra khi:
$$\begin{cases} a = 4; b = c = 1 \\ b = 4; a = c = 1. \\ c = 4; a = b = 1 \end{cases}$$

Vậy $\max P = 18$ khi
$$\begin{cases} a = 4; b = c = 1 \\ b = 4; a = c = 1. \\ c = 4; a = b = 1 \end{cases}$$

□

———— HẾT ————

56 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC NGHỆ AN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tính giá trị của biểu thức $A = (1 - \sqrt{7}) \frac{\sqrt{7} + 7}{2\sqrt{7}}$.
- b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= (1 - \sqrt{7}) \cdot \frac{\sqrt{7} + 7}{2\sqrt{7}} = (1 - \sqrt{7}) \cdot \frac{\sqrt{7}(1 + \sqrt{7})}{2\sqrt{7}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})}{2} = \frac{1 - 7}{2} = \frac{-6}{2} = -3. \end{aligned}$$

- b) Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{-(x - 1)} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x}} = -2 \end{aligned}$$

Vậy $P = -2$ với $x > 0, x \neq 1$.

□

Câu 2.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + y = -1. \end{cases}$
- b) Giải phương trình $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
- c) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m - 6$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải.

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 3 \\ y = -1 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$. Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow (2x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P)

$$x^2 = 2x + m - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 6 = 0. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương phân biệt, hay

$$\begin{cases} \Delta' = m - 5 > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = -m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 6.$$

□

Câu 3. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 15 m. Nếu giảm chiều dài 2 m và tăng chiều rộng 3 m thì diện tích mảnh vườn tăng thêm 44 m². Tính diện tích của mảnh vườn.

Lời giải.

Gọi x (m) là chiều dài của mảnh vườn ($x > 15$).

Khi đó, chiều rộng của mảnh vườn là: $x - 15$ (m).

Diện tích của mảnh vườn ban đầu: $x(x - 15)$ (m²)

Diện tích mảnh vườn sau khi giảm chiều dài và tăng chiều rộng: $(x - 2)(x - 12)$ (m²).

Theo đề bài ta có

$$(x - 2)(x - 12) = x(x - 15) + 44 \Leftrightarrow x = 20.$$

Ta thấy $x = 20$ thỏa điều kiện bài toán. Vậy diện tích của mảnh vườn là: 100 m².

□

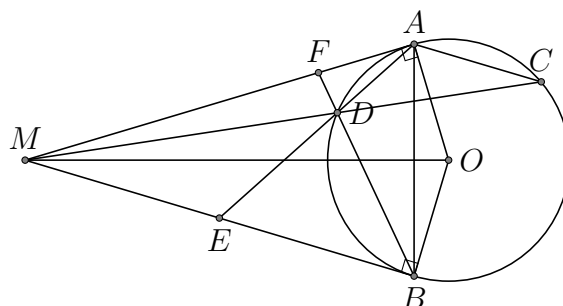
Câu 4.

Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O ; R)$. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A, B là tiếp điểm). Qua điểm A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn $(O ; R)$ tại C . Nối MC cắt đường tròn $(O ; R)$ tại D . Tia AD cắt MB tại E .

- Chứng minh rằng $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng $EM = EB$
- Xác định vị trí của điểm M để $BD \perp MA$.

Lời giải.

- a) Ta có $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ nên tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn đường kính AO .
- b) Xét hai tam giác EDB và EBA có góc $\widehat{E}$ chung và $\widehat{EBD} = \widehat{EAB}$ nên $\triangle EBD \sim \triangle EAB$, suy ra



$$EB^2 = ED \cdot EA. \quad (1)$$

Mặt khác hai tam giác EMD và EAM có góc $\widehat{E}$ chung và $\widehat{EAM} = \widehat{ACM} = \widehat{EMD}$ (slt).

Suy ra $\Delta EMD \sim \Delta EAM$ do đó

$$EM^2 = ED \cdot EA. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $EM = EB$.

- c) Gọi F là giao điểm của BD với MA .

Ta có $\Delta EMD \sim \Delta EAM$ nên

$$\widehat{EMA} = \widehat{EDM} = \widehat{ADC}.$$

Mặt khác $\widehat{DBM} = \widehat{DAB}$. Do đó

$$\begin{aligned} AM \perp BD &\Leftrightarrow \widehat{EMA} + \widehat{MBD} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ADC} + \widehat{DAB} = 90^\circ \\ &\Leftrightarrow CD \perp AB \Leftrightarrow MC \equiv MO \Leftrightarrow AD \perp AC \Leftrightarrow AD \perp MB \\ &\Leftrightarrow \Delta MAB \text{ đều} \Leftrightarrow OM = \frac{OA}{\cos 60^\circ} = 2R. \end{aligned}$$

1

Câu 5. Giải phương trình: $x + \frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$.

Lời giải.

Từ phương trình, ta thấy $x > 0$, nên ta biến đổi phương trình đã cho thành:

$$\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Đặt $t = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, ta có $x + \frac{1}{x} = t^2 + 2$. Do đó, ta có phương trình

$$\begin{aligned} t + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+2}} = 0 &\Leftrightarrow t\sqrt{t^2+2} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t^4 + 2t^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = -\sqrt{2} &\Leftrightarrow x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2 - \sqrt{3}$.

———— HẾT ————

57 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC NAM ĐỊNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Điều kiện để biểu thức $\frac{2017}{x-2}$ xác định là

- (A) $x < 2$. (B) $x > 2$. (C) $x \neq 2$. (D) $x = 2$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị hàm số $y = x + 1$ đi qua điểm

- (A) $M(1; 0)$. (B) $N(0; 1)$. (C) $P(3; 2)$. (D) $Q(-1; 1)$.

Câu 3. Điều kiện để hàm số $y = (m - 2)x + 8$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

- (A) $m \geq 2$. (B) $m > 2$. (C) $m < 2$. (D) $m \neq 2$.

Câu 4. Trong các phương trình bậc hai sau, phương trình nào có tổng hai nghiệm bằng 5?

- (A) $x^2 - 10x - 5 = 0$. (B) $x^2 - 5x + 10 = 0$. (C) $x^2 + 5x - 1 = 0$. (D) $x^2 - 5x - 1 = 0$.

Câu 5. Trong các phương trình bậc hai sau, phương trình nào có hai nghiệm trái dấu?

- (A) $-x^2 + 2x - 3 = 0$. (B) $5x^2 - 7x - 2 = 0$. (C) $3x^2 - 4x + 1 = 0$. (D) $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH , biết $BH = 4$ cm và $CH = 16$ cm. Độ dài đường cao AH bằng

- (A) 8 cm. (B) 9 cm. (C) 25 cm. (D) 16 cm.

Câu 7. Cho đường tròn có chu vi bằng 8π cm. Bán kính đường tròn đã cho bằng

- (A) 4 cm. (B) 2 cm. (C) 6 cm. (D) 8 cm.

Câu 8. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 cm, chiều cao bằng 4 cm. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- (A) 24π cm². (B) 12π cm². (C) 20π cm². (D) 15π cm².

Câu 9. Cho biểu thức $P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
b) Tìm các giá trị x sao cho $3P = 1 + x$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{x - 1}. \end{aligned}$$

b) $3P = 1 + x \Leftrightarrow \frac{3}{x - 1} = 1 + x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ vì $x > 0$ và $x \neq 1$.

□

Câu 10. Cho phương trình $x^2 - x + m + 1 = 0$ (1) (m là tham số)

- a) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

- b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2 = 7$.

Lời giải.

- a) Có $\Delta = -4m - 3$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{4}$.

- b) Áp dụng hệ thức vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 1 \end{cases}$.

Khi đó $x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2 = 7 \Leftrightarrow x_1(x_1 + x_2) + 3x_2 = 7 \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 = 7$.

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1x_2 = -2 \cdot 3 = m + 1 \Rightarrow m = -7$.

Vậy $m = -7$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

□

Câu 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = xy + 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} = 1 \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq -1 \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y = xy + 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = xy + 5 \\ y + 1 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ y + 1 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y + 1 = y(3 - y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y + 1 = y(3 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

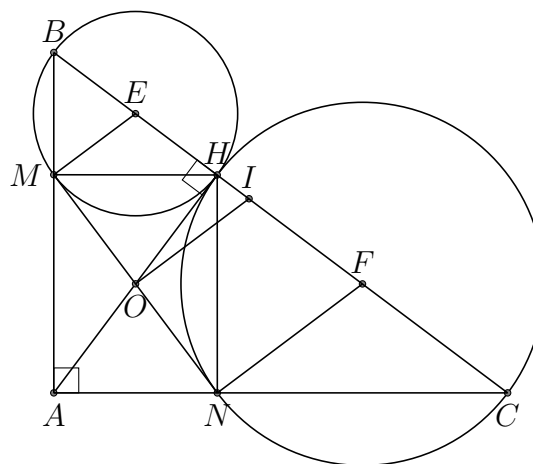
Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$.

□

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH . Đường tròn tâm E đường kính BH cắt AB tại M (M khác B), đường tròn tâm F đường kính HC cắt AC tại N (N khác C).

- Chứng minh $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ và $AN \cdot AC = MN^2$
- Gọi I là trung điểm của EF , O là giao điểm của AH và MN . Chứng minh IO vuông góc với đường thẳng MN .
- Chứng minh $4(EN^2 + FM^2) = BC^2 + 6AH^2$.

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{BMH} = \widehat{HNC} = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow HM \perp AB, HN \perp AC$. Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông AHB và AHC ,
 có $AH^2 = AM \cdot AB$ và $AH^2 = AN \cdot AC \Rightarrow AM \cdot AB = AN \cdot AC$.
 Mặt khác, tứ giác $AMHN$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật khi đó $AH = MN \Rightarrow$
 $AN \cdot AC = MN^2$.
- b) Tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật, có O là giao điểm của AH và MN .
 $\Rightarrow O$ là trung điểm của AH và MN . Khi đó $\triangle EMO = \triangle EHO$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{EMO} = \widehat{EHO} =$
 $90^\circ \Rightarrow EM \perp MN$.
 Chứng minh tương tự ta có $FN \perp MN$.
 $\Rightarrow ME \parallel NF \Rightarrow MEFN$ là hình thang vuông. Mà OI là đường trung bình của hình thang
 vuông $MEFN$ nên $OI \perp MN$.
- c) Đặt $MN = AH = h$, x, y lần lượt là bán kính của đường tròn (E) và (F) . Ta có
 $4(EN^2 + FM^2) = 4[(ME^2 + MN^2) + (ME^2 + MN^2)] = 4(x^2 + y^2 + 2h^2)$
 $BC^2 + 6AH^2 = (HB + HC)^2 + 6h^2 = HB^2 + HC^2 + 2HB \cdot HC + 6h^2 = 4x^2 + 4y^2 + 2h^2 + 6h^2 =$
 $4(x^2 + y^2 + 2h^2)$.
 Vậy $4(EN^2 + FM^2) = BC^2 + 6AH^2$.

□

Câu 13. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 6$.

$$\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 4x} - 5\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 4x + 25x - 10x\sqrt{5x + 4} = x^2 - 3x - 18$$

$$\Leftrightarrow 6(5x + 4) - 10x\sqrt{5x + 4} + 4x^2 + 2x - 6 = 0$$

Đặt $\sqrt{5x + 4} = t$, Phương trình trên trở thành: $6t^2 - 10xt + 4x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (x - 6)^2 \geq 0$.

Khi đó
$$\begin{cases} t = \frac{5x + |x - 6|}{6} \\ t = \frac{5x - |x - 6|}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x - 1 \\ t = \frac{2x + 3}{3} \end{cases}$$

Với $t = x - 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{5x + 4} \Rightarrow x^2 - 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$ vì $x \geq 6$.

Với $t = \frac{2x + 3}{3} \Rightarrow 2x + 3 = 3\sqrt{5x + 4} \Leftrightarrow 4x^2 - 33x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9$ vì $x \geq 6$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{7 + \sqrt{61}}{2}; 9 \right\}$.

□

———— HẾT ————

58 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC LONG AN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn: $3\sqrt{75} - 12\sqrt{3} + \sqrt{12}$.
 b) Rút gọn: $N = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$.
 c) Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 9$.

Lời giải.

a) $3\sqrt{75} - 12\sqrt{3} + \sqrt{12} = 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

b) đk: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$N = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} - 1 = -2.$$

c) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(2x - 3)^2} = 9 \Leftrightarrow |2x - 3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = -9 \\ 2x - 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}.$

□

Câu 2.

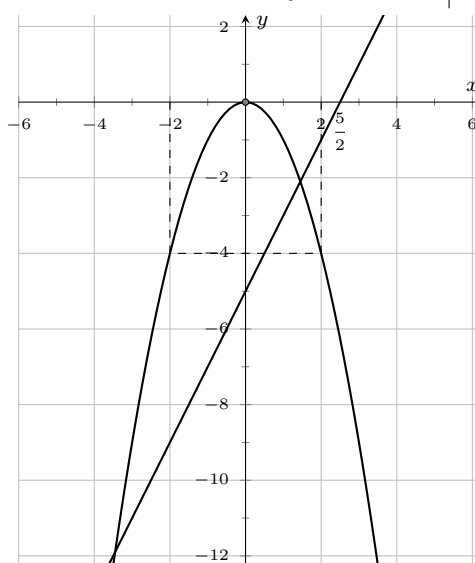
- a) Cho hai hàm số: $y = -x^2$ và $y = 2x - 5$. Vẽ đồ thị hai hàm số đã cho trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy.
 b) Viết phương trình đường thẳng $(d): y = ax + b$, biết (d) đi qua hai điểm $A(-1; 10); B(3; -2)$.

Lời giải.

- a) Ta có các bảng giá trị:

x	-2	0	2
$y = -x^2$	-4	0	-4

x	0	$\frac{5}{2}$
$y = 2x - 5$	-5	0



- b) Ta có (d) đi qua điểm $A(-1; 10)$ do đó :

$$-a + b = 10 \Leftrightarrow b = a + 10. \quad (8)$$

Ta lại có (d) đi qua điểm $B(3; -2)$ do đó:

$$3a + b = -2. \quad (9)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$4a = -12 \Leftrightarrow a = -3 \Rightarrow b = 7.$$

Vậy $(d) : y = -3x + 7$.

□

Câu 3.

a) Giải phương trình: $3x^2 + 2x - 8 = 0$.

b) Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta' = b'^2 - ac = 1 + 3.8 = 25 > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-1 - 5}{3} = -2.$$

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-1 + 5}{3} = \frac{4}{3}.$$

b) Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 + 3 = 2m + 4$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì: $2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -2$. (1)

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ và $x_1.x_2 = m^2 - 3$.

Ta có :

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 4(m^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow m = -2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra không có giá trị m thỏa mãn để: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2$.

□

Câu 4. Cho đường tròn (O) đường kính AC . Trên bán kính OC lấy điểm B tùy ý (B không trùng O và C). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB . Kẻ BI vuông góc với CD ($I \in CD$).

a) Cho $AM = 4cm$; $MC = 9cm$. Tính độ dài đoạn thẳng MD và $\tan A$ của tam giác MDA .

b) Chứng minh: $BMDI$ là tứ giác nội tiếp

c) Chứng minh $ADBE$ là hình thoi và ba điểm I ; B ; E thẳng hàng.

d) Gọi O' là tâm đường tròn đường kính BC . Chứng minh: MI là tiếp tuyến của (O')

Lời giải.

- a) Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\triangle ADC$ vuông tại D , đường cao AH do đó

ta có:

$$DM^2 = AM \cdot CM = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow DM =$$

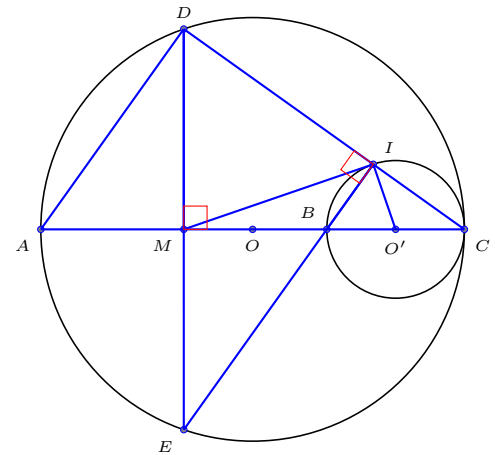
6cm.

$\triangle MDA$ vuông tại M , ta có:

$$\tan A = \frac{DM}{MA} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

- b) Ta có: $\widehat{DMB} + \widehat{BID} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMDI$ nội tiếp.



- c) Ta có $DE \perp AB(gt) \Rightarrow MD = ME$

Xét tứ giác $ADBE$ có:

$$\begin{cases} MD = ME(cmt) \\ MA = MB(gt) \end{cases} \Rightarrow \text{Tứ giác } ADBE \text{ là hình bình hành.}$$

Mặt khác ta lại có: $DE \perp AB(gt)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADBE$ là hình thoi.

$\Rightarrow DE \parallel BE$

Mà $\widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp DC \Rightarrow BE \perp DC$.

Mặt khác $BI \perp DC$. Do đó 3 điểm E, B, I thẳng hàng.

- d) Ta có: $\widehat{BIC} = 90^\circ \Rightarrow I$ thuộc đường tròn tâm O' .

Ta lại có:

$$\begin{cases} \triangle DIC \text{ vuông tại } I \\ M \text{ là trung điểm của } DE \end{cases} \Rightarrow IM = DM = \frac{DE}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle MDI \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{MDI} = \widehat{MID}. \quad (1)$$

Mặt khác ta có: $O'C = O'I$ (Bán kính đường tròn tâm O')

$$\Rightarrow \triangle O'CI \text{ cân tại } O' \Rightarrow \widehat{O'CI} = \widehat{O'IC}. \quad (2)$$

$$\text{Mà } \widehat{O'CI} + \widehat{MDI} = 90^\circ. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MIO'} = 90^\circ \Rightarrow O'I \perp IM$

$\Rightarrow MI$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm O' .

□

———— HẾT ————

59 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC LẠNG SƠN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \sqrt{81} + \sqrt{25}$$

$$B = \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} - \sqrt{7}$$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 1$.

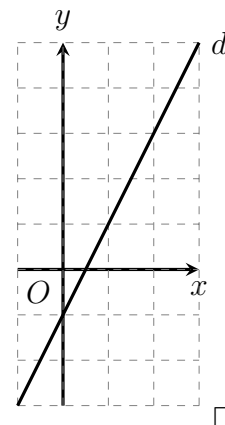
Lời giải.

a) $A = \sqrt{81} + \sqrt{25} = \sqrt{9^2} + \sqrt{5^2} = 9 + 5 = 14.$

$$B = \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} - \sqrt{7} = \sqrt{7} + 1 - \sqrt{7} = 1.$$

b) Ta có bảng giá trị:

x	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1



Câu 2. Giải các phương trình, hệ phương trình:

a) $x^2 - 12x + 35 = 0.$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$

c)
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Lời giải.

a) Ta có: $\Delta' = 36 - 35 = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = \frac{6+1}{1} = 7$
hay $x_2 = \frac{6-1}{1} = 5.$

b) Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình trở thành $t^2 - 3t - 4 = 0$ (*), do $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm là $t = -1$ (loại) và $t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$

c) Ta có:
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 8 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{1-3y}{2} = 2 \end{cases}.$$

Câu 3. Cho biểu thức $P = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 24 - 16\sqrt{2}$.

Lời giải.

a)
$$P = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1} = \frac{3(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x}-1 - \sqrt{x}+5}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

b) Với $x = 24 - 16\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{24 - 16\sqrt{2}} = \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})^2} = 4 - 2\sqrt{2}$.

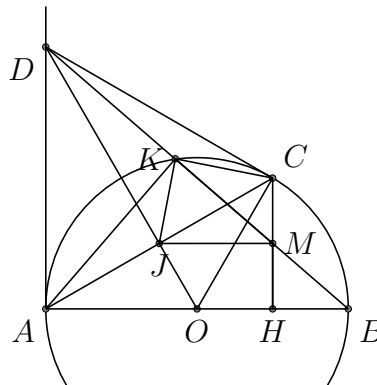
Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$.

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Dựng tiếp tuyến Ax (Ax và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (C không trùng với A và B), dựng tiếp tuyến Cy của nửa đường tròn (O) cắt Ax tại D . Kẻ CH vuông góc với AB , với H nằm trên AB , BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K , và cắt CH tại M . Gọi J là giao điểm của OD với AC .

- Chứng minh rằng tứ giác $AKMH$ nội tiếp được một đường tròn.
- Chứng minh rằng tứ giác $CKJM$ nội tiếp được một đường tròn (O_1).
- Chứng minh rằng DJ là tiếp tuyến của đường tròn (O_1).

Lời giải.



- Ta có: $\widehat{AKB} = \widehat{AHM} = 90^\circ$ nên tứ giác $AKMH$ nội tiếp được một đường tròn.
- Kẻ tiếp tuyến By của nửa đường tròn (O). Gọi T là giao điểm của CD với By .
Ta có: $\frac{CM}{BT} = \frac{CD}{DI} \Rightarrow \frac{CM}{DC} = \frac{BT}{DI} = \frac{CT}{DI} = \frac{BM}{BD} = \frac{MH}{AD}$
Mà ta có $AD = CD$ nên $MH = CH$, vậy M là trung điểm của CH .
Ta có: $\widehat{KCJ} = \widehat{KBA} = \widehat{KMJ}$ nên tứ giác $CKJM$ là tứ giác nội tiếp.
- Ta có $CM \perp MJ \Rightarrow$ tứ giác $CKJM$ nội tiếp đường tròn đường kính CJ nên O_1 là trung điểm của CJ . Mà ta có $OD \perp AC$ tại J nên $DJ \perp O_1J$ tại J , vì thế nên DJ là tiếp tuyến của đường tròn (O_1).

□

Câu 5. Cho x, y, z là các số thực dương, thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{xy}{z^3(1+x)(1+y)} + \frac{yz}{x^3(1+y)(1+z)} + \frac{zx}{y^3(1+z)(1+x)} \geq \frac{1}{16}$.

Lời giải.

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$.

Do $xy + yz + zx = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 1$.

$$VT = \frac{\frac{1}{z^3}}{\left(\frac{1}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{y} + 1\right)} + \frac{\frac{1}{x^3}}{\left(\frac{1}{y} + 1\right)\left(\frac{1}{z} + 1\right)} + \frac{\frac{1}{y^3}}{\left(\frac{1}{z} + 1\right)\left(\frac{1}{x} + 1\right)}$$

$$= \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)}.$$

$$\text{Có: } \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{64} + \frac{1+c}{64} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3(1+b)(1+c)}{64^2(1+b)(1+c)}} = \frac{3}{16}a$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \geq \frac{3}{16}a - \frac{1+b}{64} - \frac{1+c}{64}$$

$$\text{Vậy VT} \geq \frac{3}{16}(a+b+c) - \frac{1+a+1+b+1+c}{32} = \frac{3}{16} - \frac{4}{32} = \frac{1}{16}$$

□

———— HẾT ————

60 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC LÂM ĐỒNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{54} + 2\sqrt{24} - \sqrt{6}$.

Lời giải.

$$A = \sqrt{9 \cdot 6} + 2\sqrt{4 \cdot 6} - \sqrt{6} = 3\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - \sqrt{6} = 6\sqrt{6}. \quad \square$$

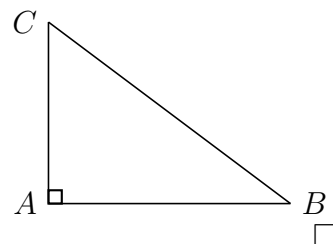
Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 12$ cm và $AC = 9$ cm. Tính $\sin B$.

Lời giải.

Theo định lý Pytago ta tính được $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 15$.

Áp dụng công thức tính tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

$$\text{Vậy } \sin B = \frac{3}{5}.$$



Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x - y = 9. \end{cases}$

Lời giải.

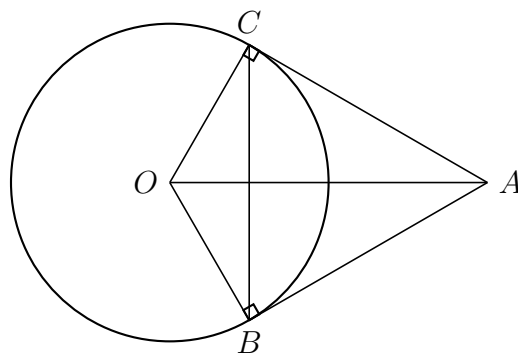
$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -4 \\ 6x - 2y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -4 \\ 7x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm } \begin{cases} x = 2 \\ y = -3. \end{cases} \quad \square$$

Câu 4. Cho đường tròn $(O; 3\text{cm})$, lấy điểm A sao cho $OA = 6$ cm. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B và C là hai tiếp điểm). Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có tam giác OCA và tam giác OBA là hai tam giác vuông bằng nhau, với $CA = BA = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{27}$, suy ra $\triangle ABC$ cân đỉnh A . Dễ dàng tính được $\sin \widehat{CAO} = \sin \widehat{BAO} = \frac{1}{2}$ nên $\widehat{CAO} = \widehat{BAO} = 30^\circ$. Từ đó suy ra $\widehat{CAB} = 60^\circ$. Vậy $\triangle ABC$ cân và có một góc bằng 60° nên $\triangle ABC$ đều.



Câu 5. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $B(1; -2)$ và song song với đường thẳng $(d') : y = 3x$.

Lời giải.

Vì (d) song song với (d') nên phương trình có dạng $y = 3x + m$ với $m \neq 0$. Mà (d) đi qua $B(1; -2)$ nên ta có $-2 = 3 \cdot 1 + m \Leftrightarrow m = -5$ (thỏa mãn $m \neq 0$). Vậy đường thẳng (d) có phương trình $y = 3x - 5$. $\square$

Câu 6. Giải phương trình $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$ ta có phương trình $9t^2 + 8t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{1}{9} \end{cases}$ Với $t = \frac{1}{9}$

$$\text{ta có } x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1}{3}$ và $x = -\frac{1}{3}$. $\square$

Câu 7. Một hình nón có diện tích toàn phần bằng $90\pi\text{cm}^2$ và độ dài đường sinh bằng 13 cm. Tính thể tích của hình nón đó.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đáy của hình nón. Theo công thức tính diện tích toàn phần của hình nón ta có phương trình $\pi r^2 + 13\pi r = 90\pi \Leftrightarrow r^2 + 13r - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ r = -18 \text{ (loại)} \end{cases}$

Gọi h là đường cao của hình nón ta có $h = \sqrt{13^2 - r^2} = 12$.

Áp dụng công thức tính thể tích của hình nón ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 100\pi \text{ (cm}^3\text{)}$. $\square$

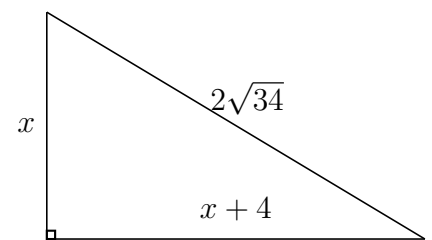
Câu 8. Tính diện tích của một tam giác vuông, biết hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 4 cm và độ dài cạnh huyền bằng $2\sqrt{34}$ cm.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ của tam giác đó là x , điều kiện $x > 0$ thì độ dài cạnh góc vuông lớn hơn sẽ là $x + 4$. Từ giả thiết và áp dụng định lý Pytago ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 4)^2 = (2\sqrt{34})^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -10 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy tam giác vuông đó có độ dài hai cạnh góc vuông là 6 cm và 10 cm, suy ra diện tích là 30 cm^2 . $\square$



Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m + 3)x + 1 - 4m$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt cùng nằm bên phải trục tung.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình $x^2 = 2(m + 3)x + 1 - 4m$ có hai nghiệm dương phân biệt. Hay phương trình $x^2 - 2(m + 3)x - 1 + 4m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt, tức là:

$$\begin{cases} \Delta' = (m + 3)^2 + 1 - 4m > 0 \\ m + 3 > 0 \\ -1 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)^2 + 9 > 0 \\ m > -3 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$$

Kết luận: với $m > -\frac{1}{4}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt cùng nằm bên phải trục tung. $\square$

Câu 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - \sqrt{x - 2017} + \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x - 2017}$, $t \geq 0$ ta có $t^2 = x - 2017$ hay $x = t^2 + 2017$.

Từ đó ta có $P = t^2 + 2017 - t + \frac{1}{4} = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2017 \geq 2017$, đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{1}{2}$ tức là khi $x = 2017 + \frac{1}{4} = \frac{8069}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2017 đạt được tại $x = \frac{8069}{4}$. $\square$

Câu 11. Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c là các hệ số và $a > 0$). Chứng minh rằng nếu $b > a + c$ thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $c < 0$, khi đó hiển nhiên a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

Trường hợp 2: $c \geq 0$, từ giả thiết ta có

$$b > a + c > 0 \Rightarrow b^2 > (a + c)^2 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > a^2 - 2ac + c^2 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > (a - c)^2.$$

Mà $(a - c)^2 \geq 0$ nên $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt. $\square$

Câu 12. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC , AE cắt BC tại D . Chứng minh rằng $AC^2 \cdot BD = AD \cdot CD \cdot AE$.

Lời giải.

Từ giả thiết dễ dàng thấy rằng $\triangle ADC \sim \triangle BDE$

nên $AC \cdot BD = AD \cdot BE$.

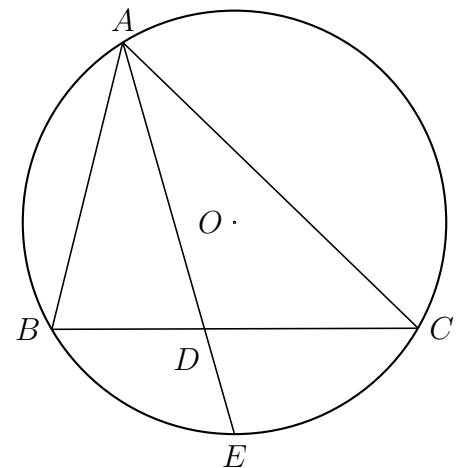
Từ đó ta có $AC^2 \cdot BD = AC \cdot BD \cdot AC = AD \cdot BE \cdot AC$

Vậy ta cần chứng minh $BE \cdot AC = CD \cdot AE$.

Thật vậy dễ thấy:

$$\begin{aligned} \triangle CDA \simeq \triangle EBA &\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{EB}{EA} \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{EC}{EA} \\ &\Rightarrow CD \cdot EA = EC \cdot AC \Leftrightarrow CD \cdot AE = BE \cdot AC. \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. $\square$



————— HẾT —————

61 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC LAI CHÂU

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau

a) $2x - 1 = 0$.

b) $x^2 - 6x - 7 = 0$.

c)
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Lời giải.

a) Ta có $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) Ta có

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 7x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) - 7(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Vậy $\mathcal{S} = \{-1; 7\}$.

c) Ta có

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ $(x; y) = (3; -1)$.

□

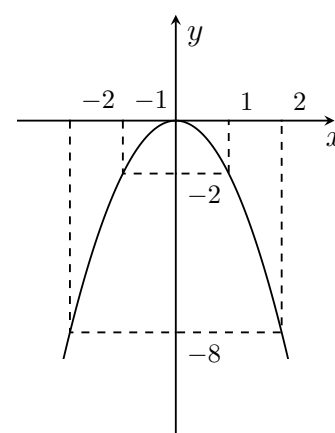
Câu 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x^2$.

Lời giải.

Do $a = -2 < 0$ nên đồ thị hàm số là một parabol hướng xuống có đỉnh là gốc tọa độ và đối xứng qua Oy .

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8



□

Câu 3. Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{x}{\sqrt{x} - x}$, ($x > 0; x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A = 2017$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\ &= \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1; x > 0). \end{aligned}$$

b) Để $A = 2017$ thì $\frac{1+x}{1-x} = 2017 \Leftrightarrow 2018x = 2016 \Leftrightarrow x = \frac{1008}{1009}$ (thỏa mãn).

$$\text{Vậy } \mathcal{S} = \left\{ \frac{1008}{1009} \right\}.$$

□

Câu 4. Một người đi xe đạp từ thành phố Lai Châu đến thị trấn Tam Đường cách nhau 36 km. Khi đi từ thị trấn Tam Đường về thành phố Lai Châu, người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ thành phố Lai Châu về thị trấn Tam Đường.

Lời giải.

Đổi 36 phút = $\frac{3}{5}$ giờ.

Gọi vận tốc của người đi xe đạp từ Lai Châu đến Tam Đường là x (km/h), ($x > 0$).

Thời gian người đó đi từ Lai Châu đến Tam Đường là $t_1 = \frac{36}{x}$ (h).

Lúc về, người đó tăng vận tốc thêm 3 (km/h) nên vận tốc khi về là $x + 3$ (km/h).

Do đó, người đó đi về hết thời gian là $t_2 = \frac{36}{x+3}$ (h).

Thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 (\text{thỏa mãn}) \\ x = -15 (\text{không thỏa mãn}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc của người đó khi đi từ Lai Châu tới Tam Đường là 12 (km/h).

□

Câu 5. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1 = 2x_2$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = 4m - 3$.

a) Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}$.

b) Phương trình có nghiệm khi $m \geq \frac{3}{4}$.

$$\text{Theo định lý Viet } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 (1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 1 (2) \end{cases}.$$

Theo bài ra $x_1 = 2x_2$, thay vào (1) ta được
$$\begin{cases} x_2 = \frac{2m+1}{3} \\ x_1 = \frac{2(2m+1)}{3} \end{cases}$$

Thay x_1, x_2 vào (2) ta được phương trình $m^2 - 8m + 7 = 0$. Suy ra
$$\begin{cases} m = 1(\text{loại}) \\ m = 7(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

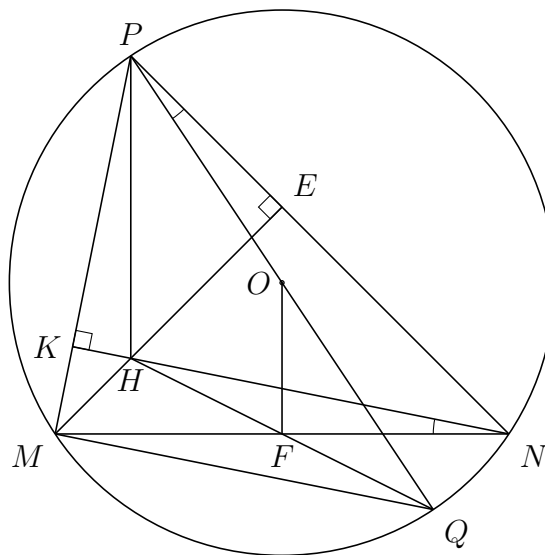
Vậy $m = 7$ thỏa mãn bài toán.

□

Câu 6. Cho đường tròn $(O; R)$ có dây MN cố định ($MN < 2R$), P là một điểm trên cung lớn MN sao cho tam giác MNP có ba góc nhọn. Các đường cao ME và NK của tam giác MNP cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng tứ giác $PKHE$ nội tiếp đường tròn.
- Kéo dài PO cắt đường tròn tại Q . Chứng minh rằng $\widehat{KNM} = \widehat{NPQ}$.
- Chứng minh rằng khi P thay đổi trên đường tròn (O) thì độ dài đoạn PH không đổi.

Lời giải.



- a) Xét tứ giác $KHEP$ có:

$$\widehat{HKP} + \widehat{HEP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà K, E là hai đỉnh đối nhau của tứ giác. Suy ra tứ giác $KHEP$ nội tiếp đường tròn.

- b) Ta có $\widehat{PNQ} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{NPQ} + \widehat{NQP} = 90^\circ$ (định lý tổng ba góc).

$$\text{Mà } \begin{cases} \widehat{MNK} + \widehat{NMP} = 90^\circ \text{ (định lý tổng ba góc)} \\ \widehat{NQP} = \widehat{NMP} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung PQ)} \end{cases}$$

Suy ra $\widehat{KNM} = \widehat{NPQ}$.

- c) **TH1: Tam giác PMN không cân tại P .**

Để chứng minh được tứ giác $MQNH$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song). Suy

ra $HQ \cap MN$ tại F là trung điểm của MN và HQ .

Suy ra $OF \perp MN$ (tính chất).

Do $(O; R)$ cố định, MN không đổi nên OF không đổi.

Xét tam giác QHP có OF là đường trung bình, suy ra $PH = 2.OF$. Vậy PH có độ dài không đổi.

TH2: Tam giác PMN cân tại P .

Khi đó, $PM = PN$ nên P là điểm chính giữa cung lớn MN ; dây MN cố định nên P cố định. Do đó, $\triangle PMN$ cố định suy ra PH có độ dài không đổi.

□

———— HẾT ————

62 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC KIÊN GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm nghiệm dương của phương trình $x^2 + 3x - 10 = 0$.
- b) Rút gọn biểu thức $P(a) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1}\right) : \frac{a+1}{a-1}$ (với $0 < a \neq 1$).

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta = 49 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -5$ và $x_2 = 2$. Vậy nghiệm dương của phương trình là $x = 2$.
- b) Ta có $P(a) = \frac{\sqrt{a}+1+\sqrt{a}-1}{a-1} : \frac{a+1}{a-1} = \frac{2\sqrt{a}}{a-1} : \frac{a+1}{a-1} = \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$.

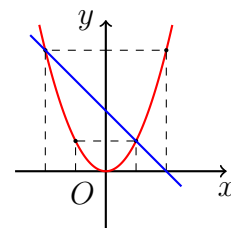
□

Câu 2.

- a) Cho hàm số $y = (3a - 6)x - 2017$. Tìm điều kiện của a để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Vẽ đồ thị hàm số $(P) : y = x^2$ và $d : y = -x + 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

Lời giải.

- a) Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $3a - 6 < 0 \iff a < 2$.
- b) Lấy năm điểm $O(0; 0)$, $A(-1; 1)$, $B(1; 1)$, $C(-2; 4)$, $D(2; 4)$ thuộc (P) và hai điểm $M(2; 0)$, $N(0; 2)$ thuộc d .



□

Câu 3.

- a) Tìm các giá trị m để phương trình $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m - 1 = 0$ (m là tham số) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} = 2$.
- b) Mỗi ngày ba của bạn An chở bạn ấy từ nhà đến trường mất 30 phút. Vì hôm nay là ngày thi tuyển sinh nên ba bạn ấy muốn con mình đến trường sớm hơn, do đó ông ấy đã tăng vận tốc xe lên 15 (km/h) và đến sớm hơn thường ngày là 10 phút. Hỏi quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là bao nhiêu km?

Lời giải.

- a) Đặt $f(x) = x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m - 1$.
Ta có $f(1) \neq 0 \iff m \neq -2 \pm \sqrt{2}$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\iff \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2m - 1) = 2 > 0$.
Theo đề $\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} = 2 \iff 3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 4 = 0 \iff m^2 + 5m + 4 = 0 \iff m = -1, m = -4$ (thỏa điều kiện $m \neq -2 \pm \sqrt{2}$).
- b) Gọi vận tốc xe thường ngày là x (km/h), $x > 0$; Quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là y (km) ($y > 0$). Theo đề ta có phương trình $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.
Do ba bạn An tăng vận tốc lên 15 (km/h) và đến sớm hơn 10 phút nên $\frac{y}{x+15} = \frac{1}{3}$.

Từ đó ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x+15} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \end{cases}.$$

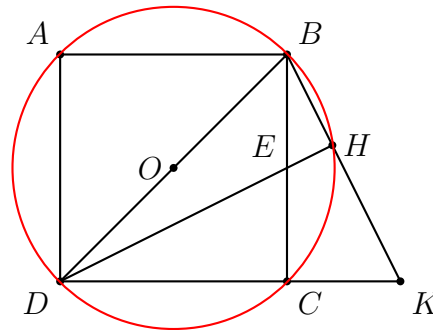
Vậy quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là 15 km.

□

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE , đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC lần lượt tại H và K .

- Chứng minh tứ giác $BHCD$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh tam giác KHC đồng dạng với tam giác KDB .
- Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài cung CH có số đo bằng 40° của đường tròn đường kính BD (làm tròn kết quả đến một chữ số thập phân).

Lời giải.



- Điểm H và C cùng nhìn đoạn thẳng BD dưới một góc 90° nên tứ giác $BHCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD .
- Do tứ giác $BHCD$ nội tiếp nên $\widehat{BDC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$.
Do $\widehat{BHK}$ là góc bẹt nên $\widehat{KHC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$.
Từ đó suy ra $\widehat{CHK} = \widehat{BDC}$.
Vậy $\triangle KHC \sim \triangle KDB$ do có $\widehat{CHK} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{K}$ chung.
- Do hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 cm nên $BD = 3\sqrt{2}$ cm.
Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BHCD$ là $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

Độ dài cung CH là $\ell = \frac{\pi \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 40}{180} \approx 1,5$ cm.

□

Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp mặt cầu tâm O (các đỉnh của hình hộp chữ nhật nằm trên mặt cầu). Các kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là a, b, c . Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật, S_2 là diện tích mặt cầu. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c để tỉ lệ $\frac{S_1}{S_2}$ lớn nhất.

Lời giải.

Ta có $S_1 = 2(ab + bc + ac)$ và $S_2 = 4\pi \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4} = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$.
Do đó $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2(ab + bc + ac)}{\pi(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{2(2ab + 2bc + 2ac)}{\pi(2a^2 + 2b^2 + 2c^2)} \leq \frac{2}{\pi}$.

Do đó tỉ lệ $\frac{S_1}{S_2}$ lớn nhất là $\frac{2}{\pi}$. Điều này xảy ra khi $a = b = c$. □

———— HẾT ————

63 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC KHÁNH HÒA

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. (Không sử dụng máy tính cầm tay)

- a) Tính giá trị biểu thức $T = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
 b) Giải phương trình $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} - \sqrt{2-2\cdot 1\cdot \sqrt{2}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1) = 1. \end{aligned}$$

b) Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$). Khi đó, $x = t^2$ và phương trình trở thành:

$$t^2 - 3t - 10 = 0.$$

Giải phương trình này ta thu được hai nghiệm $t_1 = 5$ (nhận) và $t_2 = -2$ (loại).

Với $t = 5$, ta có $\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 25$. □

Câu 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = -3x^2$ và hai điểm $A(1; -3)$ và $B(2; 3)$.

- a) Chứng tỏ rằng điểm A thuộc parabol (P) .
 b) Tìm tọa độ điểm C (C khác A) thuộc parabol (P) sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải.

a) Thay $x = 1, y = -3$ vào $(P) : y = -3x^2$ ta có $-3 = -3 \cdot 1^2$ (thỏa mãn).

Vậy $A \in (P)$.

b) A, B, C thẳng hàng và $C \in (P)$, vậy C là giao điểm của đường thẳng AB và parabol (P) .

Phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$, trong đó a, b là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} -3 = a + b \\ 3 = 2a + b. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có $a = 6; b = -9$. Vậy phương trình AB là $y = 6x - 9$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng AB và parabol (P) là:

$$6x - 9 = -3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0.$$

Giải phương trình này, ta có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -3$. Vì C không trùng với A và A có hoành độ bằng 1, nên C có hoành độ -3 . Từ đó suy ra tọa độ điểm C là $C(-3; -27)$.

**Câu 3.**

- a) Tìm hai số, biết tổng của chúng bằng 7 và tích của chúng bằng 12.
- b) Một hội trường có 300 ghế ngồi (loại ghế một người ngồi) được xếp thành nhiều dãy với số lượng ghế mỗi dãy như nhau để tổ chức một sự kiện. Vì số người dự lên đến 351 người nên người ta phải xếp thêm 1 dãy ghế có số lượng ghế như dãy ghế ban đầu và sau đó xếp mỗi dãy 2 ghế (kể cả dãy ghế xếp thêm) để vừa đủ mỗi người ngồi một ghế.
- Hỏi ban đầu hội trường đó có bao nhiêu dãy ghế?

Lời giải.

- a) Hai số cần tìm có tổng bằng 7 và tích bằng 12. Do đó hai số này là nghiệm (nếu có) của phương trình

$$X^2 - 7X + 12 = 0.$$

Giải phương trình này, ta thu được hai nghiệm $X_1 = 3$ và $X_2 = 4$.

Vậy hai số cần tìm là 3 và 4.

- b) Gọi x là số dãy ghế ban đầu của hội trường ($x \in \mathbb{N}^*$).

Từ đó suy ra số ghế của mỗi dãy ban đầu là $\frac{300}{x}$.

Thực tế, số dãy ghế là $x + 1$ và số ghế của một dãy là $\frac{351}{x + 1}$.

Vì phải xếp thêm 2 ghế mỗi dãy nên ta có phương trình:

$$\frac{351}{x + 1} - 2 = \frac{300}{x}.$$

Giải phương trình này, ta thu được hai nghiệm $x_1 = 12$ (nhận) và $x_2 = \frac{25}{2}$ (loại).

Vậy số dãy ghế ban đầu là 12 dãy.



Câu 4. Cho đường tròn $(O; OA)$. Trên bán kính OA lấy điểm I sao cho $OI = \frac{1}{3}OA$. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại điểm I và vẽ đường kính BD . Gọi E là giao điểm của AD và BC .

- a) Chứng minh DA là tia phân giác của $\widehat{BDC}$.
- b) Chứng minh OE vuông góc với AD .
- c) Lấy điểm M trên đoạn IB (M khác I và B). Tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm N . Tứ giác $MNDE$ có phải là một tứ giác nội tiếp hay không? Vì sao?

Lời giải.

- a) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BDA} = \widehat{ACB} \quad (\text{cùng chắn } \widehat{AB}) \\ \widehat{ADC} = \widehat{CBA} \quad (\text{cùng chắn } \widehat{AC}) \\ \widehat{ACB} = \widehat{CBA} \quad (\text{vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A) \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{ADC}.$$

Suy ra DA là tia phân giác của $\widehat{BDC}$.

- b) Ta có I là trung điểm BC . Vậy OI là đường trung bình của $\triangle BDC$. Từ đây ta có $DC = 2OI = \frac{2}{3}OA$.

Mặt khác $IA = OA - OI = \frac{2}{3}OA$. Vậy $IA = DC$.

Xét $\triangle IAE$ và $\triangle CDE$ có:

$\widehat{IAE} = \widehat{CDE}$ (hai góc ở vị trí so le trong)

$\widehat{AIE} = \widehat{DCE} (= 90^\circ)$

$IA = CD$ (chứng minh trên).

Suy ra $\triangle IAE = \triangle CDE$ (g.c.g). Từ đó ta có $AE = DE$ (cạnh tương ứng), hay E là trung điểm của AD .

Suy ra $OE \perp DA$.

- c) Ta có:

$\widehat{MED} = \widehat{BED} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BND} + \text{sđ}\widehat{AC})$ (góc có đỉnh nằm trong đường tròn)

$\widehat{MND} = \widehat{AND} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{ACD}$ (góc nội tiếp)
 $= \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AC} + \text{sđ}\widehat{CD}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} + \text{sđ}\widehat{CD})$

Vậy $\widehat{MED} + \widehat{MND} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BND} + \text{sđ}\widehat{DC} + \text{sđ}\widehat{CA} + \text{sđ}\widehat{AB}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $MNDC$ nội tiếp.

□

Câu 5. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của một hình trụ có chu vi hình tròn đáy là 16cm và chiều cao là 5cm.

Lời giải.

Ta có bán kính đáy của hình trụ là: $r = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi}$.

Vậy diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{8}{\pi} \cdot 5 = 80 \text{ (cm}^2\text{)}$.

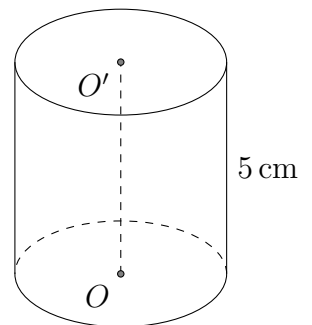
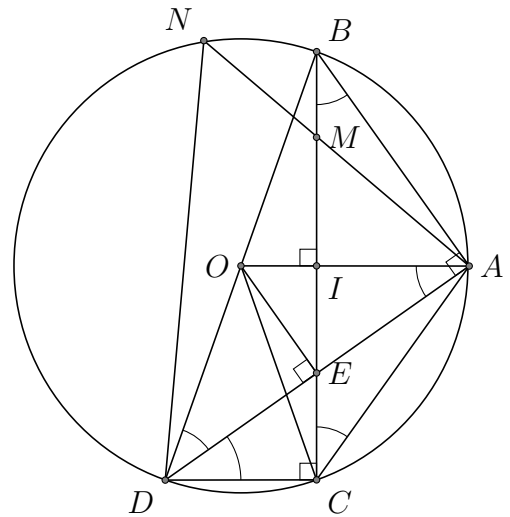
Diện tích toàn phần là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 80 + 2\pi r^2 = 80 + 2\pi \cdot \left(\frac{8}{\pi}\right)^2 = 80 + \frac{128}{\pi} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích là $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{8}{\pi}\right)^2 \cdot 5 = \frac{320}{\pi} \text{ (cm}^3\text{)}$.

□

———— HẾT ————



64 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HƯNG YÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 6}$.
- b) Tìm m để đồ thị hàm số $y = mx + 3$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.
- c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

- a) $A = \sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 6} = \sqrt{3} + |2 - \sqrt{3}| + 6 = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 6 = 2 + 6 = 8$.
- b) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5 nên ta có phương trình:

$$0 = 5m + 3 \Leftrightarrow m = \frac{-3}{5}$$

- c) Lấy phương trình dưới nhân với -1 rồi cộng với phương trình trên ta được phương trình:
 $4y = 8 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 3$.
 Hoặc rút $x = 9 - 3y$ thay vào phương trình dưới ta được phương trình:
 $9 - 3y - y = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 9 - 3.2 = 3$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ (m là tham số).

- a) Giải phương trình với $m = 3$.
- b) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:
 $(x_1x_2 + 1)^2 - 2(x_1 + x_2) = 0$.

Lời giải.

- a) Thay $m = 3$ vào phương trình ta có $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Ta có $\Delta' = b'^2 - a.c = 1 + 3 = 4$.

Theo công thức nghiệm, ta có:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 - 2}{1} = -1 \\ x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 + 2}{1} = 3 \end{cases}$$

- b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = -m \end{cases}$.

Thay vào điều kiện ta có:

$$(-m + 1)^2 - 2.2 = 0 \Leftrightarrow (1 - m)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 & (\text{nhận}) \\ m = -1 & (\text{loại}) \end{cases}$$

□

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E , F là hình chiếu vuông góc của E trên AB .

- a) Chứng minh tứ giác $ADEF$ nội tiếp.
- b) Gọi N là giao điểm của CF và BD . Chứng minh $BN.ED = BD.EN$.

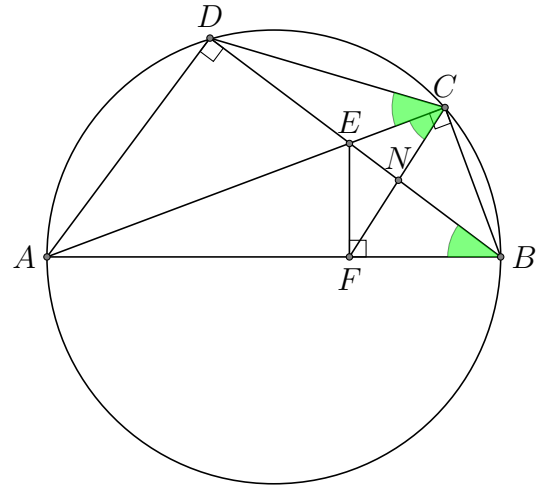
Lời giải.

a) $\triangle ADB$ nội tiếp đường tròn và có cạnh AB là đường kính nên $\triangle ADB$ vuông tại $D \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$.

Mặt khác $EF \perp AB \Rightarrow \widehat{AFE} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ADEF$ có: $\widehat{ADE} + \widehat{AFE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Vậy tứ giác này nội tiếp đường tròn.



b) Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DCA} = \widehat{ABD}$ (1) do cùng chắn cung AD .

Chứng minh tương tự câu a) cho tứ giác $FECB$ thì tứ giác này cũng nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{ACF} = \widehat{ABD}$ (2) do cùng chắn cung EF .

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{ACF} \Rightarrow CA$ là tia phân giác của $\widehat{DCF}$.

Xét $\triangle DCN$ có CE là đường phân giác của góc C . Theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow \frac{CN}{CD} = \frac{EN}{ED}$ (3).

Mặt khác, ta có $CA \perp CB$ ($\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn có đường kính AB) mà CA là tia phân giác trong $\Rightarrow CB$ là tia phân giác ngoài của $\triangle DCN$, theo tính chất của tia phân giác ngoài $\Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{CN}{CD}$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{EN}{ED} = \frac{BN}{BD} \Rightarrow BN \cdot ED = EN \cdot BD$ (đpcm). $\square$

Câu 4. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} + 2xy - \frac{x^2 + y^2}{32} - \frac{35xy}{16} \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} - \frac{x^2 + y^2}{32} - \frac{xy}{16} - \frac{xy}{8} \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} - \frac{(x + y)^2}{32} - \frac{xy}{8} \end{aligned}$$

Sử dụng Cauchy cho các cặp sau $\frac{2}{x^2 + y^2}; \frac{x^2 + y^2}{32}$ và $\frac{35}{xy}; \frac{35xy}{16}$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{32} &\geq 2\sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{2} \\ \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} &\geq 2\sqrt{\frac{35^2}{16}} = \frac{35}{2} \end{aligned}$$

Mặt khác $x + y \leq 4 \Rightarrow x.y \leq 4$ nên $\frac{xy}{8} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{(x+y)^2}{32} \leq \frac{1}{2}$.

Vậy ta có $\min P = \frac{1}{2} + \frac{35}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 17$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$.

Cách khác:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{2}{2xy} + \frac{34}{xy} + \frac{17xy}{8} - \frac{xy}{8} \\ &= 2 \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(\frac{34}{xy} + \frac{17xy}{8} \right) - \frac{xy}{8} \\ &\geq \frac{2.4}{x^2 + y^2 + 2xy} + 2\sqrt{\frac{34.17}{8}} - \frac{(x+y)^2}{32} \\ &\geq \frac{8}{16} + 17 - \frac{1}{2} = 17 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$.

□

———— HẾT ————

65 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC THỪA THIÊN HUẾ

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tìm x để biểu thức $A = \sqrt{x-1}$ có nghĩa.
 b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{5^2 \cdot 2}$.
 c) Rút gọn biểu thức $C = \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} - \frac{a\sqrt{a}-1}{a-1}$ với $a \geq 0$; $a \neq 1$.

Lời giải.

- a) Biểu thức A có nghĩa khi $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
 b) Ta có $B = \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{5^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0$
 c) Với điều kiện $a \geq 0$ và $a \neq 1$, ta có $C = \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} - \frac{a\sqrt{a}-1}{a-1} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1) - (a\sqrt{a}-1)}{a-1} = \frac{a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a - 1 - a\sqrt{a} + 1}{a-1} = \frac{a - \sqrt{a}}{a-1} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$

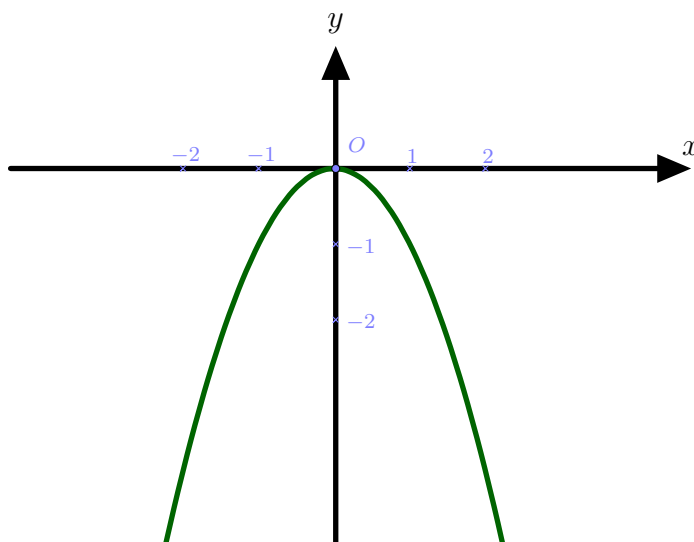
□

Câu 2.

- a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$.
 b) Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .
 (a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.
 (b) Cho đường thẳng $y = mx + n$ (Δ) . Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y = -2x + 5$ (d) và có duy nhất một điểm chung với (P) .

Lời giải.

- a) Ta có $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y \\ 3(4-2y)-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y \\ -7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.
 b)
 (a) Đồ thị (P)



(b) Ta có $\Delta // d$ nên ta có $\begin{cases} m = -2 \\ m \neq 5 \end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (P) là:

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2x + n \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + n = 0 (*)$$

Δ tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}n = 0 \Leftrightarrow n = 2 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = -2 \\ n = 2 \end{cases}$$

□

Câu 3. Cho hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 5 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ rồi đóng lại, sau đó mở vòi thứ hai chảy trong 1 giờ thì ta được $\frac{1}{4}$ bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi $x(h)$ là thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể nếu mở riêng $(x > 5)$.

$y(h)$ là thời gian vòi thứ hai chảy đầy bể nếu mở riêng $(y > 5)$.

Trong 1 h:

- Vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể.
- Vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể.
- Cả hai vòi chảy được $\frac{1}{5}$ bể.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{y} = \frac{3}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = \frac{20}{3} \end{cases}$

Vậy nếu mở riêng từng vòi thì thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể là $20h$, thời gian vòi thứ 2 chảy đầy bể là $\frac{20}{3}h$ □

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ (1), với x là ẩn số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0$$

Lời giải.

a) Với $m = 2$, phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 5) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - m^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow 2m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 2$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m+2 \\ P = x_1x_2 = m^2 + 5 \end{cases}$$

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(m^2 + 5) - 5(2m+2) + 8 = 0$$

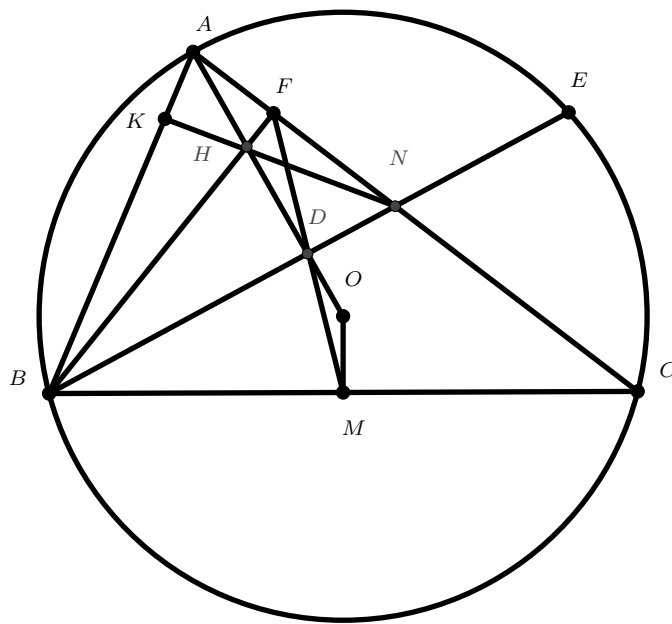
$$\Leftrightarrow 2m^2 - 10m + 8 = 0 \text{ (a + b + c = 0)} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = 4 \text{ (thỏa)} \end{cases}. \text{ Vậy } m = 4.$$



Câu 5. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và D là hình chiếu vuông góc của B trên AO sao cho D nằm giữa A và O . Gọi M là trung điểm BC , N là giao điểm của BD và AC , F là giao điểm của MD và AC , E là giao điểm thứ hai của BD với đường tròn (O) , H là giao điểm của BF và AD . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $BDOM$ nội tiếp và $\widehat{MOD} + \widehat{NAE} = 180^\circ$.
- DF song song với CE , từ đó suy ra $NE.NF = NC.ND$.
- CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCE}$.
- HN vuông góc với AB .

Lời giải.



- Ta có $BD \perp OD$ nên $\widehat{BDO} = 90^\circ$.
 M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$ hay $\widehat{BMO} = 90^\circ$.
 Vậy tứ giác $BDOM$ nội tiếp đường tròn (O) .
 Ta có $\widehat{MBD} + \widehat{MDO} = 180^\circ$.
 Mà $\widehat{MBD} = \widehat{NAE}$ (cùng chắn cung $\widehat{EC}$).
 Do đó $\widehat{MDO} + \widehat{NAE} = 180^\circ$.
- Xét tam giác BCE ta có D là trung điểm của BE (do $OD \perp BE$) và M là trung điểm của BC nên MD là đường trung bình tam giác BCE .
 Do đó $MD \parallel EC$.
 Vậy $DF \parallel CE$.
 Ta có $\triangle NDF$ đồng dạng với $\triangle NEC$ nên $\frac{ND}{NE} = \frac{NF}{NC} \Leftrightarrow NE.NF = NC.ND$.
- Ta có $\triangle OBD = \triangle OED$ (do $BD = ED$, $OB = OE$, OD cạnh chung)
 Do đó: $\widehat{BOD} = \widehat{EOD}$ nên $\widehat{AB} = \widehat{AE}$. Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ACE}$ (cùng chắn hai cung bằng

nhau). Vậy CA là tia phân giác của $\widehat{BCE}$

d) Ta có $\widehat{DFN} = \widehat{NCE}$ (góc sole trong do $NF \parallel EC$)

Mà $\widehat{NCE} = \widehat{NCM}$ (theo câu trên)

Nên $\widehat{DFN} = \widehat{NCM}$

Do đó $\triangle FMC$ cân tại M .

Suy ra $MF = MC = \frac{BC}{2}$.

$\triangle BFC$ có MF là đường trung tuyến và $MF = MC = \frac{BC}{2}$ nên $\triangle BFC$ vuông tại F .

Suy ra $BF \perp AN$.

Tam giác ABN có $BF \perp AN$, $AD \perp BN$ nên H là trực tâm của $\triangle ABN$.

Vậy $NH \perp AB$.

□

Câu 6. Một cốc nước có dạng hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, chiều cao bằng 12cm và chứa một lượng nước cao 10 cm. Người ta thả từ từ 3 viên bi làm bằng thủy tinh có cùng đường kính bằng 2 cm vào cốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi h (cm) ($h > 0$) là chiều cao mực nước tăng thêm.

Tổng thể tích của ba viên bi là: $V_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1^3 = 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm}^3$.

Ta có: $V_1 = 3,14 \cdot 3^2 \cdot h = 12,56 \Leftrightarrow h = \frac{4}{9} \text{ cm}$.

Mực nước trong cốc lúc này cao $10 + \frac{4}{9} = \frac{94}{9} \text{ cm}$.

□

———— HẾT ————

66 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC TP HCM

Câu 1.

- a) Giải phương trình: $x^2 = (x - 1)(3x - 2)$
- b) Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 100 m. Tính chiều dài và chiều rộng của miếng đất, biết rằng 5 lần chiều rộng hơn 2 lần chiều dài 40 m.

Lời giải.

- a) Phương trình $x^2 = (x - 1)(3x - 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$. Tính $\Delta = 9$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$.
- b) Gọi x, y (m) lần lượt là chiều rộng và chiều dài của miếng đất ($y > x > 0$). Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x + y) = 100 \\ 5x - 2y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 7x = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy, chiều rộng là 20 m và chiều dài là 30 m.

□

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy :

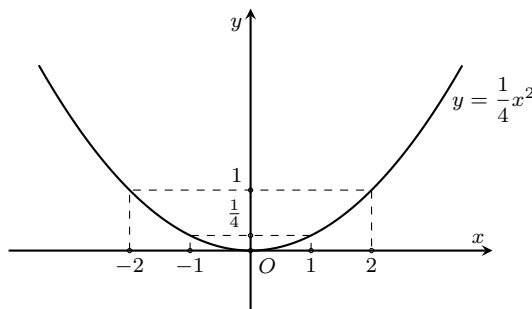
- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.
- b) Cho đường thẳng $(D) : y = \frac{3}{2}x + m$ đi qua điểm $C(6; 7)$. Tìm tọa độ giao điểm của (D) và (P) .

Lời giải.

- a) Hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$.
- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
 - Bảng giá trị:

x	-2	1	0	1	2
y	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

- Đồ thị:



- b) Đường thẳng $(D) : y = \frac{3}{2}x + m$ đi qua điểm $C(6; 7)$ nên ta có $7 = \frac{3}{2} \cdot 6 + m \Leftrightarrow m = -2$ hay phương trình $(D) : y = \frac{3}{2}x - 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là

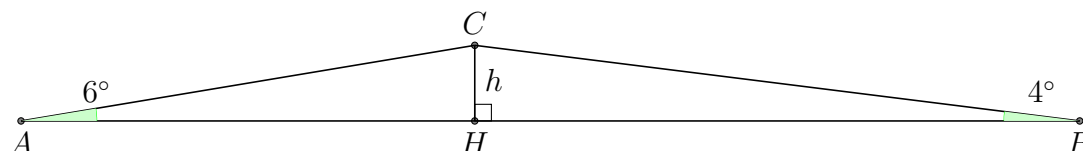
$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{2}x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2. \end{cases}$$

Khi đó, (D) và (P) cắt nhau tại 2 điểm $A(4; 4)$ và $B(2; 1)$.

□

Câu 3.

- a) Thu gọn biểu thức sau: $A = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\frac{14 - 6\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}}$
- b) Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc (như hình vẽ bên dưới). Cho biết đoạn thẳng AB dài 762 m, góc $A = 6^\circ$, góc $B = 4^\circ$



- (a) Tính chiều cao h của con dốc.
- (b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ trung bình lên dốc là 4 km/h và tốc độ trung bình xuống dốc là 19 km/h.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\frac{14 - 6\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}} = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\frac{(14 - 6\sqrt{3})(5 - \sqrt{3})}{25 - 3}} = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\frac{44(2 - \sqrt{3})}{22}} \\ &= (\sqrt{3} + 1)\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

- b)

- (a) Xét tam giác ACH vuông tại H , ta có $\tan CAH = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan 6^\circ}$ (1). Tam giác BCH vuông tại H , ta có $\tan CBH = \frac{CH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan 4^\circ}$ (2).
 Từ (1) và (2) ta có $AB = AH + BH = \frac{CH}{\tan 6^\circ} + \frac{CH}{\tan 4^\circ} \Leftrightarrow 762 = CH \left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ} \right) \Leftrightarrow$
 $CH = 762 : \left(\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ} \right) \approx 32 \text{ m.}$
- (b) $\circ$ Đoạn đường $AC = \frac{CH}{\sin 6^\circ} = \frac{32}{\sin 6^\circ} \approx 306 \text{ m} = 0,306 \text{ km}$, thời gian bạn An đi hết quãng đường AC là $t_1 = \frac{AC}{4} = \frac{0,306}{4} \approx 0,075 \text{ h.}$
 $\circ$ Đoạn đường $BC = \frac{CH}{\sin 4^\circ} = \frac{32}{\sin 4^\circ} \approx 459 \text{ m} = 0,459 \text{ km}$, thời gian bạn An đi hết quãng đường BC là $t_2 = \frac{BC}{19} = \frac{0,459}{19} \approx 0,024 \text{ h.}$
 $\circ$ Tổng thời gian bạn An đi là $t_1 + t_2 = 0,075 + 0,024 = 0,099 \approx 0,1 \text{ h} = 6 \text{ phút}$. Vậy bạn An đến trường lúc 6 giờ 6 phút.

□

Câu 4. Cho phương trình: $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

- a) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn $(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2$.

Lời giải.

Xét phương trình: $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số)

a) Ta tính được $\Delta = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - 1) = -4m + 5$. Do $a = 1 \neq 0$, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$ (*).

b) Với điều kiện (*), và theo Định lý Viète phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 1. \end{cases}$$

Kết hợp với giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = x_1 - 3x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 - 3x_2 = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - 1) = -4m + 5. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 - 3x_2 = -4m + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ 4x_2 = 6(m - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m + 1}{2} \\ x_2 = \frac{3(m - 1)}{2} \end{cases}.$$

Mặt khác

$$x_1 x_2 = m^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{m + 1}{2} \cdot \frac{3(m - 1)}{2} = m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 \quad (\text{nhận}).$$

Vậy có 2 giá trị $m = \pm 1$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn tâm O đường kính AB cắt các đoạn BC và OC lần lượt là D và I . Gọi H là hình chiếu của A lên OC ; AH cắt BC tại M

a) Chứng minh: Tứ giác $ACDH$ nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.

b) Chứng minh: Hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau và HM là tia phân giác của góc BHD .

c) Gọi K là trung điểm của BD . Chứng minh: $MD \cdot BC = MB \cdot CD$ và $MB \cdot MD = MK \cdot MC$.

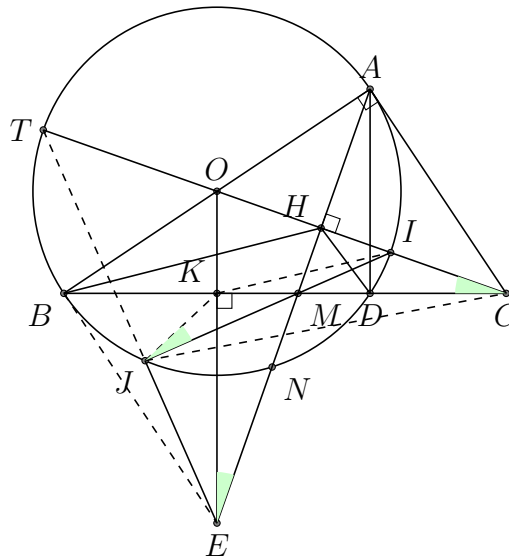
d) Gọi E là giao điểm của AM và OK ; J là giao điểm của IM và (O) (J khác I).

Chứng minh: Hai đường thẳng OC và EJ cắt nhau tại một điểm nằm trên (O) .

Lời giải.

a) Xét tứ giác $ACDH$ có $\widehat{AHC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, nên tứ giác $ACDH$ nội tiếp.

Từ đó, $\widehat{CHD} = \widehat{CAD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn 1 cung) mà $\widehat{CAD} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BCA}$) nên suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.



- Xét hai tam giác OHB và OBC . Ta có $\begin{cases} \widehat{BOH} = \widehat{COB} \\ \frac{OH}{OB} = \frac{OB}{OC}, \end{cases}$ nên hai tam giác OHB và OBC

Từ đó suy ra $\widehat{OHB} = \widehat{OBC}$. Mà $\widehat{OBC} = 90^\circ - \widehat{ACD} = 90^\circ - \widehat{DHM}$ (tứ giác $AHDC$ nội tiếp). Bên cạnh đó, $\widehat{OHB} = 90^\circ - \widehat{BHM}$. Suy ra, góc $\widehat{BHM} = \widehat{DHM}$, HM là tia phân giác của góc BHD .

- Chứng minh $MB.MD = MK.MC$. Gọi N là giao điểm thứ hai của AH và đường tròn (O) . Ta có $OH \perp AN$ nên H là trung điểm AN và suy ra được OC là đường trung trực của AN , tức là $CA = CN$. Hai tam giác OAC và ONC bằng nhau theo trường hợp cạnh cạnh cạnh. Khi đó, góc $\widehat{ONC} = 90^\circ$. Mặt khác, $\widehat{OKC} = 90^\circ$ (K là trung điểm BD).

Bổ đề: I là giao điểm hai dây cung AC và BD của một đường tròn thì $IA \cdot IC = IB \cdot ID$. (dễ chứng minh)

d) Ta có $MI.MJ = MD.MB = MK.MC$ (Câu c) nên sẽ chứng minh được tứ giác $IKJC$ nội tiếp (dễ chứng minh bổ đề), suy ra $\widehat{KCI} = \widehat{KJI}$. Mặt khác, tứ giác $KHCE$ nội tiếp, nên $\widehat{HCK} = \widehat{HEK}$. Ta có được $\widehat{HEK} = \widehat{MEK} = \widehat{KJI} = \widehat{KJM}$ nên tứ giác $JKME$ nội tiếp và suy ra góc $\widehat{EJM} = \widehat{EKM} = 90^\circ$.

Gọi T là giao điểm thứ hai của EJ và đường tròn (O) , suy ra $\widehat{TJI} = \widehat{IJE} = 90^\circ$ (2 góc kề bù), hay TI là đường kính và T, I, O, C là 4 điểm thẳng hàng (đpcm).



———— HẾT ————

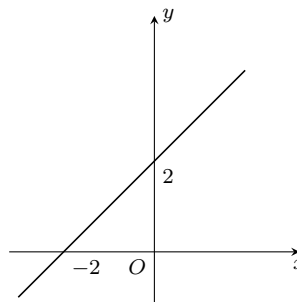
subsectionĐề thi vào 10, Sở giáo dục Hòa Bình

Câu 1.

- Rút gọn $A = \sqrt{8} - \sqrt{2}$
 - Phân tích đa thức sau thành nhân tử $B = x^2 - 3x + 2$
- Tìm x biết:
 - $2x - 3 = 0$
 - $|x + 3| = 2$
- Tìm m để đường thẳng $(d) : y = mx + 2$ đi qua điểm $M(1; 3)$. Khi đó hãy vẽ đường thẳng (d) trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Lời giải.

- Rút gọn: $A = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.
 - Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $B = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.
- Tìm x biết:
 - $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
 - $|x + 3| = 2 \Leftrightarrow x + 3 = 2$ hoặc $x + 3 = -2 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -5$.
- Điểm $M(1; 3) \in (d)$ nên $3 = m + 2$ suy ra $m = 1$. Khi đó đường thẳng $(d) : y = x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0, 2)$ và $(-2, 0)$. Đồ thị



□

Câu 2.

- Giải phương trình $(x + 1)^4 - 2(x + 1)^2 - 3 = 0$.
- Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - x_2 = 7$.
- Cho $x \in \mathbb{R}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 + 1}$

Lời giải.

- Đặt $t = (x + 1)^2, t \geq 0$. Khi đó
 $(x + 1)^4 - 2(x + 1)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ và $t = -1$ (loại). Do đó $x = -1 + \sqrt{3}$ hoặc $x = -1 - \sqrt{3}$
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.
 Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$
 Mà $2x_1 - x_2 = 7 \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 7$, do đó ta thu được $x_1 = 3, x_2 = -1$ và $m = -2$.
- Ta có $P = \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 + 1} = x^2 + 1 + \frac{2}{x^2 + 1} + 1$.

Đặt $y = x^2 + 1$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương y và $\frac{2}{y}$, ta có

$$P = y + \frac{2}{y} + 1 \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{2}{y}} + 1, \text{ do đó } P \geq 2\sqrt{2} + 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y = \frac{2}{y}$ hay $x^2 = -1 + \sqrt{2}$, suy ra $x = \pm\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$.

□

Câu 3. Một phòng họp có 240 ghế (mỗi ghế có một chỗ ngồi) được xếp thành từng dãy, mỗi dãy có số ghế bằng nhau. Trong một cuộc họp có 315 người tham dự nên ban tổ chức phải kê thêm ba dãy ghế và mỗi dãy tăng thêm một ghế so với ban đầu thì vừa đủ chỗ ngồi. Tính số dãy ghế có trong phòng họp lúc đầu, biết rằng số dãy ghế nhỏ hơn 50.

Lời giải.

Gọi số dãy ghế ban đầu là x ($x \in \mathbb{N}, x < 50$).

Gọi số ghế trong một dãy ban đầu là y .

Số ghế trong một dãy kê thêm là $y + 1$.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} xy = 240 \\ 3(y + 1) = 315 - 240 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình, ta được $x = 10$.

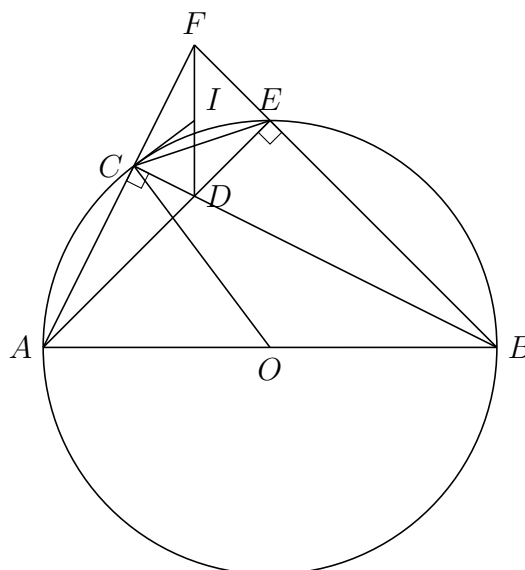
Vậy số dãy ghế có trong phòng họp lúc đầu là 10 dãy.

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm (O) có đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm D thuộc dây cung BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E . Tia AC cắt tia BE tại điểm F .

- Chứng minh rằng tứ giác $FCDE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh rằng $DA \cdot DE = DB \cdot DC$.
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$. Chứng minh rằng IC là tiếp tuyến đường tròn tâm (O) .

Lời giải.



a) Xét tứ giác $FCDE$ có

$$\widehat{DCF} = 90^\circ$$

$$\widehat{DEF} = 90^\circ$$

$$\text{suy ra } \widehat{DCF} + \widehat{DEF} = 180^\circ.$$

Mà hai góc ở vị trí đối nhau nên $FCDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có

$$\left. \begin{aligned} \widehat{CAD} &= \widehat{EBD} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)} \\ \widehat{ADC} &= \widehat{BDE} \text{ (đối đỉnh)} \end{aligned} \right\}$$

do đó $\triangle ACD \sim \triangle BED$ (g.g).

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DE} \Rightarrow DA \cdot DE = DB \cdot DC.$$

c) Ta có $\widehat{ICF} = \widehat{IFC}$ (do tam giác CIF cân tại I)

$$\widehat{CFD} = \widehat{CED} \text{ (do tứ giác } FCDE \text{ nội tiếp)}$$

$$\widehat{CED} = \widehat{ABC} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn một cung } AC)$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \widehat{OCB} \text{ (do tam giác } OBC \text{ cân tại } O)$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ICF} = \widehat{OCB}.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{ICF} + \widehat{DCI} = 90^\circ$$

$$\text{Vậy nên } \widehat{OCB} + \widehat{DCI} = 90^\circ, \text{ suy ra } IC \text{ là tiếp tuyến đường tròn } (O).$$

□

Câu 5. Cho các số a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}} + \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \sqrt{\frac{c}{1-c}} > 2$$

Lời giải.

Ta có $a + b + c = 1$ nên $1 - a = b + c$, $1 - b = a + c$, $1 - c = a + b$. Do đó

$$VT = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}} = \frac{b}{\sqrt{b(a+c)}} \geq \frac{b}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2b}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c}{b+a}} = \frac{c}{\sqrt{c(b+a)}} \geq \frac{c}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2c}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3) ta có

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}} + \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \sqrt{\frac{c}{1-c}} > 2$$

với $a + b + c = 1$, dấu “=” ở (1), (2), (3) không xảy ra.

□

———— HẾT ————

67 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ TĨNH**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** Rút gọn các biểu thức sau

a. $P = \sqrt{48} - \sqrt{3}.$

b. $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{x-1},$ với $x \geq 0, x \neq 1.$

Lời giải.

a. $P = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

b. $Q = 2\sqrt{x}.$ □

Câu 2.a. Cho đường thẳng $(d) : y = mx + m - 2$ và đường thẳng $(d') : y = 2x - 1$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) và (d') song song với nhau.b. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 13.$ **Lời giải.**

a. $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m - 2 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

b. Áp dụng hệ thức Vi-ét □**Câu 3.** [9D4G8]

Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 90 km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, do điều kiện thời tiết không thuận lợi nên trên quãng đường còn lại người đó phải đi với vận tốc ít hơn so với vận tốc dự định ban đầu 10 km/h. Tính vận tốc dự định và thời gian người đó đã đi từ A đến B , biết người đó đến muộn hơn dự định 18 phút.

*(Đề thi vào 10, Sở giáo dục Hà Tĩnh, 2017)***Lời giải.**

Gọi x km/h là vận tốc dự định của xe máy đi từ A đến B . Ta có phương trình $\frac{90}{x} + \frac{3}{10} = \frac{30}{x} + \frac{60}{x-10}.$

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB cố định. Qua I là điểm cố định thuộc đoạn OA (I không trùng A và O) vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tâm O tại M và N . Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN (C không trùng các điểm M, N và B), E là giao điểm của AC và MN .

a. Chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp đường tròn.b. Chứng minh $AE.AC = AI.AB.$ c. Chứng minh khi điểm C thay đổi trên cung lớn MN của đường tròn tâm O thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME luôn thuộc một đường thẳng cố định.**Lời giải.**

68 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC NINH BÌNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{3}(\sqrt{12} - \sqrt{3})$.
- b) Tìm m để đường thẳng $y = (m - 1)x + 3$ song song với đường thẳng $y = 2x + 1$.
- c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$$

Lời giải.

- a) $A = \sqrt{36} - 3 = 6 - 3 = 3$.
- b) Đường thẳng $y = (m - 1)x + 3$ song song với đường thẳng $y = 2x + 1$ khi và chỉ khi
$$\begin{cases} m - 1 = 2 \\ 3 \neq 1 \end{cases} \iff m = 3.$$
- c)
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x = 12 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 + 2(m + 2)x + 4m - 1 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số) (1).

- a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
- b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 30$.

Lời giải.

- a) Khi $m = 2$, ta có phương trình $x^2 + 8x + 7 = 0$, $a - b + c = 0$ cho nên $x_1 = -1, x_2 = -7$.
- b) $\Delta' = (m + 2)^2 - 4m + 1 = m^2 + 5 > 0$ với mọi m cho nên phương trình có nghiệm với mọi m . Theo định lý Vi-ét ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m + 2)^2 - 2(4m - 1) = 4m^2 + 8m + 18 = 30 \iff m = 1, m = -3$.

□

Câu 3. Một ô tô dự định đi từ bến xe A đến bến xe B cách nhau 90 km với vận tốc không đổi. Tuy nhiên, ô tô khởi hành muộn 12 phút so với dự định. Để đến bến xe B đúng giờ ô tô đã tăng vận tốc lên 5 km/h so với vận tốc dự định. Tìm vận tốc dự định của ô tô.

Lời giải.

Gọi vận tốc ô tô dự định đi từ A đến B là x (km/h), $x > 0$, khi đó vận tốc ô tô thực tế đã đi từ A đến B là $x + 5$ (km/h)

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB với vận tốc dự định là : $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đã đi hết quãng đường AB là : $\frac{90}{x + 5}$ (h)

Theo giả thiết ta có phương trình $\frac{90}{x} - \frac{90}{x + 5} = \frac{1}{5}$ (1) (12 phút đổi thành $\frac{1}{5}$ giờ)

(1) $\iff x^2 + 5x + 2250 = 0 \iff x_1 = 45, x_2 = -50$ (loại) .

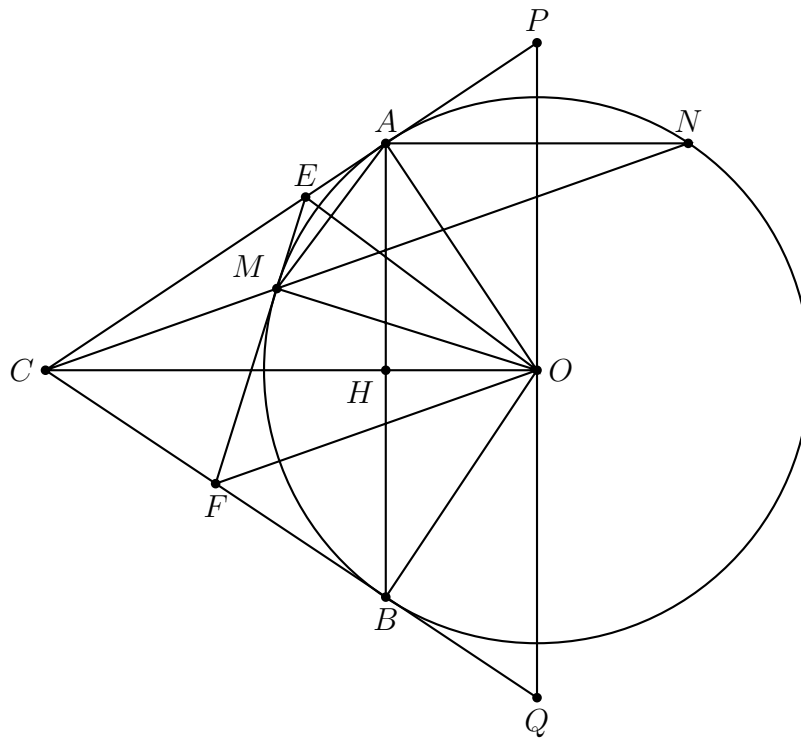
Vậy vận tốc dự định của ô tô là 45 (km/h)

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , bán kính R . Từ điểm C nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến CA, CB và cát tuyến CMN với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm, M nằm giữa C và N). Gọi H là giao điểm của CO và AB .

- Chứng minh tứ giác $AOBC$ nội tiếp.
- Chứng minh $CH.CO = CM.CN$.
- Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt CA, CB theo thứ tự tại E và F . Đường vuông góc với CO tại O cắt CA, CB theo thứ tự tại P, Q . Chứng minh $\widehat{POE} = \widehat{OFQ}$.
- Chứng minh $PE + QF \geq PQ$.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{CAO} = \widehat{CBO} = 90^\circ$ cho nên tứ giác $AOBC$ nội tiếp.
- Chứng minh $CH.CO = CM.CN$.
 + Tam giác ACO vuông tại A với AH là đường cao cho nên $CH.CO = CA^2$ (1).
 + Hai tam giác CAM và CNA có góc $\widehat{ACN}$ chung, $\widehat{CAM} = \widehat{CNA}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung) cho nên $\triangle CAM$ đồng dạng với $\triangle CNA$, kéo theo $\frac{CA}{CN} = \frac{CM}{CA} \iff CA^2 = CM.CN$ (2).
 + Từ (1) và (2) ta có $CH.CO = CM.CN$.
- Chứng minh $\widehat{POE} = \widehat{OFQ}$.
 + Dễ thấy $\widehat{POA} = \widehat{BOQ}$ và $\widehat{AOE} = \widehat{EOM}$.
 + Ta có $\widehat{OFQ} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BOQ} - \widehat{POM}}{2} = \widehat{POA} + \widehat{AOE} = \widehat{POE}$.
- Chứng minh $PE + QF \geq PQ$.
 + Theo ý 3. $\widehat{POE} = \widehat{OFQ}$ suy ra hai tam giác OPE và FQO đồng dạng cho nên $\frac{OP}{FQ} = \frac{PE}{QO} \iff OP.PQ = PE.QF \iff \frac{PQ^2}{4} = PE.QF \iff PQ = 2\sqrt{PE.QF}$. (1)

+ Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $2\sqrt{PE \cdot QF} \leq PE + QF$ (2)

+ Từ (1) và (2) ta có $PE + QF \geq PQ$.

□

Câu 5. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3a^2 + 2ab + 3b^2} + \sqrt{3b^2 + 2bc + 3c^2} + \sqrt{3c^2 + 2ca + 3a^2}$.

Lời giải.

Với các số thực bất kì x, y, z ta có $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2(x + y)^2 = (x - y)^2 \geq 0$, cho nên $P = \sqrt{3a^2 + 2ab + 3b^2} + \sqrt{3b^2 + 2bc + 3c^2} + \sqrt{3c^2 + 2ca + 3a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + b + c + c + a) = 2\sqrt{2}(a + b + c)$ (1)

Mặt khác $3(a + b + c) - (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0 \Rightarrow 3(a + b + c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = 9 \Rightarrow a + b + c \geq 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $P \geq 6\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy $P_{\min} = 6\sqrt{2}$. □

———— HẾT ————

69 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC NINH THUẬN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Giải bất phương trình và các phương trình sau:

- a) $4x - 5 > 7$
- b) $2x + 3(4x + 2) = 8$
- c) $\frac{1}{2}x^2 = 3x - 4$

Lời giải.

- a) Ta có $4x - 5 > 7 \Rightarrow 4x > 12 \Rightarrow x > 3$
- b) $2x + 3(4x + 2) = 8 \Leftrightarrow 2x + 12x + 6 = 8 \Leftrightarrow 14x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$
- c) $\frac{1}{2}x^2 = 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

Ta có: $\Delta' = 1$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 4, x_2 = 2$.

□

Câu 2. Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} \right) \cdot \frac{a - 1}{4(a + 1)}, \text{ với } a \geq 0; a \neq 1.$$

Với $a \geq 0; a \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} \right) \cdot \frac{a - 1}{4(a + 1)} = \frac{(\sqrt{a} + 1)^2 - (\sqrt{a} - 1)^2}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \cdot \frac{a - 1}{4(a + 1)} \\ &= \frac{4\sqrt{a}}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{4(a + 1)} = \frac{\sqrt{a}}{a + 1} \end{aligned}$$

Câu 3. Áp dụng hệ thức Vi-ét để tìm hai số, biết tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 56.

Lời giải.

Gọi hai số cần tìm là x, y . Ta có $\begin{cases} S = x + y = 15 \\ P = xy = 56 \end{cases}$. Theo định lý Vi-ét, x, y là hai nghiệm của

phương trình $X^2 - 15X + 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 7 \\ X = 8 \end{cases}$. Vậy hai số cần tìm là $\begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$ và điểm M trên đường tròn ($MA < MB$). Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BM tại N và cắt tia AM tại C .

- a) Chứng minh tứ giác $OAMN$ nội tiếp được một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng: $MN \cdot NB = ON \cdot NC$.
- c) Khi góc $\widehat{ABM} = 30^\circ$, tính diện tích của tam giác ABC theo R .

Lời giải.

a) Tứ giác $AOMN$ có:

$$\begin{cases} \widehat{AON} = 90^\circ \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{AMN} = \widehat{AMB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \end{cases}$$

Suy ra $\widehat{AON} + \widehat{AMN} = 180^\circ$

nên $AOMN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Hai tam giác vuông MNC và

ONB có $\widehat{MNC} = \widehat{ONB}$ nên

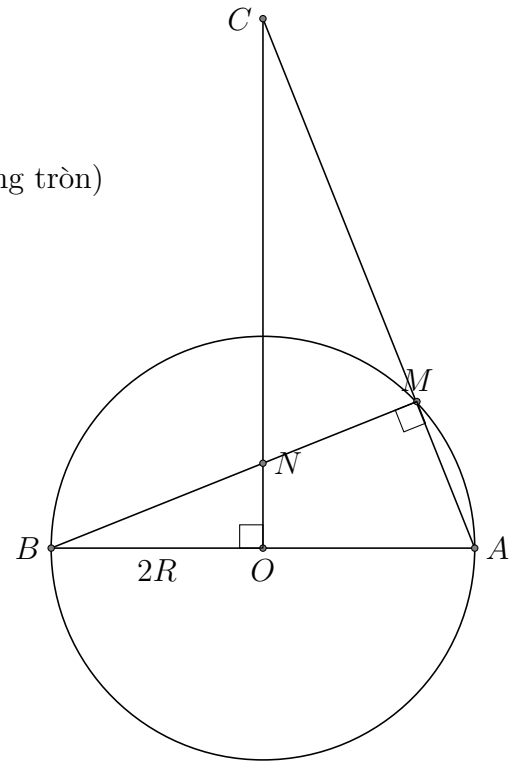
$\triangle MNC \sim \triangle ONB$. Suy ra

$$\frac{MN}{ON} = \frac{NC}{NB} \Leftrightarrow MN \cdot NB = ON \cdot NC.$$

c) Ta có: $\widehat{BAM} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều.

$$\Rightarrow OC = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \sqrt{3}R^2 (\text{đvdt}).$$



□

Câu 5. Cho hai số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = 3x^2 + y^2 + 8$.

Lời giải.

Với $x - y = 2$ ta có $y = x - 2$. Thay vào Q ta được:

$$Q = 3x^2 + (x - 2)^2 + 8 = 4x^2 - 4x + 12 = (2x - 1)^2 + 11 \geq 11$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q là 11 khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{3}{2}$.

□

————— **HẾT** —————

70 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC PHÚ THỌ

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải phương trình: $\frac{x+1}{2} - 1 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y = 5. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\frac{x+1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ x^2 - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Với $x = 1 - \sqrt{3}$ thì $y = 3 - 2(1 - \sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3}$.

Với $x = 1 + \sqrt{3}$ thì $y = 3 - 2(1 + \sqrt{3}) = 1 - 2\sqrt{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) \in \{(1 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3}), (1 + \sqrt{3}; 1 - 2\sqrt{3})\}$.

□

Câu 2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ $x_A = -1, x_B = 2$.

- a) Tìm tọa độ A, B .
- b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B .
- c) Tính khoảng cách từ O (gốc tọa độ) đến đường thẳng (d) .

Lời giải.

- a) Vì A, B thuộc (P) nên:

$$x_A = -1 \Rightarrow y_A = \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_B = 2 \Rightarrow y_B = \frac{1}{2}2^2 = 2$$

Vậy $A\left(-1; \frac{1}{2}\right), B(2; 2)$.

- b) Gọi phương trình đường thẳng (d) là $y = ax + b$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -a + b = \frac{1}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng (d) có phương trình $y = \frac{1}{2}x + 1$.

- c) (d) cắt trục Oy tại điểm $C(0; 1)$ và cắt trục Ox tại điểm $D(-2; 0) \Rightarrow OC = 1, OD = 2$.

Gọi h là khoảng cách từ O tới (d) . Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao vào tam giác vuông OCD , ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

□

Câu 3. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = 0$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$.

Lời giải.

a) Với $m = 0$, phương trình (1) trở thành: $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta' = 2$ nên phương trình có các nghiệm $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

b) $\Delta' = m + 2$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > -2$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 4 \Leftrightarrow \frac{2(m+1)}{m^2 + m - 1} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \neq 0 \\ m + 1 = 2(m^2 + m - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \neq 0 \\ 2m^2 + m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

□

Câu 4.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi I là giao điểm AC và BD . Kẻ IH vuông góc với AB ; IK vuông góc với AD ($H \in AB$; $K \in AD$).

a) Chứng minh tứ giác $AHIK$ nội tiếp đường tròn.

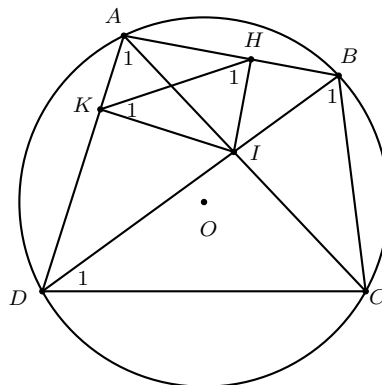
b) Chứng minh rằng $IA \cdot IC = IB \cdot ID$.

c) Chứng minh rằng tam giác HIK và tam giác BCD đồng dạng.

d) Gọi S là diện tích tam giác ABD , S' là diện tích tam giác HIK . Chứng minh rằng:

$$\frac{S'}{S} \leq \frac{HK^2}{4 \cdot AI^2}$$

Lời giải.



a) Tứ giác $AHIK$ có
$$\begin{cases} \widehat{AHI} = 90^\circ & (IH \perp AB) \\ \widehat{AKI} = 90^\circ & (IK \perp AD) \end{cases} \Rightarrow \widehat{AHI} + \widehat{AKI} = 180^\circ.$$

Từ đó suy ra tứ giác $AHIK$ nội tiếp.

b) Xét các tam giác IAD và IBC ta có:

$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DC của đường tròn tâm O).

$\widehat{AID} = \widehat{BIC}$ (2 góc đối đỉnh).

Từ đó suy ra $\triangle IAD \sim \triangle IBC$, do đó $\frac{IA}{IB} = \frac{ID}{IC} \Rightarrow IA \cdot IC = IB \cdot ID$

c) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHIK$ có $\widehat{A_1} = \widehat{H_1}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IK).

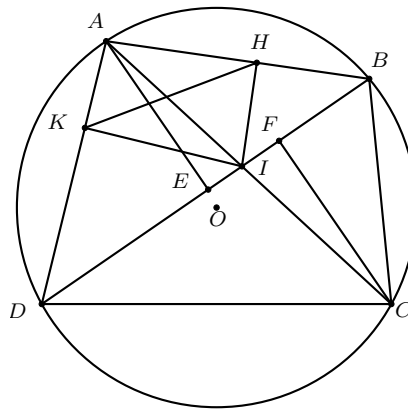
Mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{B_1}$

Tương tự ta có $\widehat{K_1} = \widehat{D_1}$

$\triangle HIK$ và $\triangle BCD$ có $\widehat{H_1} = \widehat{B_1}, \widehat{K_1} = \widehat{D_1}$ nên $\triangle HIK \sim \triangle BCD$.

d) Gọi S_1 là diện tích của tam giác BCD . Vì $\triangle HIK \sim \triangle BCD$ nên:

$$\frac{S'}{S_1} = \frac{HK^2}{BD^2} = \frac{HK^2}{(IB + ID)^2} \leq \frac{HK^2}{4IB \cdot ID} = \frac{HK^2}{4IA \cdot IC} \quad (1)$$



Vẽ $AE \perp BD, CF \perp BD \Rightarrow AE \parallel CF \Rightarrow \frac{CF}{AE} = \frac{IC}{IA}$

$\triangle ABD$ và $\triangle BCD$ có chung cạnh đáy BD nên:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{CF}{AE} \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{IC}{IA} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{S'}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S} \leq \frac{HK^2}{4IA \cdot IC} \cdot \frac{IC}{IA} \Leftrightarrow \frac{S'}{S} \leq \frac{HK^2}{4 \cdot AI^2}$$

□

Câu 5. Giải phương trình: $(x^3 - 4)^3 = \left(\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2} + 4 \right)^2$.

Lời giải.

$$(x^3 - 4)^3 = \left(\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2} + 4 \right)^2 \quad (1)$$

Điều kiện $x \geq \sqrt[3]{4}$

$$\text{Đặt } x^3 - 4 = u^2; \sqrt[3]{x^3 + 4} = v \Rightarrow \begin{cases} v > 1 \\ v^3 - 4 = u^2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow (u^2)^3 = (v^2 + 4)^2 \Leftrightarrow u^3 - 4 = v^2$$

Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3 - 4 = u^2 \\ v^3 - 4 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - v^3 = u^2 - x^2 & (2) \\ u^3 - x^3 = v^2 - u^2 & (3) \end{cases}$$

Ta chứng minh được $x = u = v$. Thật vậy, do $u, v, x > 1$ nên nếu giả sử $x \geq v$ thì từ (2) suy ra $u \geq x$, kết hợp với (3) suy ra $v \geq u$, do đó ta có: $x \geq v \geq u \geq x \Rightarrow x = u = v$. Nếu $x < v$ thì

tương tự ta có $x < v < u < x$ (vô lý)

Với $x = u$, ta có $x^3 - 4 = x^2 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

———— HẾT ————

71 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO PHÚ YÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức.

$$A = \sqrt{36} + \sqrt{27} - \sqrt{12}; \quad B = \frac{4}{\sqrt{5} - 1}.$$

b) Giải phương trình $x^2 + 7x + 10 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $A = \sqrt{36} + \sqrt{27} - \sqrt{12} = 6 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 6 + \sqrt{3}$.

$$B = \frac{4}{\sqrt{5} - 1} = \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{4} = \sqrt{5} + 1.$$

b) Ta có $\Delta = 7^2 - 4.10.1 = 9 > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-7 + 3}{2} = -2; \quad x_2 = \frac{-7 - 3}{2} = -5$$

□

Câu 2. Cho hai hàm số $y = 3x$ và $y = -x + 4$.

a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng tọa độ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng trên. Tìm tọa độ điểm M bằng phương pháp đại số.

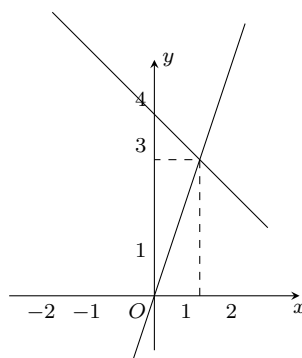
Lời giải.

a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Bảng giá trị

x	0	1
$y = 3x$	0	3
$y = -x + 4$	4	3

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là: $3x = -x + 4 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $x = 1$ suy ra $y = 3$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là $M(1; 3)$.

□

Câu 3. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ca nô xuôi dòng một khúc sông dài 40 km, rồi ngược dòng khúc sông ấy hết 4 giờ 30 phút. Tính vận tốc thực của ca nô biết vận tốc của dòng nước là 2 km/giờ.

Lời giải.

Gọi vận tốc thực của ca nô là x km/giờ ($x > 2$).

Thời gian ca nô đi ngược dòng là $\frac{40}{x+2}$ (giờ).

Thời gian ca nô đi xuôi dòng là $\frac{40}{x-2}$ (giờ).

Đổi 4 giờ 30 phút = 4,5 giờ.

Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{40}{x+2} + \frac{40}{x-2} = 4,5 \Leftrightarrow 80x = 4,5x^2 - 18 \Leftrightarrow 4,5x^2 - 80x - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ x = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

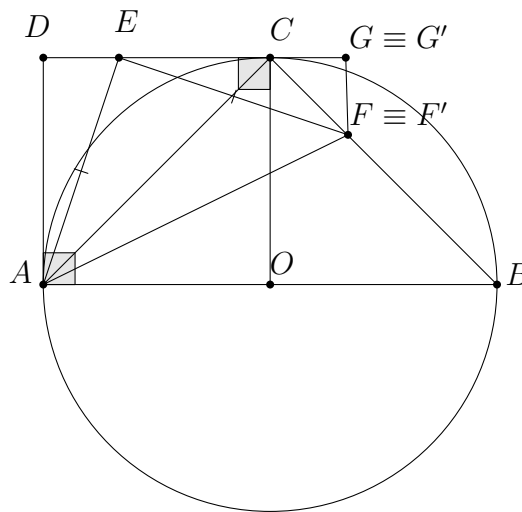
So với yêu cầu bài toán thì ta có $x = 18$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy vận tốc thực của ca nô là 18 km/giờ.

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$, C là điểm chính giữa cung AB . Hai tiếp tuyến của đường tròn tại A và C cắt nhau tại D .

- Chứng minh tứ giác $A OCD$ là hình vuông.
- Tính diện tích phần nằm ngoài hình thang $ABCD$ của hình tròn (O) theo R .
- Trên đoạn DC lấy điểm E sao cho $DE = \frac{1}{3}DC$. Trên đoạn BC lấy điểm F sao cho $EF = EA$. Kẻ FG vuông góc với DC ($G \in DC$). Tính độ dài đoạn thẳng CG theo R .
- Chứng minh tứ giác $AECF$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

- Theo đề bài ta có: $\widehat{DAO} = \widehat{OCD} = \widehat{COA} = 90^\circ$ nên tứ giác $A OCD$ là hình chữ nhật. Mặt khác $OC = OA = R$ nên tứ giác $OADC$ là hình vuông.

b) Ta có diện tích hình tròn là $S_1 = \pi.R^2$.

Diện tích tam giác COB vuông tại O là: $S_2 = \frac{1}{2}R^2$.

Vậy diện tích phần ngoài hình thang $ABCD$ là:

$$S = \frac{3}{4}\pi.R^2 - S_2 = \frac{3}{4}\pi.R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\right).R^2.$$

c) Gọi điểm F' thuộc cạnh CB sao cho $CF' = \frac{1}{3}CB$ và G' là hình chiếu của F' lên CD .

$$\text{Ta có } AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{9}} = \frac{R\sqrt{10}}{3}.$$

Ta có $\triangle CG'F'$ vuông cân tại G' (do $\widehat{G'CF'} = \widehat{F'BO} = 45^\circ$), suy ra $G'F' = CG' = \frac{CF'}{\sqrt{2}} =$

$$\frac{R\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{R}{3}. \text{ Khi đó, } EG' = EC + CG' = \frac{2R}{3} + \frac{R}{3} = R.$$

$$\text{Độ dài } EF' = \sqrt{EG'^2 + G'F'^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{9}} = \frac{R\sqrt{10}}{3}.$$

Do đó $EF' = EA$ hay điểm $F' \equiv F$. Từ đó $G' \equiv G$ và $CG = \frac{R}{3}$.

$$\text{d) Ta có } AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{(R\sqrt{2})^2 + \left(\frac{R\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}R}{3}$$

Tam giác EAF cân tại E có $AF^2 = AE^2 + EF^2$ nên là tam giác vuông cân. Tức là $\widehat{AEF} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AECF$ có $\widehat{ACF} = \widehat{AEF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên là tứ giác nội tiếp.

□

Câu 5. Biết rằng các số x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = x^2 + y^2 + xy$.

Lời giải.

Ta có $x + y = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2xy$ và $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4}$. Biểu thức

$C = x^2 + y^2 + xy = 1 - 2xy + xy = 1 - xy \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{3}{4}$, xảy ra

khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

□

————— HẾT —————

72 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC QUẢNG NGÃI

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1) Thực hiện phép tính: $\sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2} - \sqrt{5}$.

2) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = -x + 2$ có đồ thị là (d) .

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm A và B của (P) và (d) . (Hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B). Gọi C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành, tính diện tích của tứ giác $ABDC$.

Lời giải.

1) Ta có $\sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 2$.

2)

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

* Xét $y = x^2$

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Nhận xét: Đồ thị hàm số là một đường parabol đi qua gốc tọa độ, nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị nằm phía trên trục hoành.

* Đồ thị hàm $y = -x + 2$.

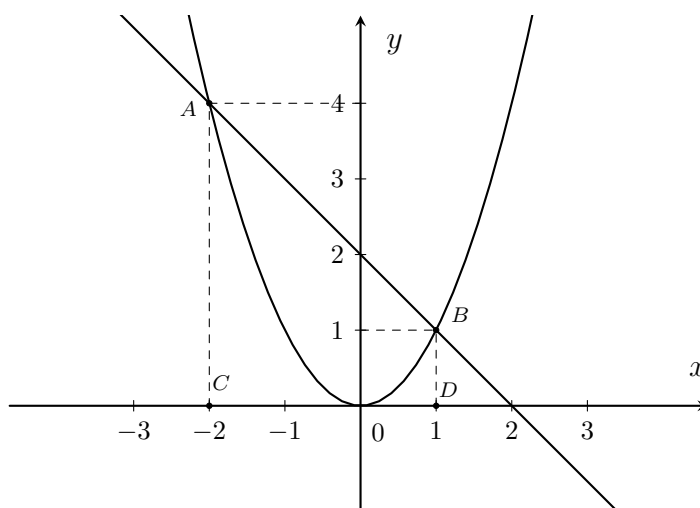
Đồ thị hàm số $y = -x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(2; 0)$.

b) Hoành độ giao điểm: $x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Vì hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B nên $\begin{cases} x_A = -2 \Rightarrow y_A = 4 \\ x_B = 1 \Rightarrow y_B = 1 \end{cases}$

Tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông có $AC = 4$, $CD = 3$, $BD = 1$

$$\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{(AC + BD) \cdot CD}{2} = 7,5.$$





Câu 2.

1) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^4 + 2017x^2 - 2018 = 0$;

b)
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$$

2) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = -1$. Tính nghiệm còn lại.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Lời giải.

1) a) Xét phương trình $x^4 + 2017x^2 - 2018 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình trở thành: $t^2 + 2017t + 2018 = 0$ (2)

Phương trình (2) có $a + b + c = 0$ nên $t_1 = 1$ nhận, $t_2 = -2018$ loại

Với $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

b) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

2) Xét phương trình $x^2 - 2x + m + 3 = 0$

a) Khi phương trình có nghiệm $x = -1$ thì $(-1)^2 - 2(-1) + m + 3 = 0 \Rightarrow m = -6$

Mà $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow$ nghiệm còn lại là $x = 3$.

b) Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - 1(m + 3) = -m - 2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0$ hay $m < -2$.

Khi đó, theo Vi-et: $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 \cdot x_2 = m + 3$

Xét $x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = 8$

$\Rightarrow 2^3 - 3 \cdot 2(m + 3) = 8 \Rightarrow m = -3 < -2$ (thỏa)

Vậy $m = -3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.



Câu 3. Một phòng họp có 250 chỗ ngồi được chia thành từng dãy, mỗi dãy có số chỗ ngồi như nhau. Vì có đến 308 người dự họp nên ban tổ chức phải kê thêm 3 dãy ghế, mỗi dãy ghế phải kê thêm 1 chỗ ngồi nữa thì vừa đủ. Hỏi lúc đầu ở phòng họp có bao nhiêu dãy ghế và mỗi dãy ghế có bao nhiêu chỗ ngồi?

Lời giải.

Gọi x là số dãy ghế lúc đầu ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc đầu là $\frac{250}{x}$ (chỗ)

Số dãy ghế lúc sau (thực tế) là $x + 3$ (dãy)

Số chỗ ngồi lúc sau (thực tế) là $\frac{308}{x + 3}$ (chỗ)

Vì số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc sau hơn số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc đầu là 1 chỗ nên ta có phương trình:

$$\frac{308}{x + 3} - \frac{250}{x} = 1$$

$$\Rightarrow 308x - 250x - 750 = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$$

$$\Delta = (-55)^2 - 4.1.750 = 25 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 30 \text{ (loại, vì } 30 \notin \mathcal{U}(250)) \text{ hoặc } x_2 = 25 \text{ (nhận, vì } 25 \in \mathcal{U}(250)).$$

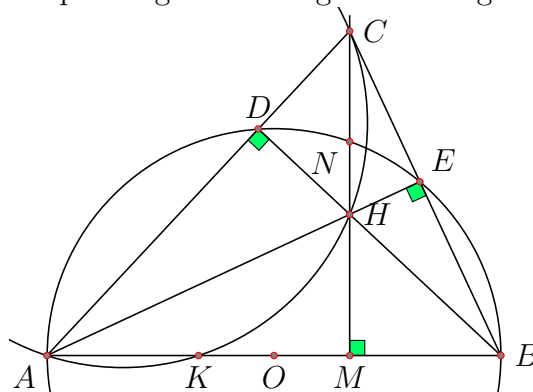
Vậy lúc đầu có 25 dãy ghế và mỗi dãy ghế có 10 chỗ ngồi. $\square$

Câu 4. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Một điểm M cố định thuộc đoạn thẳng OB (M khác B và M khác O). Đường thẳng d vuông góc với AB tại M cắt nửa đường tròn đã cho tại N . Trên cung NB lấy điểm E bất kì (E khác B và E khác N). Tia BE cắt đường thẳng d tại C , đường thẳng AC cắt nửa đường tròn tại D . Gọi H là giao điểm của AE và đường thẳng d .

- Chứng minh tứ giác $BMHE$ nội tiếp được đường tròn.
- Chứng minh 3 điểm B, H, D thẳng hàng.
- Tính giá trị của biểu thức $BN^2 + AD.AC$ theo R .
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt AB tại K . Chứng minh rằng khi E di động trên cung NB thì độ dài đoạn thẳng BK không đổi.

Lời giải.

- Vì $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) nên $\widehat{AEB} + \widehat{BMH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ suy ra tứ giác $BMHE$ nội tiếp đường tròn đường kính BH .



- Vì CM và AE là hai đường cao của tam giác ABC nên H là trực tâm của tam giác ABC , suy ra BH là đường cao thứ ba của tam giác ABC , hay $BH \perp AC$ (1)

Mà $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow BD \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH = BD$ hay B, H, D thẳng hàng.

- Ta có $\widehat{AMC} = \widehat{ADB} = 90^\circ$; $\widehat{MAC} = \widehat{DAB}$ (góc chung)

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle ADB \text{ (g.g)} \Rightarrow AD.AC = AM.AB = 2R.AM \text{ (3)}$$

Mặt khác $\triangle ABN$ vuông tại N , có NM là đường cao nên $BN^2 = BM.BA = 2R.BM$ (4)

Cộng (3) và (4) theo vế, ta có: $BN^2 + AD.AC = 2R.AM + 2R.BM = 2R.(AM + BM)$

$$\text{Hay } BN^2 + AD.AC = 2R.AB = 2R.2R = 4R^2.$$

- Vì tứ giác $AKHC$ nội tiếp nên $\widehat{MKH} = \widehat{MCA}$ (cùng bù với $\widehat{AKH}$)

Mà $\widehat{MBH} = \widehat{MCA}$ (cùng phụ với $\widehat{BCA}$)

$$\Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MBH} \Rightarrow \triangle BKH \text{ cân tại } H, \text{ lại có } HM \perp BK \Rightarrow MK = MB \text{ (không đổi)}$$

$$\Rightarrow BK = 2.MB \text{ không đổi.}$$

Vậy khi E di động trên cung NB thì độ dài đoạn $BK = 2.MB$ không đổi. $\square$

Câu 5. Cho a là số thực dương lớn hơn 1 và $x = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}}$. Tính giá trị biểu thức $P = x^3 - 2x^2 - 2(a + 1)x + 4a + 2021$.

Lời giải.

Vì $a > 1$ nên $a^2 > 1 \Rightarrow x = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}}$ có nghĩa và $x > 0$.

Ta có:

$$x^2 = \left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}} \right)^2 = a + \sqrt{a^2 - 1} + 2\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}} + a - \sqrt{a^2 - 1}$$

Hay $x^2 = 2(a + 1) \Rightarrow -x^3 = -2(a + 1)x$ (nhân hai vế với $-x$)

thế vào biểu thức $P = x^3 - 2x^2 - 2(a + 1)x + 4a + 2021$, ta có:

$$P = x^3 - 2[2(a + 1)] - x^3 + 4a + 2021 = -4a - 4 + 4a + 2021 = 2017$$

Vậy $P = 2017$ khi $x = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}}$. □

————— **HẾT** —————

73 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC QUẢNG NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $A = 10 - \sqrt{9}$; $B = \sqrt{4x} + \sqrt{x} - \sqrt{9x}$ với $x \geq 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$.
- c) Tìm các giá trị của a để đồ thị hàm số $y = ax + 6$ đi qua điểm $M(1; 2)$.

Lời giải.

- a) $A = 10 - \sqrt{9} = 10 - 3 = 7$;
 $B = \sqrt{4x} + \sqrt{x} - \sqrt{9x} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 0$. (với $x \geq 0$)
- b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.
 Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.
- c) Đồ thị hàm số $y = ax + 6$ đi qua $A(1; 2)$ khi và chỉ khi $a + 6 = 2 \Leftrightarrow a = -4$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 1 = 0$ (m là tham số).

- a) Giải phương trình với $m = 5$.
- b) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 1$$

Lời giải.

- a) Với $m = 5$ phương trình trở thành $x^2 - 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 8 \end{cases}$.
- b) Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow [-(2m + 1)]^2 - 4(m^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}$.

Với $m \geq -\frac{5}{4}$ phương trình có hai nghiệm. Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$x_1^2 - (2m + 1)x_1 + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = (2m + 1)x_1 - m^2 + 1.$$

Thay vào hệ thức $x_1^2 - (2m + 1)x_1 + m^2 - 1 = 0$ ta có:

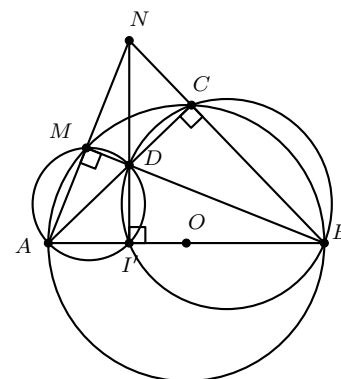
$$\begin{aligned} (x_1^2 - (2m + 1)x_1 + m^2)(x_2 + 1) &= 1 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1 \\ \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 &= 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 + 2m + 1 + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{không thỏa mãn}) \\ m = -2 & (\text{thỏa mãn}) \end{cases} \end{aligned}$$

□

Câu 3. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 300m^2 . Nếu giảm chiều dài đi 2m và tăng chiều rộng thêm 3m thì mảnh vườn trở thành hình vuông. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$



$$\begin{cases} \frac{3a^2}{b^2} + \frac{1}{b^3} = 1 \\ \frac{3b^2}{a^2} + \frac{2}{a^3} = 1 \end{cases}.$$

Ta có:
$$\begin{cases} \frac{3a^2}{b^2} + \frac{1}{b^3} = 1 \\ \frac{3b^2}{a^2} + \frac{2}{a^3} = 1 \end{cases} \quad (\text{với } a.b \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^2b + 1 = b^3 \\ 3ab^2 + 2 = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 - 3a^2b = 1 \\ a^3 - 3ab^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b^3 - 3a^2b)^2 = 1 \\ (a^3 - 3ab^2)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 + a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 5.$$

$$\Leftrightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 5.$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt[3]{5}.$$

□

———— HẾT ————

74 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC THÁI BÌNH

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

- a) Tìm m để hàm số $y = (3m - 2)x + 2017$ đồng biến trên tập $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + y) + (x + 2y) = -2 \\ 3(x + y) + (x - 2y) = 1 \end{cases}.$$

Lời giải.

- a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $3m - 2 > 0$ tương đương với $m > \frac{2}{3}$.

Vậy $m > \frac{2}{3}$.

- b) Ta có hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

□

Câu 2. Cho biểu thức $P = \frac{3x + 5\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$ (Với $x \geq 0; x \neq 1$).

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm x sao cho $P = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x + 5\sqrt{x} - 4 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 3)^2}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{3x + 5\sqrt{x} - 4 - (x - 1) - (x + 6\sqrt{x} + 9)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

- b) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x} - 4) = -(\sqrt{x} - 1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

Đổi chiếu điều kiện $x = 9$ thỏa mãn. Vậy $x = 9$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 1 = 0$ (1).

- a) Giải phương trình với $m = -1$.
- b) Chứng minh rằng với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Giả sử hai nghiệm là $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$), khi đó tìm m để $|x_2| - |x_1| = 2$.

Lời giải.

a) Thay $m = -1$, ta có phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1, x = -3$.

b) Ta thấy $a.c = -m^2 + m - 1 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall m$.

Vậy với mọi m phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu $x_1 < 0 < x_2$ ($x_1 < x_2$).

Từ đó suy ra $|x_2| - |x_1| = x_2 + x_1 = 2$.

Theo định lí Vi-et: $x_1 + x_2 = m - 1$ nên $m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$.

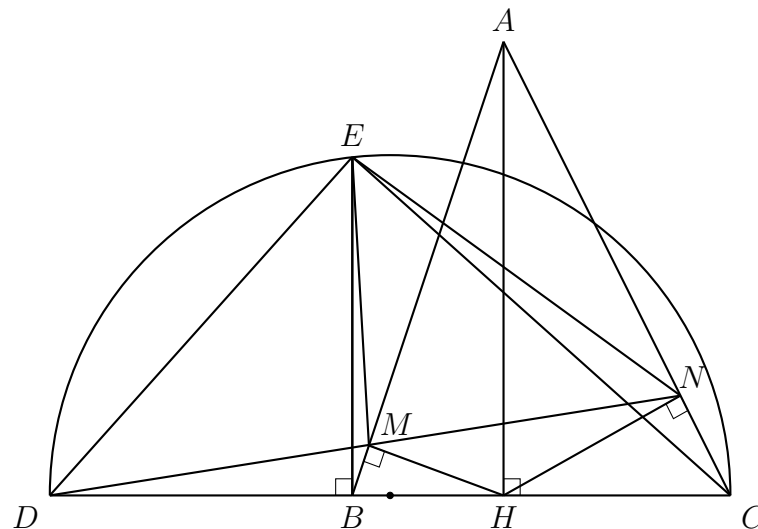
Vậy $m = 3$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), dựng AH vuông góc với BC tại điểm H . Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm H trên AB và AC . Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm D . Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính CD . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt nửa đường tròn trên tại điểm E .

- Chứng minh rằng tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $\widehat{EBM} = \widehat{DNH}$.
- Chứng minh rằng $DM.DN = DB.DC$.
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE . Chứng minh rằng $OE \perp DE$.

Lời giải.



- Xét tứ giác $AMHN$ có
 $\widehat{AMH} = 90^\circ$ (gt)
 $\widehat{ANH} = 90^\circ$ (gt)
suy ra $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 180^\circ$.
Mà hai góc ở vị trí đối nhau nên $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.
- Ta có $\begin{cases} EB \perp DC \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow EB \parallel AH$, suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{BAH}$ (1) (so le trong).
Tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên ta có $\widehat{MAH} = \widehat{MNH}$ (2) (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EBM} = \widehat{DNH}$.

c) Ta có

$$\left. \begin{aligned} \widehat{DMB} &= \widehat{AMN} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{AMN} &= \widehat{AHN} \text{ (do tứ giác } AMHN \text{ nội tiếp)} \\ \widehat{AHN} &= \widehat{NCH} \text{ (do cùng phụ với góc } \widehat{NHC}) \end{aligned} \right\} \text{ suy ra } \widehat{DMB} = \widehat{NCH}.$$

Xét tam giác DMB và DCN có $\widehat{DMB} = \widehat{NCD}$ và chung góc $\widehat{NDC}$, suy ra $\triangle DMB$ đồng dạng với $\triangle DCN$ theo trường hợp góc-góc. Từ đó suy ra $\frac{DM}{DC} = \frac{DB}{DN} \Rightarrow DM \cdot DN = DB \cdot DC$.

d) Ta có $\triangle DEC$ vuông tại E , EB là đường cao nên $DE^2 = DB \cdot DC$ mặt khác $DM \cdot DN = DB \cdot DC$ suy ra $DE^2 = DM \cdot DN \Rightarrow \frac{DM}{DE} = \frac{DE}{DN}$.

Từ đó suy ra $\triangle DEM$ đồng dạng với $\triangle DNE$ do $\frac{DM}{DE} = \frac{DE}{DN}$ và chung góc $\widehat{NDE}$.

Suy ra $\widehat{DEM} = \widehat{ENM}$ suy ra DE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE tại E hay $DE \perp OE$.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC , M là điểm bất kì nằm trong tam giác. Kéo dài AM cắt BC tại P , BM cắt AC tại Q , CM cắt AB tại K . Chứng minh rằng

$$MA \cdot MB \cdot MC \geq 8MP \cdot MQ \cdot MK.$$

Lời giải.

Đặt $a = S_{\triangle MBC}$; $b = S_{\triangle MAC}$; $c = S_{\triangle MAB}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{MA}{MP} &= \frac{b+c}{a} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \\ \frac{MB}{MQ} &= \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{c} \\ \frac{MC}{MK} &= \frac{a+c}{b} \geq \frac{2\sqrt{ac}}{b}. \end{aligned}$$

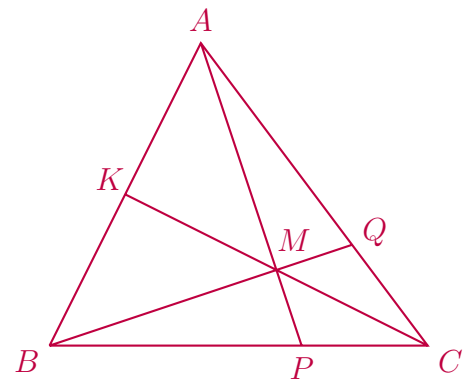
Suy ra

$$\frac{MA}{MP} \cdot \frac{MB}{MQ} \cdot \frac{MC}{MK} \geq 8 \Rightarrow MA \cdot MB \cdot MC \geq 8MP \cdot MQ \cdot MK.$$

Dấu "=" xảy ra khi M là trọng tâm của tam giác ABC .

□

————— **HẾT** —————



75 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC THÁI NGUYÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Không dùng máy tính cầm tay, hãy giải phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\Delta' = 9$ suy ra $\sqrt{\Delta'} = 3$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -4$.

Chú ý: Học sinh có thể nhầm nghiệm nhờ định lí Vi-ét với lưu ý $a.c = -8 < 0$ nên pt luôn có hai nghiệm phân biệt. $\square$

Câu 2. Cho hàm số bậc nhất $y = (2m - 3)x + 5m - 1$, với $m \neq \frac{3}{2}$ là tham số thực.

- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ -6 .

Lời giải.

- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -6 khi và chỉ khi $5m - 1 = -6 \Leftrightarrow m = -1$. $\square$

Câu 3. Không dùng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})(\sqrt{2} + 10\sqrt{0,2})$.

Lời giải.

Ta có: $A = (2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{20}) = (2\sqrt{5} - \sqrt{2})(2\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 18$ $\square$

Câu 4. Cho biểu thức $B = \left(\frac{x}{\sqrt{x} + 3} - \frac{x+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{6x+\sqrt{x}}{x-9} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - 1 \right)$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

Hãy rút gọn biểu thức B và tính giá trị của B khi $x = 12 + 6\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x}{\sqrt{x} + 3} - \frac{x+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{6x+\sqrt{x}}{x-9} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - 1 \right) \\ &= \frac{x(\sqrt{x}-3) + (x+1)(\sqrt{x}+3) + 6x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{\sqrt{x}-3-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{-6} = \frac{1}{2(\sqrt{x}-3)} \end{aligned}$$

Khi $x = 12 + 6\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})^2$ ta có $B = \frac{1}{2(3 + \sqrt{3} - 3)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. $\square$

Câu 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = n \\ nx + my = 1 \end{cases}$ (m, n là tham số).

- Không dùng máy tính cầm tay hãy giải hệ phương trình khi $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m và n để hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (-1; \sqrt{3})$.

Lời giải.

a. Khi $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} -3x - 6y = 2 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6y = 2 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{-22}{21} \end{cases}$

b. Vì hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-1; \sqrt{3})$ nên ta có:

$$\begin{cases} -m - \sqrt{3} = n \\ -n + \sqrt{3}m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}m - n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} + 1)m = 1 - \sqrt{3} \\ n = -m - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{3} - 2 \\ n = 2 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

□

Câu 6. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $2x^2 + 3x - 1 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức $P = 2\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)$.

Lời giải.

Vì $a.c = -2 < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ Ta có: } P = 2 \cdot \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{2\left(\frac{9}{4} + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = -13.$$

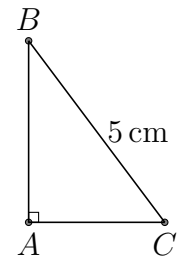
□

Câu 7. Một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền 5 cm, diện tích là 6 cm^2 . Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Lời giải.

Gọi độ dài hai cạnh góc vuông là a, b ($a, b > 0$). Theo định lí Py-ta-go và giả thiết ta có

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 - 2ab = 25 \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

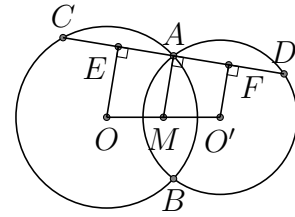


□

Câu 8. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Gọi M là trung điểm của OO' , qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D . Chứng minh rằng $AC = AD$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC và AD . Ta có:
 $OE \perp AC, O'F \perp AD$ do đó $OEFO'$ là hình thang vuông
 $(OE \parallel O'F)$. Vì M là trung điểm của OO' mà $AM \parallel$
 $OE \parallel O'F$ nên A là trung điểm của EF . Từ đó suy ra,
 $AC = 2AE = 2AF = AD$



□

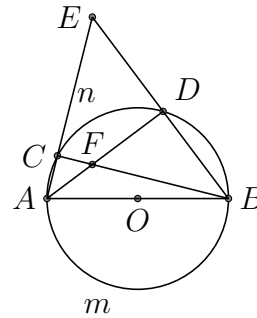
Câu 9. Trên đường tròn (O) đường kính AB , lấy hai điểm C, D sao cho hai điểm này nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB và điểm D thuộc cung nhỏ BC . Gọi E là giao điểm của AC và BD , F là giao điểm của AD và BC .

- Tính số đo góc AFB khi biết số đo của cung nhỏ CD bằng 80° .
- Tính số đo của $\widehat{CD}$ khi số đo góc AEB bằng 55° .

Lời giải.

Vì AB là đường kính nên $sđ \widehat{AmB} = 180^\circ$.

- Ta có: $\widehat{AFB} = \frac{1}{2} (sđ \widehat{AmB} + sđ \widehat{CnD}) = 130^\circ$
- Ta có: $\widehat{AEB} = \frac{1}{2} (sđ \widehat{AmB} - sđ \widehat{CnD})$. Do đó
 $sđ \widehat{CnD} = 70^\circ$.

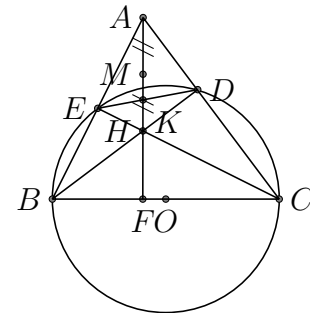


□

Câu 10. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt cạnh AC, AB lần lượt tại D và E . Gọi H là giao điểm của BD và CE , K là giao điểm của DE và AH , F là giao điểm của AH và BC , M là trung điểm của AH . Chứng minh rằng $MD^2 = MK.MF$.

Lời giải.

Gọi N là giao điểm của MO và ED . Tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính AH mà $MH = MA$ nên $ME = MD$. Từ đó $\triangle MEO = \triangle MDO (c - c - c)$ suy ra $\widehat{MEO} = \widehat{MDO}$. Lại có $\widehat{EOD} + \widehat{EMD} = 2(\widehat{EBD} + \widehat{EAD}) = 180^\circ$ nên $\widehat{MDO} = 90^\circ$. Vậy $MD^2 = MN.MO = MK.MF$



□

———— HẾT ————

76 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC THANH HÓA

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Cho phương trình $nx^2 + x - 2 = 0$ (1), với n là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $n = 0$.

b) Giải phương trình (1) khi $n = 1$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Lời giải.

a) a) Với $n = 0$, ta có: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy với $n = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 2$

b) Với $n = 1$, phương trình trở thành: $x^2 + x - 2 = 0$. Phương trình bậc hai ẩn x có dạng $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = -2$.

b)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 16 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (4; 3)$. □

Câu 2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{4\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}} + \frac{8y}{4 - y} \right) : \left(\frac{\sqrt{y} - 1}{y - 2\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{y}} \right)$, với $y \geq 0; y \neq 4; y \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm y để $A = -2$.

Lời giải.

a) Ta có:
$$A = \frac{4\sqrt{y}(2 - \sqrt{y}) + 8y}{(2 + \sqrt{y})(2 - \sqrt{y})} : \frac{\sqrt{y} - 1 - 2(\sqrt{y} - 2)}{\sqrt{y}(\sqrt{y} - 2)} = \frac{8\sqrt{y} - 4y + 8y}{(2 + \sqrt{y})(2 - \sqrt{y})} : \frac{\sqrt{y} - 1 - 2\sqrt{y} + 4}{\sqrt{y}(\sqrt{y} - 2)} =$$
$$\frac{4\sqrt{y}(2 + \sqrt{y})}{(2 + \sqrt{y})(2 - \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y} - 2)}{3 - \sqrt{y}} = \frac{-4y}{3 - \sqrt{y}}$$

b) Với $A = -2$, ta có: $\frac{-4y}{3 - \sqrt{y}} = -2 \Leftrightarrow 4y = 6 - 2\sqrt{y} \Leftrightarrow 4y + 2\sqrt{y} - 6 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{y} (t \geq 0)$, phương trình trở thành: $4t^2 + 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-3}{2} < 0 \end{cases}$

Với $t = 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy khi $y = 1$ thì $A = -2$. □

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d) : y = 2x - n + 3$ và parabol $(P) : y = x^2$.

a) Tìm n để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 0)$.

b) Tìm n để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = 16$.

Lời giải.

a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 0)$ nên: $4 - n + 3 = 0 \Rightarrow n = 7$.

Vậy khi $n = 7$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 0)$.

- b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = 2x - n + 3$

hay $x^2 - 2x + n - 3 = 0$. Để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình trên phải có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 4 - n > 0 \Rightarrow n < 4$.

Theo hệ thức Viet, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(1) \\ x_1 \cdot x_2 = n - 3(2) \end{cases}$$

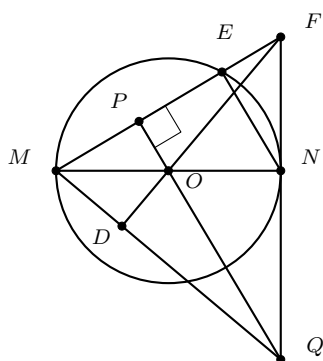
Theo giả thiết: $x_1^2 - 2x_2 + x_1x_2 = 16$ (3) Từ (1) và (3), ta có:
$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$
 Thay vào (2), ta

có: $n = -12 < 4$. Vậy $n = -12$.

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $MN = 2R$. Gọi (d) là tiếp tuyến với (O) tại N . Trên cung MN lấy điểm E tùy ý (E không trùng với M và N), tia ME cắt (d) tại F . Gọi P là trung điểm của ME , tia PO cắt (d) tại Q .

- Chứng minh $ONFP$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $OF \perp MQ$ và $PM \cdot PF = PO \cdot PQ$.
- Xác định vị trí của điểm E trên cung MN để tổng $MF + 2ME$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải.

- Vì P là trung điểm ME nên $OP \perp ME$ hay $QP \perp MF \Rightarrow \widehat{FOP} = 90^\circ$.
Mặt khác: (d) là tiếp tuyến với (O) tại $N \Rightarrow \widehat{FNO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FPO} + \widehat{FNO} = 90^\circ$. Vậy tứ giác $ONFP$ nội tiếp.
- Xét $\triangle MFQ$, ta có: $QP \perp MF \Rightarrow QP$ là đường cao.
 $MN \perp FQ \Rightarrow MN$ là đường cao của $\triangle MFQ$. Do đó, O là trực tâm của tam giác $\triangle MFQ \Rightarrow OF \perp MQ$.
Xét hai tam giác vuông $\triangle MPO$ và $\triangle QPF$, ta có: $\widehat{MPO} = \widehat{QPF} = 90^\circ$; $\widehat{PMO} = \widehat{PQF} \Rightarrow$ hai tam giác vuông $\triangle MPO$ và $\triangle QPF$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{PO}{PF} = \frac{MP}{PQ} \Rightarrow PO \cdot PQ = MP \cdot PF$.
- Xét hai tam giác vuông $\triangle MPO$ và $\triangle QNF$ có: $\widehat{MPO} = \widehat{QNF} = 90^\circ$; $\widehat{PMO} = \widehat{PQF}$ chung nên hai tam giác vuông $\triangle MPO$ và $\triangle QNF$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{MP}{MN} = \frac{MO}{MF} \Rightarrow MP \cdot MF = MO \cdot MN \Rightarrow 4MP \cdot MF = 4MO \cdot MN \Rightarrow (4MP) \cdot MF = 4 \cdot MO \cdot MN \Rightarrow 2ME \cdot MF = 4 \cdot MO \cdot MN = 2R \cdot 4R = 8R^2$.
Như vậy tích $2ME$ và MF không đổi là $8R^2$, mà $(MF + 2ME)^2 \geq 4MF \cdot 2ME = 4(MF \cdot 2ME) = 32R^2 \Rightarrow MF + 2ME \geq \sqrt{32R^2} = 4R\sqrt{2}$.
Dấu = xảy ra khi $2ME = MF$, khi đó E là trung điểm của MF và $NE \perp MF$ nên tam giác MNF vuông cân, suy ra E là điểm chính giữa cung MN .

□

Câu 5. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2a+3b+3c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{3a+3b+2c}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{1}{2a+3b+3c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{3a+3b+2c} \\ &= \frac{1}{(b+c) + (b+c) + (b+a) + (c+a)} + \frac{1}{(a+c) + (a+c) + (a+b) + (b+c)} \\ &\quad + \frac{1}{(a+b) + (a+b) + (a+c) + (b+c)} \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a} + \frac{1}{c+a} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \right) \\ &\quad + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{4}{b+a} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+a} \right) \frac{2017}{4}. \text{ Dấu " = " xảy ra khi } a = b = \\ c &= \frac{3}{4034}. \end{aligned}$$

□

———— HẾT ————

77 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC TIỀN GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$. b. $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

2. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}-1}$.

3. Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (có ẩn số x).

a. Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m .

b. Cho biểu thức $B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$. Tìm giá trị của m để $B = 1$.

Lời giải.

1.

a. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (3; 1)$.

b. $16x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$.

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

2. $A = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. Phương trình đã cho: $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (có ẩn số x).

a. $\Delta = (-m)^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$ với mọi m .

Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m .

b. Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$.

Ta có:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)} = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(1 + x_1x_2)}$$

$$= \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2(m-1) + 3}{m^2 + 2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}.$$

$$B = 1 \Leftrightarrow \frac{2m + 1}{m^2 + 2} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = 1$ thì $B = 1$.

□

Câu 2. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 1$.

1. Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

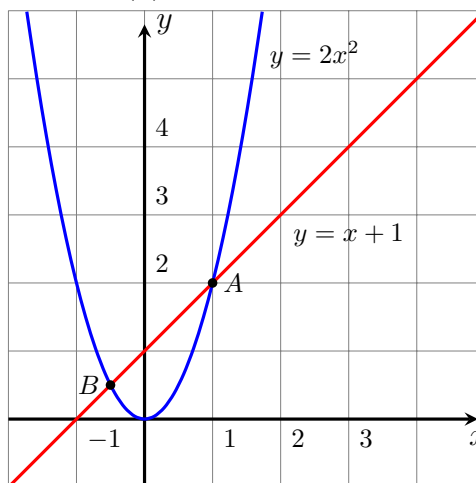
2. Bằng phép tính, xác định tọa độ giao điểm A và B của (P) và (d) . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải.

1. Ta có bảng sau một số giá trị của x và y tương ứng

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng hệ trục tọa độ



2. Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình: $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra tọa độ giao điểm cần tìm là: $A(1; 2)$ và $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

◦ Độ dài đoạn thẳng AB tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

□

Câu 3. Hai thành phố A và B cách nhau 150 km. Một xe máy khởi hành từ A đến B , cùng lúc đó một ô tô cũng khởi hành từ B đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h. Ô tô đến A được 30 phút thì xe máy cũng đến B . Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc xe máy ($x > 0$). Khi đó vận tốc ô tô là $x + 10$ (km/h).

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{150}{x} - \frac{150}{x+10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 10x - 3000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ x = -60 \end{cases}.$$

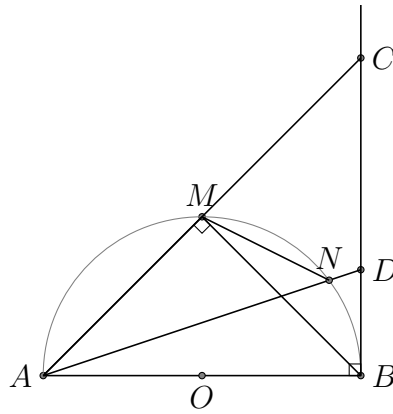
Vì $x > 0$ nên vận tốc xe máy là 50 (km/h), từ đó suy ra vận tốc ô tô là 60 (km/h).

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Gọi M là điểm chính giữa cung AB , N là điểm bất kỳ thuộc cung MB (N khác M và B). Tia AM và AN cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn tâm O lần lượt tại C và D .

1. Tính số đo $\widehat{ACB}$.
2. Chứng minh tứ giác $MNDC$ nội tiếp trong một đường tròn.
3. Chứng minh rằng $AM.AC = AN.AD = 4R^2$.

Lời giải.



1. Vì M là điểm chính giữa cung AB nên $MA = MB$, $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Suy ra tam giác AMB vuông cân tại M . Từ đó $\widehat{MAB} = 45^\circ$.

Tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{CAB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^\circ$.

2. Ta có: $\widehat{ANM} = 45^\circ$ (góc nội tiếp chắn $\frac{1}{4}$ đường tròn).

Lại có: $\widehat{MCD} = 45^\circ$.

Tứ giác $MNDC$ có $\widehat{MCD} = \widehat{ANM} = 45^\circ$ nên nội tiếp một đường tròn.

3. Ta có: $\begin{cases} \widehat{CAD} \text{ chung} \\ \widehat{MNA} = \widehat{MCD} \text{ (cùng bù với } \widehat{MND}) \end{cases}$.

Suy ra: $\triangle CAD \sim \triangle NAM$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AM \cdot AC = AN \cdot AD$.

Tam giác ABC vuông tại B có BM là đường cao nên: $AB^2 = AM \cdot AC = 4R^2$.

Vậy: $AM \cdot AC = AN \cdot AD = 4R^2$.

□

Câu 5. Cho hình nón có đường sinh bằng 26 cm, diện tích xung quanh là $260\pi \text{ cm}^2$. Tính bán kính đáy và thể tích của hình nón.

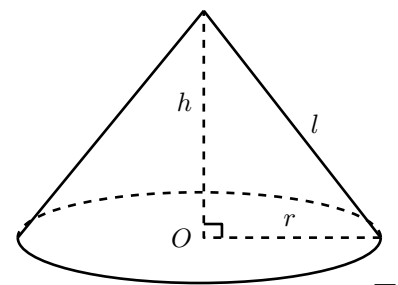
Lời giải.

Ta có:

$$S_{xq} = \pi r l \Leftrightarrow 260\pi = \pi r \cdot 26 \Rightarrow r = 10 \text{ (cm)}.$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ (cm)}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 10^2 \cdot 24 = 800\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



□

———— HẾT ————

78 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC TRÀ VINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x + y = 9. \end{cases}$

c) Giải phương trình: $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có: $A = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} + \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 6$.

Vậy $A = 6$.

b) Ta có: $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 16 \\ 5x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -1)$.

c) Ta có: $\Delta = (-3)^2 - 4.1.(-10) = 49$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{3+\sqrt{49}}{2} = 5$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{49}}{2} = -2$. □

Câu 2. Cho hai hàm số $y = x + 2$ và $y = x^2$ có đồ thị lần lượt là (d) và (P) .

a) Vẽ (d) và (P) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Bằng phép toán tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) .

Lời giải.

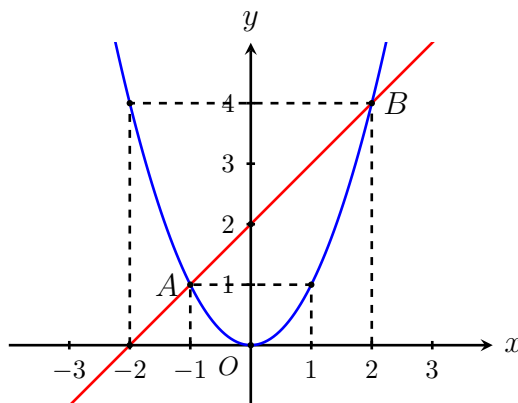
a) Bảng giá trị của hàm số $y = x + 2$ là:

x	-2	0
$y = x + 2$	0	2

Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$ là:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị:



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm là: $A(-1; 1)$ và $B(2; 4)$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 2)x - 6m = 0$ (1) (với m là tham số).

- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2$.

Lời giải.

- Ta có: $\Delta' = (m - 2)^2 - 1 \cdot (-6m) = m^2 + 2m + 4 = (m + 1)^2 + 3 > 0$, với mọi m .

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

- Theo định lí Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = 2(m - 2)$ và $x_1 x_2 = -6m$.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ &= 4(m - 2)^2 - 2 \cdot (-6m) \\ &= 4m^2 - 4m + 16 \\ &= (2m - 1)^2 + 15 \geq 15 \end{aligned}$$

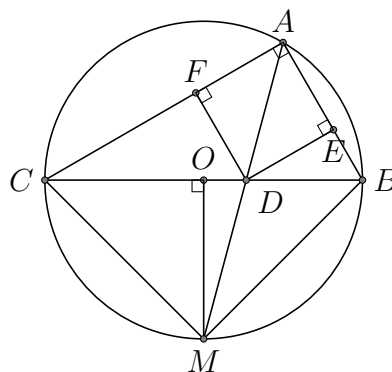
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 15, đạt được khi $m = \frac{1}{2}$.

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O bán kính R , đường kính BC . Gọi A là một điểm thuộc đường tròn (A khác B và C). Đường phân giác $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D và cắt đường tròn tại M .

- Chứng minh $MB = MC$ và OM vuông góc với BC .
- Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì?
- Cho $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác MDC theo R .

Lời giải.



- Vì AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$.
 $\Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{MC} \Rightarrow MB = MC$.

Tam giác MBC có $MB = MC$ (cmt) nên tam giác MBC cân tại M .

Mà MO là đường trung tuyến của tam giác MBC nên MO cũng là đường cao của tam giác

MBC .

$\Rightarrow MO \perp BC$.

b) Ta có: $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật (tứ giác có ba góc vuông).

Mà AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{MAC} = 45^\circ$.

$\Rightarrow$ Tam giác AED vuông cân tại $E \Rightarrow ED = ED$.

Vậy tứ giác $AEDF$ là hình vuông.

c) Tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ta có:

$$AB = BC \cdot \cos 60^\circ = R \text{ và } AC = BC \cdot \sin 60^\circ = R\sqrt{3}.$$

Tam giác ABC có AD là đường phân giác nên ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow \frac{DB}{1} = \frac{DC}{\sqrt{3}} = \frac{DB + DC}{1 + \sqrt{3}} = \frac{BC}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2R}{1 + \sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow DC = \frac{2R\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}.$$

Vậy diện tích tam giác MDC là: $S_{\Delta MDC} = \frac{1}{2}MO \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ (đvdt).

□

————— **HẾT** —————

79 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VĨNH LONG

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Tính giá trị biểu thức sau

a) $A = 3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{72}.$

b) $B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2}$

Lời giải.

a) $A = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 24\sqrt{2} = 24\sqrt{2}.$

b) $B = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} - \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} - 1 = -2$

□

Câu 2. Giải các phương trình và hệ phương trình sau

a) $5x^2 - 16x + 3 = 0$

b) $x^4 + 9x^2 - 10 = 0$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

Lời giải.

a) $5x^2 - 16x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(5x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = \frac{1}{5}.$

b) $x^4 + 9x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 10) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1.$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11y = -11 = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (4; 1).$

□

Câu 3.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P) : y = 2x^2$. Vẽ đồ thị parabol (P) .

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 + x_2 = 0$.

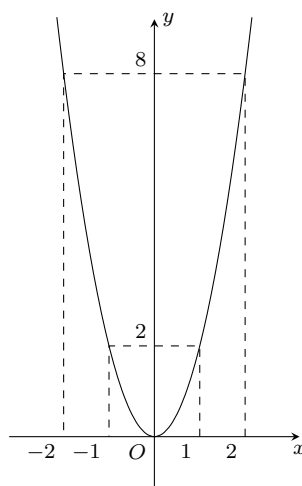
Lời giải.

a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị



- b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 2 > 0 \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ (luôn đúng)

Theo định lí Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m-1. \end{cases}$$

Mà $3x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -3x_1(3)$, giải hệ ta được $x_1 = -1, x_2 = 3$ và $m = -2$ hoặc $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2$ và $m = -\frac{1}{3}$.

□

Câu 4. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 6 giờ thì đầy bể. Nếu để riêng vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ, sau đó đóng lại và mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 3 giờ nữa thì được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy đầy bể trong bao lâu?

Lời giải.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x (giờ) và $x > 6$. Gọi thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là y (giờ) và $y > 6$.

Theo bài ra, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 10, y = 15$.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 30cm$, $AC = 40cm$. Tính độ dài đường cao AH và số đo góc B (làm tròn đến độ).

Lời giải.

T

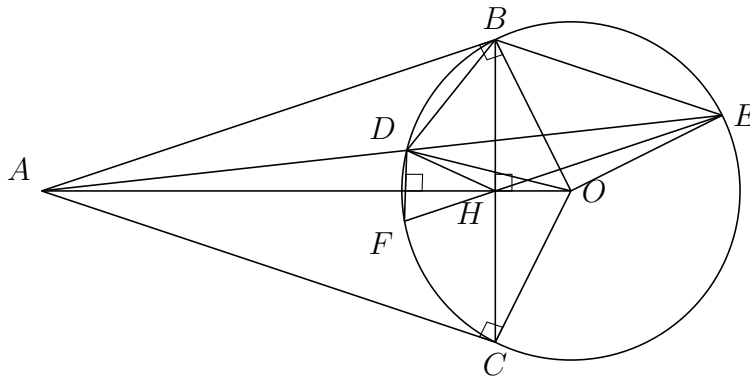
□

a có $BC^2 = AB^2 + AC^2$, suy ra $BC = 50cm$ và $AB \cdot AC = AH \cdot BC$, do đó $AH = 24cm$. Ta có $\cos \widehat{B} = 0.6$, suy ra $\widehat{B} = 7^\circ$.

Câu 6. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm).

- a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp được đường tròn.

- b) Vẽ cát tuyến ADE của (O) sao cho cát tuyến ADE nằm giữa hai tia AO, AB ; D, E thuộc đường tròn (O) và D nằm giữa A và E . Chứng minh $AB^2 = AD.AE$.
- c) Gọi F là điểm đối xứng của D qua AO , H là giao điểm của AO và BC . Chứng minh ba điểm E, F, H thẳng hàng.



Lời giải.

- a) Ta có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$ nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO .
- b) Ta có $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ (g.g) do có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$, suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$, do đó $AB^2 = AD.AE$.
- c) Ta có $AH.AO = AB^2 = AD.AE$ suy ra $\triangle AHD$ đồng dạng với $\triangle AED$.
 Khi đó, $\widehat{ADH} = \widehat{AOE}$ nên tứ giác $DHOE$ là tứ giác nội tiếp. Vậy nên $\widehat{ODE} = \widehat{OHE}$.
 Suy ra $\widehat{AEO} = \widehat{DHA} = \widehat{AHF} = \widehat{ODE} = \widehat{OHE}$. Mà $\widehat{AHF}$ và $\widehat{OHE}$ ở vị trí so le trong nên ba điểm E, H, F thẳng hàng.

□

Câu 7. Cho $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ là độ dài ba cạnh của tam giác. Giải phương trình sau

$$ax^2 + (a + b - c)x + b = 0.$$

Lời giải.

Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$.

Ta có

$$\Delta = (a + b - c)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 < 0$$

Thật vậy, $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 < 0 \Leftrightarrow (z^2 - x^2 - y^2)^2 < 4x^2y^2 \Leftrightarrow -2xy < z^2 - x^2 - y^2 < 2xy \Leftrightarrow z^2 < (x + y)^2$ và $(x - y)^2 < z^2$ điều này luôn đúng do bất đẳng thức tam giác.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

———— HẾT ————

80 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VINH PHÚC

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Giá trị của biểu thức $\sqrt{(3a-1)^2}$ là

- (A) $3a-1$. (B) $1-3a$. (C) $3a-1$ và $1-3a$. (D) $|3a-1|$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m+3)x + 6$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- (A) $m > -3$. (B) $m \geq -3$. (C) $m < -3$. (D) $m \leq -3$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số nào sau đây đi qua hai điểm $A(2; 1)$, $B(1; 0)$?

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = x - 1$. (C) $y = -x + 1$. (D) $y = -x + 3$.

Câu 4. Cho đường tròn $(O; 3\text{cm})$ và đường thẳng a tiếp xúc với nhau tại điểm H . Khi đó

- (A) $OH > 3\text{cm}$ và OH vuông góc với a .
 (B) $OH < 3\text{cm}$ và OH vuông góc với a .
 (C) $OH = 3\text{cm}$ và OH không vuông góc với a .
 (D) $OH = 3\text{cm}$ và OH vuông góc với a .

Câu 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 3 - m \\ 2x + y = 3(m + 2) \end{cases}$ (1), m là tham số.

- a) Giải hệ (1) với $m = 2$.
 b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ (1) có nghiệm duy nhất.
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$, trong đó $(x; y)$ là nghiệm duy nhất của hệ (1).

Lời giải.

a) Với $m = 2$, hệ (1) trở thành $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

b) Ta có $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{1}$ với mọi m , suy ra hệ (1) có nghiệm duy nhất với mọi m .

c) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 - m \\ 4x + 2y = 6(m + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = 3(m + 2) - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = m \end{cases}$.

Do đó $A = 2m^2 + 6m + 9 = 2\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$ với mọi m .

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -\frac{3}{2}$. Vậy $\min A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$. □

Câu 6.

- a) Một phòng họp có tổng số 80 ghế ngồi, được xếp thành từng hàng, mỗi hàng có số lượng ghế bằng nhau. Nếu bớt đi 2 hàng mà không làm thay đổi số lượng ghế trong phòng thì mỗi hàng còn lại phải xếp thêm 2 ghế. Hỏi trong phòng lúc đầu có bao nhiêu hàng ghế?
 b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (d) : $y = x - 2$ cắt nhau tại hai điểm A, B . Tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích tam giác AOB , trong đó O là gốc tọa độ, hoành độ của điểm A lớn hơn hoành độ của điểm B .

Lời giải.

a) Gọi số hàng ghế lúc đầu là $x (x \in \mathbb{N}^*; x \geq 2; 80 : x)$.

Số ghế ở mỗi hàng lúc đầu là $\frac{80}{x}$ (chiếc).

Nếu bớt đi 2 hàng thì số hàng còn lại là $x - 2$.

Khi đó, số ghế ở mỗi hàng là $\frac{80}{x-2}$ (chiếc).

Vì lúc đó mỗi hàng còn lại phải xếp thêm 2 ghế nên ta có phương trình

$$\frac{80}{x-2} - \frac{80}{x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \\ x = -8 \text{ (không thỏa mãn điều kiện).} \end{cases}$$

b)

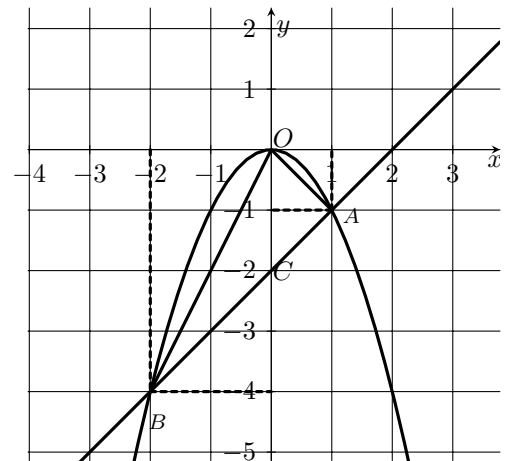
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

Vậy $A(1; -1)$, $B(-2; -4)$. Gọi C là giao của (d) và trục Oy , suy ra $C(0; -2)$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} = \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = 3.$$



□

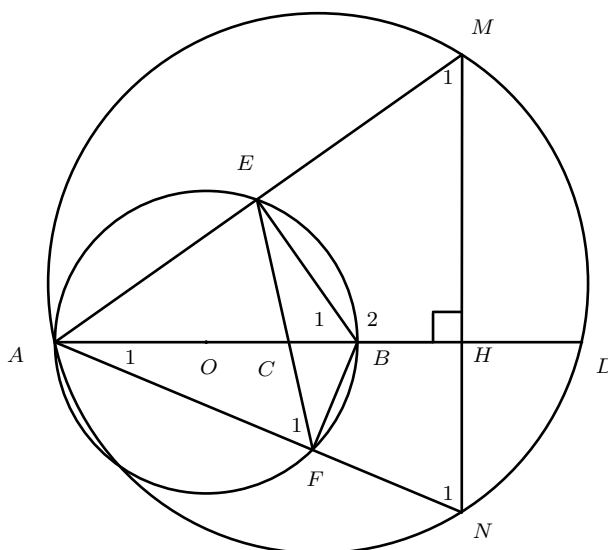
Câu 7. Cho đường tròn (O) có tâm là điểm O , đường kính $AB = 2R$. Trên đường thẳng AB lấy điểm H sao cho B nằm giữa A và H (H không trùng với B), qua H dựng đường thẳng d vuông góc với AB . Lấy điểm C cố định thuộc đoạn thẳng OB (C không trùng với O và B). Qua điểm C kẻ đường thẳng a bất kỳ cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F (a không trùng với AB). Các tia AE và AF cắt đường thẳng d lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEMH$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh rằng tam giác AFB đồng dạng với tam giác AHN và đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định khác A khi đường thẳng a thay đổi.

c) Cho $AB = 4$ cm, $BC = 1$ cm, $HB = 1$ cm. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác $\triangle AMN$.

Lời giải.



b) Ta có $\widehat{AFB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Khi đó hai tam giác vuông AFB và AHN có chung góc nhọn $\widehat{BAF}$. Suy ra $\triangle AFB \sim \triangle AHN$. Dẫn đến $\frac{AF}{AH} \frac{AB}{AN} \Leftrightarrow AF \cdot AN = AB \cdot AH(1)$.

Từ (1) và (2), ta có $AD.AC = AB.AH \Leftrightarrow AD = \frac{AB.AH}{AC}$. Do A, C, B, H cố định nên AD không đổi nên D cố định.

$$\text{Tr } \triangle AHM \sim \triangle NHD \text{ (g.g)} \Leftrightarrow \frac{AH}{NH} = \frac{HM}{HD} \Leftrightarrow HM.HN = AH.HD = \frac{25}{3}.$$

$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{1}{2}AH.(HM + HN) \geq AH.\sqrt{HM.HN} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$. Dấu " = " khi $HM = HN$. Suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 \Leftrightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{N}_1$ Suy ra $EF \parallel MN \Leftrightarrow EF \perp AB$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{\triangle AMN}$ là $\frac{25\sqrt{3}}{3}$, khi $EF \perp AB$. □

$$P = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2 y^2)}{(1 + x^2)^2 (1 + y^2)^2}.$$

Đặt $a = x^2, b = y^2$ ($a, b \geq 0$) thì $P = \frac{(a-b)(1-ab)}{(1+a)^2(1+b)^2}$. Vì $a, b \geq 0$, nên

$$\begin{aligned}(a-b)(1-ab) &= a - a^2b - b + ab^2 \leq a + ab^2 = a(1+b^2) \\ &\leq a(1+b+b^2) = a(1+b)^2.\end{aligned}$$

Ta lại có $(1+a)^2 \geq 4a$. Suy ra $P \leq \frac{a(1+b)^2}{4a(1+b)^2 = \frac{1}{4}}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy $\max P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$. □

———— **HẾT** ————

81 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC BÀ RỊA VŨNG TÀU

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$
- c) Rút gọn biểu thức $A = \frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{9x}}{3} - \sqrt{4x} \quad (x > 0)$.

Lời giải.

- a) *Cách 1:* Do $1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$.

Cách 2: Ta có $\Delta = (-3)^2 - 4.1.2 = 1 > 0$.

Nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2} = 1 \quad \text{hoặc} \quad x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2} = 2.$$

- b) Ta có $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

- c) $A = \frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{9x}}{3} - \sqrt{4x} = \frac{3(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{3} - 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$.

□

Câu 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m$ (m là tham số).

- a) Vẽ parabol (P) .
- b) Tìm tất cả giá trị của m để (P) và (d) có một điểm chung duy nhất.

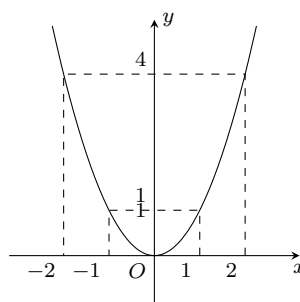
Lời giải.

- a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị



- b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = 2x - m \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0 \quad (*)$.

Để (P) và (d) có một điểm chung duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

□

Câu 3. Một xưởng mỹ nghệ dự định sản xuất thủ công một lô hàng gồm 300 cái giỏ tre. Trước khi tiến hành, xưởng được bổ sung thêm 5 công nhân, nên số giỏ tre phải làm của mỗi người giảm 3 cái so với dự định. Hỏi lúc dự định, xưởng có bao nhiêu công nhân? Biết năng suất làm việc của mỗi người là như nhau.

Lời giải.

Gọi x là số công nhân dự định ban đầu của xưởng ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó, theo dự định mỗi công nhân phải làm $\frac{300}{x}$ cái giỏ.

Sau khi xưởng được bổ sung thêm 5 công nhân thì số giỏ mỗi công nhân phải làm là $\frac{300}{x+5}$.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+5} = 3 \Leftrightarrow 300(x+5-x) = 3x(x+5) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -25 \end{cases}.$$

So với điều kiện ta chọn $x = 20$.

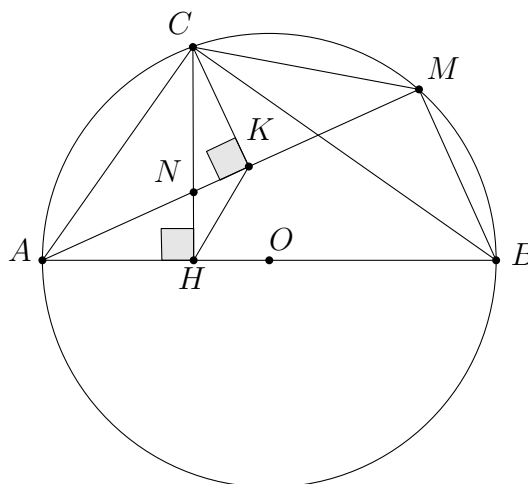
Vậy số công nhân dự định ban đầu là 20 người.

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB . Trên đoạn OA lấy điểm H (H khác O và H khác A). Qua H dựng đường thẳng vuông góc với AB , đường thẳng này cắt nửa đường tròn tại C . Trên cung BC lấy điểm M (M khác B , M khác C). Dựng CK vuông góc với AM tại K .

- Chứng minh tứ giác $ACKH$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $\widehat{CHK} = \widehat{CBM}$.
- Gọi N là giao điểm của AM và CH . Tính theo R , giá trị của biểu thức $P = AM \cdot AN + BC^2$.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{CHA} = \widehat{CKA} = 90^\circ$ (gt).
Suy ra tứ giác $ACKH$ nội tiếp đường tròn đường kính AC .
- Do tứ giác $ACHK$ nội tiếp đường tròn đường kính AC .
Suy ra $\widehat{CHK} = \widehat{CAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CK).

Mà $\widehat{CAK} = \widehat{CAM} = \widehat{CBM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM).

Vậy $\widehat{CHK} = \widehat{CBM}$.

c) Ta có tam giác ABC vuông tại C nên $\widehat{ACN} = 90^\circ - \widehat{HCB}$.

Ta có tam giác CHB vuông tại H nên $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{HCB}$.

Do đó $\widehat{ACN} = \widehat{ABC}$.

Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{AMC}$.

Do đó hai tam giác ACN và AMC đồng dạng (g - g) $\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AC}{AM} \Rightarrow AM \cdot AN = AC^2$.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên tam giác ABC vuông tại C .

Suy ra $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Vậy $P = AM \cdot AN + BC^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

□

Câu 5.

a) Giải phương trình $6\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{x^2 - 12x - 12}{x+1} = 0$.

b) Cho a, b là hai số thực tùy ý sao cho phương trình $4x^2 + 4ax - b^2 + 2 = 0$ có nghiệm $x_1; x_2$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) - 8x_1x_2 + \frac{1 + 2b(x_1 + x_2)}{a^2}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x \neq -1$.

Ta có $6\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{x^2 - 12x - 12}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 6\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + \frac{x^2}{x+1} - 12 = 0$.

Đặt $t = \frac{x^2}{x+1}$. Khi đó ta có phương trình $6t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

- Với $t = \frac{4}{3}$, ta có $\frac{x^2}{x+1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0$.

Khi đó $\Delta' = (-2)^2 - 3 \cdot (-4) = 16 > 0$, suy ra $\begin{cases} x = \frac{-(-2) + 4}{3} = 2 \\ x = \frac{-(-2) - 4}{3} = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

- Với $t = -\frac{3}{2}$, ta có $\frac{x^2}{x+1} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 3 = 0$.

Khi đó $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -15 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = -\frac{2}{3}$.

b) Điều kiện $a \neq 0$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2$.

Theo định lý Vi - ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-b^2 + 2}{4} \end{cases}$.

Ta có $P = (x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) - 8x_1x_2 + \frac{1 + 2b(x_1 + x_2)}{a^2} = a^2 - ab + 2b^2 - 4 + \frac{1 - 2ab}{a^2}$
 $= (a^2 - ab + b^2) + \left(b^2 + \frac{1 - 2ab}{a^2}\right) - 4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a - b)^2 + \left(b - \frac{1}{a}\right)^2 - 4$

$$\geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - 4 \geq -3 \text{ (do } a^2 + b^2 \geq 2).$$

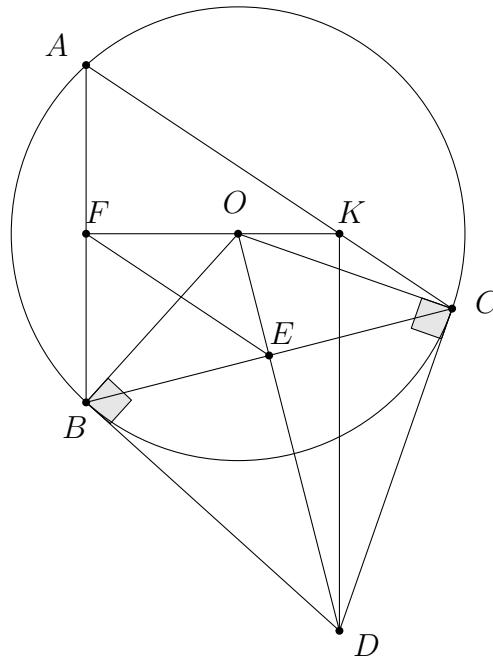
Vậy $P_{\min} = -3$.

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = b \\ b = \frac{1}{a} \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ a = b = -1 \end{cases}.$$

□

Câu 6. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại D , OD cắt BC tại E . Qua D vẽ đường thẳng song song với AB , đường thẳng này cắt AC tại K . Đường thẳng OK cắt AB tại F . Tính tỉ số diện tích $\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle ABC}}$.

Lời giải.



Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{DBC}$ (cùng chắn cung BC).

$\widehat{BAC} = \widehat{DKC}$ (đồng vị).

Suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{DKC}$ nên tứ giác $DBKC$ nội tiếp.

Mà $\widehat{OBD} = \widehat{OCD} = 90^\circ$ nên các điểm B, D, C thuộc đường tròn đường kính OD .

Suy ra K cũng thuộc đường tròn đường kính $OD \Rightarrow OK \perp KD \Rightarrow OK \perp AB$.

Do đó F là trung điểm AB .

Do $OB = OC$, $DB = DC$ nên DO là đường trung trực của BC , suy ra E là trung điểm BC .

Vậy hai tam giác BEF và ABC đồng dạng theo tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra } \frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}.$$

□

————— HẾT —————

82 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, AN GIANG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau đây

a) $\sqrt{3}x - \sqrt{2}x = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$

b)
$$\begin{cases} x + y = 101 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 2 = 0.$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x - \sqrt{2}x = \sqrt{3} + \sqrt{2} &\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \\ &\Leftrightarrow x = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 101 \\ -x + y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 100 \\ -x + y = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 \\ -x + y = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 \\ -x + 50 = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 \\ -x = -51 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 51 \\ y = 50. \end{cases} \end{aligned}$$

c) Ta có $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 = 4.$

Phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} + 2}{2} = -\sqrt{3} + 1,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} - 2}{2} = -\sqrt{3} - 1.$$

□

Câu 2. Cho hàm số $y = 0,5x^2$ có đồ thị là Parabol (P) .

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.
 b) Xác định hệ số a, b của đường thẳng $(d): y = ax + b$, biết (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 và (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 2. Chứng tỏ (d) và (P) tiếp xúc nhau.

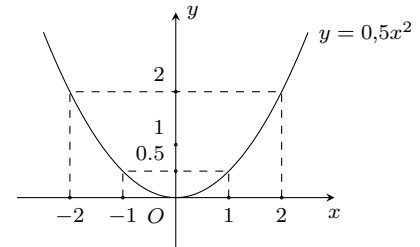
Lời giải.

a)

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	2	0,5	0	0,5	2

Đồ thị như hình vẽ bên.



- b) Đường thẳng cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 nên đường thẳng đi qua điểm $(1; 0)$

$$\Rightarrow 0 = a \cdot 1 + b (*).$$

(d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 2 nên đường thẳng đi qua điểm $(2; 2)$

$$\Rightarrow 2 = a \cdot 2 + b (**).$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta có } \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2. \end{cases}$$

Vậy $a = 2, b = -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) là

$$0,5x^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow 0,5x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0,5 = 0.$$

Vậy (d) tiếp xúc (P) .

□

Câu 3. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 3x + m = 0$ (m là tham số).

- a) Tìm m để phương trình có nghiệm bằng -2 . Tính nghiệm còn lại ứng với m vừa tìm được.
 b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Lời giải.

- a) Phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ có nghiệm $x_1 = -2 \Rightarrow (-2)^2 - 3(-2) + m = 0 \Leftrightarrow m = -10$.

$$\text{Do } x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 5.$$

Vậy $m = -10$ thì phương trình đã cho có nghiệm -2 và nghiệm còn lại là 5 .

- b) Ta có $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot m = 9 - 4m$.

$$\text{Phương trình có nghiệm khi chỉ khi } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{4}.$$

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 3, x_1 \cdot x_2 = m$.

$$\text{Mà } A = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 3^2 - 5m = 9 - 5m.$$

$$\text{Vì } m \leq \frac{9}{4} \text{ nên } -5m \geq -\frac{45}{4} \Leftrightarrow 9 - 5m \geq 9 - \frac{45}{4} = -\frac{9}{4}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } A \text{ bằng } -\frac{9}{4} \text{ khi } m = \frac{9}{4}.$$

□

Câu 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

- Chứng minh tứ giác $BMON$ nội tiếp đường tròn.
- Kéo dài AN cắt đường tròn (O) tại G (khác A). Chứng minh $ON = NG$.
- PN cắt cung nhỏ $\widehat{BG}$ của đường tròn (O) tại điểm F . Tính số đo của góc $\widehat{OFP}$.

Lời giải.

a)

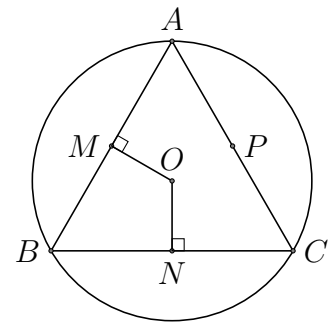
Xét tứ giác $BMON$, ta có

$OM \perp AB$ (bán kính qua trung điểm dây thì vuông góc với dây).

Tương tự $ON \perp BC$.

$$\Rightarrow \widehat{BMO} + \widehat{BNO} = 180^\circ.$$

Vậy tứ giác $BMON$ nội tiếp.



b)

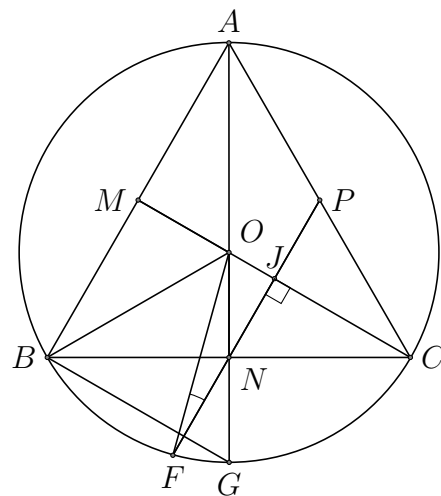
Xét tam giác BOG có $OB = OG$ (bán kính).

Mặt khác A, O, N thẳng hàng do tam giác ABC đều.

Mà $\widehat{AGB}$ chắn cung $\widehat{AB}$ nên $\widehat{AGB} = 60^\circ$.

Tam giác BOG cân và có một góc 60° nên là tam giác đều.

$\Rightarrow BN$ là trung tuyến của tam giác đều BOG hay $ON = NG$.



c) Gọi J là giao điểm của CM và PN . Xét tam giác OJF , ta có

$CM \perp PN$ (do $CM \perp AB$ và vì PN là đường trung bình nên $PN \parallel AB$).

Vậy tam giác OJF vuông tại J .

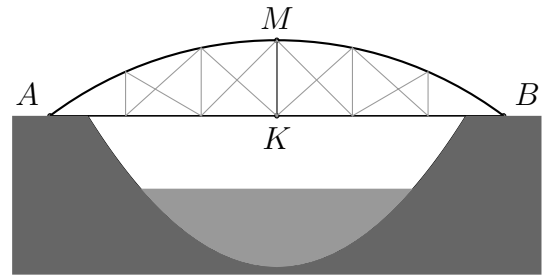
$$\text{Ta có } JM = \frac{1}{2}CM, OM = \frac{1}{3}CM, OJ = JM - OM = \frac{1}{6}CM = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}OC = \frac{R}{4}.$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{OFJ} = \frac{OJ}{OF} = \frac{R}{4} \div R = \frac{1}{4} \Rightarrow \widehat{OFP} \approx 14^\circ 28' 39''.$$

□

Câu 5.

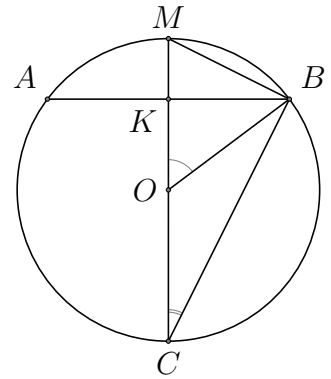
Cầu vòm là một dạng cầu đẹp bởi hình dáng cầu được uốn lượn theo một cung tròn tạo sự hài hòa trong thiết kế cảnh quan, đặc biệt là các khu đô thị có dòng sông chảy qua, tạo được một điểm nhấn của công trình giao thông hiện đại. Một chiếc cầu vòm được thiết kế như hình vẽ bên, vòm cầu là một cung tròn $\widehat{AMB}$.



Độ dài đoạn AB bằng 30 m, khoảng cách từ vị trí cao nhất ở giữa vòm cầu so với mặt sàn cầu là đoạn MK có độ dài 5 m. Tính chiều dài vòm cầu.

Lời giải.

Giả sử vòm là cung tròn tâm O bán kính R . Vẽ đường kính MC . Tam giác MBC vuông tại B có BK là đường cao, ta được



$$\begin{aligned} MK \cdot KC &= KB^2 \Rightarrow 5 \cdot (2R - 5) = 15^2 \\ &\Leftrightarrow 10R - 25 = 225 \\ &\Leftrightarrow 10R = 250 \\ &\Leftrightarrow R = 25 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \widehat{BCM} &= \frac{MB}{MC} = \frac{\sqrt{MK^2 + KB^2}}{MC} = \frac{\sqrt{5^2 + 15^2}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}. \\ &\Rightarrow \widehat{BCM} \approx 18^\circ 26' 6''. \\ &\Rightarrow \text{sđ} \widehat{AMB} = 4 \cdot \widehat{BCM} \approx 73^\circ 44' 23''. \end{aligned}$$

Độ dài cung $\widehat{AMB}$ là

$$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 73^\circ 44' 23''}{180^\circ} \approx 32,175 \text{ m.}$$

Vậy chiều dài vòm cầu là 32,175 m. □

————— HẾT —————

83 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, BẮC GIANG**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{5}(\sqrt{20} - \sqrt{5}) + 1$.
 b) Tìm tham số m để đường thẳng $y = (m - 1)x + 2018$ có hệ số góc bằng 3.

Lời giải.

- a) Ta có

$$A = \sqrt{5}(2\sqrt{5} - \sqrt{5}) + 1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 1 = 6.$$

- b) Hệ số góc của đường thẳng bằng 3 khi và chỉ khi $m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$.

□

Câu 2.

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 2x + 5y = 13. \end{cases}$
 2. Cho biểu thức $B = \left(\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$ (với $a > 0, a \neq 1$).
 (a) Rút gọn biểu thức B .
 (b) Đặt $C = B(a - \sqrt{a} + 1)$. So sánh C và 1.
 3. Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + 3m - 3 = 0$ (1), với x là ẩn, m là tham số.
 (a) Giải phương trình (1) khi $m = -1$.
 (b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Lời giải.

1. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x + 8y = 16 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ x + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (4; 1)$.

- 2.

- (a) Ta có $a\sqrt{a} - a - \sqrt{a} + 1 = a(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} - 1) = (\sqrt{a} - 1)(a - 1)$. Do đó

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \\ &= \frac{6(\sqrt{a}-1) + 10-2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1) \cdot (\sqrt{a}-1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \\ &= \frac{4+4\sqrt{a}}{4\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} = \frac{1}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

- (b) Ta có

$$C = \frac{a - \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) - 1 \geq 2 - 1 = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 1$ (loại). Vậy $C > 1$.

3.

(a) Với $m = -1$, phương trình đã cho trở thành

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = -2.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2, x = 3$.

(b) Vì x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông, nên (1) có hai nghiệm dương phân biệt, hay

$$\begin{cases} \Delta = (m + 2)^2 - 4(3m - 3) > 0 \\ S = m + 2 > 0 \\ P = 3m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 4)^2 > 0 \\ m > -2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > 1. \end{cases} \quad (*)$$

Theo định lí Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = m + 2, x_1 \cdot x_2 = 3m - 3$. Theo định lí Pitago:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 25 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25 \Leftrightarrow (m + 2)^2 - 2(3m - 3) - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow (m - 5)(m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 5, m = -3. \end{aligned}$$

Đối chiếu với (*) ta có $m = 5$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 3. Bạn Linh đi xe đạp từ nhà đến trường với quãng đường dài 10 km. Khi đi từ trường về nhà, vẫn trên cung đường ấy, do lượng xe tham gia giao thông nhiều hơn nên bạn Linh phải giảm vận tốc 2 km/h so với khi đến trường. Vì vậy thời gian về nhà nhiều hơn thời gian đến trường là 15 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi bạn Linh từ nhà đến trường.

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc xe đạp khi Linh đi từ nhà đến trường ($x > 2$).

Thời gian Linh đi từ nhà đến trường là $\frac{10}{x}$ (h).

Thời gian Linh đi từ trường về nhà là $\frac{10}{x - 2}$ (h).

Theo đề bài ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{10}{x - 2} - \frac{10}{x} &= \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 10)(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 10, x = -8 \text{ (loại)}. \end{aligned}$$

Vậy vận tốc của xe đạp khi Linh đi từ nhà đến trường là 10 (km/h).

□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M, N ($M \neq B, N \neq C$). Gọi H là giao điểm của BN với CM ; P là giao điểm của AH và BC .

- Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Chứng minh $BM \cdot BA = BP \cdot BC$.
- Trong trường hợp đặc biệt khi tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính chu vi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ theo a .

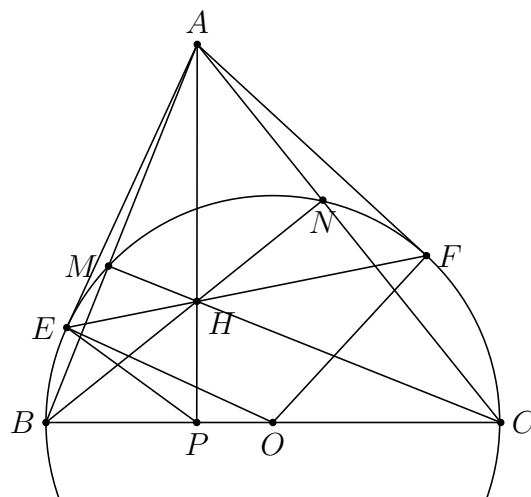
- d) Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AE và AF của đường tròn tâm O đường kính BC (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Lời giải.

a)

Ta có M, N nằm trên đường tròn đường kính BC , nên ta có $BN \perp AC, CM \perp AB$. Suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $AMHN$ nội tiếp.

- b) Ta có BN, CM là hai đường cao của tam giác ABC nên H là trực tâm của tam giác ABC . Suy ra $AP \perp BC$. Do đó, ta có tứ giác $AMPC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AMP} + \widehat{ACB} = 180^\circ$.
 Dẫn tới $\triangle BMP \sim \triangle BCA$, suy ra $\frac{BM}{BP} = \frac{BC}{BA}$, hay $BM \cdot BA = BP \cdot BC$.



- c) Vì tam giác ABC đều, nên M, N, P là trung điểm của ba cạnh.

Ta có $AP^2 = AB^2 - BP^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$, suy ra $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lại có H là trọng tâm giác ABC , nên $AH = \frac{2}{3}AP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ là $R = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Chu vi đường tròn cần tính: $2\pi R = \frac{\pi a}{3}$.

- d) Xét hai tam giác AME và AEB có góc $\hat{A}$ chung, $\widehat{AEM} = \widehat{ABE} = \frac{1}{2}\widehat{EM}$, suy ra $\triangle AEM \sim \triangle ABE$, nên ta có $AM \cdot AB = AE^2$. (1)

Mặt khác, tứ giác $BPHM$ nội tiếp (do $\widehat{BMH} = \widehat{BPH} = 90^\circ$) nên ta cũng có

$$AM \cdot AB = AH \cdot AP. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $AH \cdot AP = AE^2$, hay là $\frac{AH}{AE} = \frac{AP}{AE}$. Từ đây, suy ra $\triangle AHE \sim \triangle AEP$, nên $\widehat{AHE} = \widehat{AEP}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\widehat{AHF} = \widehat{AFP}$.

Lại có $\widehat{AEO} = \widehat{APO} = \widehat{AFO} = 90^\circ$, nên tứ giác $AEPF$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{AHE} + \widehat{AHF} = \widehat{AEP} + \widehat{AFP} = 180^\circ$. Từ đây, ta có ba điểm E, H, F thẳng hàng. $\square$

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{81x^2 + 18225x + 1}{9x} - \frac{6\sqrt{x} + 8}{x + 1}$, với $x > 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 P &= 9x + 2025 + \frac{1}{9x} + \left(9 - \frac{6\sqrt{x} + 8}{x + 1}\right) - 9 \\
 &= \left(9x + \frac{1}{9x}\right) + \frac{9x - 6\sqrt{x} + 1}{x + 1} + 2016 \\
 &\geq 2\sqrt{9x \cdot \frac{1}{9x}} + \frac{(3\sqrt{x} - 1)^2}{x + 1} + 2016 \geq 2018.
 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{9}$. Vậy $\min P = 2018$. □

———— **HẾT** ————

84 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, BẮC KẠN**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Bài 1.** Giải phương trình $3x - 2 = 0$.**Lời giải.**Ta có $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{3}$. □**Bài 2.** Giải phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.**Lời giải.**Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$.Vì $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{3; 2\}$. □**Bài 3.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - 2y = -1. \end{cases}$ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 3)$. □**Bài 4.** Quãng sông từ A đến B dài 60 km. Một ca nô xuôi dòng từ A đến B rồi ngược từ B trở về A mất tổng cộng 8 giờ. Tính vận tốc thực của ca nô, biết vận tốc dòng nước là 4 km/h.**Lời giải.**Gọi vận tốc thực của ca nô là x km/h (điều kiện $x > 4$).

Vì vận tốc dòng nước là 4 km/h nên

vận tốc ca nô khi xuôi dòng là $x + 4$ km/h $\Rightarrow$ thời gian ca nô đi xuôi dòng là $\frac{60}{x+4}$ giờ.vận tốc ca nô khi ngược dòng là $x - 4$ km/h $\Rightarrow$ thời gian ca nô đi ngược dòng là $\frac{60}{x-4}$ giờ.

Do đó ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{60}{x+4} + \frac{60}{x-4} = 8 &\Leftrightarrow \frac{60(x-4) + 60(x+4)}{(x+4)(x-4)} = 8 \\ &\Leftrightarrow 120x = 8(x^2 - 16) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 15x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 & (\text{thỏa mãn}) \\ x = -1 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc thực của ca nô là 16 km/h. □

Bài 5. Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - 4\sqrt{80}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - 4\sqrt{80} \\ &= 4\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - 16\sqrt{5} \\ &= -3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Vậy $A = -3\sqrt{5}$. □

Bài 6. Rút gọn biểu thức sau

$$B = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) \cdot \frac{x - 1}{2\sqrt{x} - 1} \quad \text{với } x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) \cdot \frac{x - 1}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 2 + 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{x - 1}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= \sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

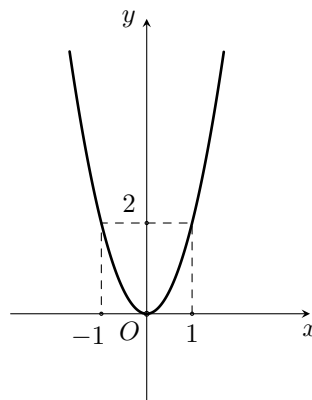
Vậy $B = \sqrt{x} + 1$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$. □

Bài 7.

- Vẽ parabol $(P): y = 2x^2$ trên mặt phẳng Oxy .
- Tìm a, b để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua $M(0; -1)$ và tiếp xúc với parabol (P) .

Lời giải.

- Vẽ parabol $(P): y = 2x^2$.



-

- Đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua $M(0; -1)$ nên ta có $a \cdot 0 + b = -1 \Rightarrow b = -1$.
Do đó (d) có dạng $y = ax - 1$.

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$ax - 1 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - ax + 1 = 0. \quad (1)$$

(d) và (P) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}.$$

Vậy $(a; b) = (2\sqrt{2}; -1)$ hoặc $(a; b) = (-2\sqrt{2}; -1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 6m - 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(2m-2)x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 4$.

Lời giải.

- Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - (6m-4) = m^2 - 4m + 5 = (m-2)^2 + 1$.

Vì $(m-2)^2 \geq 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' \geq 1 \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

- Theo định lý Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 6m - 4. \end{cases} \quad (*)$$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có

$$x_2^2 - 2(m+1)x_2 + 6m - 4 = 0 \Rightarrow x_2^2 - 4x_2 = (2m-2)x_2 - 6m + 4.$$

Khi đó

$$(2m-2)x_1 + x_2^2 - 4x_2 = 4 \Leftrightarrow (2m-2)x_1 + (2m-2)x_2 - 6m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-2)(x_1 + x_2) - 6m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m-2) \cdot 2(m+1) - 6m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

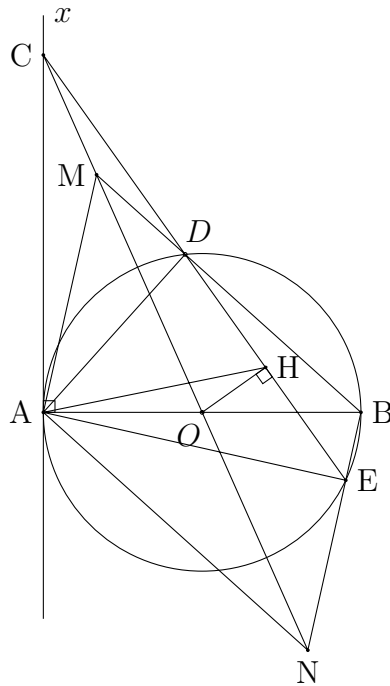
Vậy $m = 2, m = -\frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm.

□

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) . Trên tia Ax lấy điểm C , từ C vẽ đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E (D và E không cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB , D nằm giữa C và E). Từ điểm O kẻ OH vuông góc với đoạn thẳng DE tại điểm H .

- Chứng minh rằng tứ giác $AOHC$ nội tiếp.
- Chứng minh rằng $AD \cdot CE = AC \cdot AE$.
- Đường thẳng CO cắt các tia BD, BE lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng tứ giác $AMBN$ là hình bình hành.

Lời giải.



- a) Vì Ax là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{CAO} = 90^\circ$.
 Xét tứ giác $AOHC$ ta có $\widehat{CAO} + \widehat{CHO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
 Vậy $CAOH$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle EAC$ ta có:
 $\widehat{CAD} = \widehat{AEC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AD).
 $\widehat{C}$ chung.
 Suy ra $\triangle ADC \sim \triangle EAC$ (g-g).
 Do đó $\frac{AD}{EA} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow AD \cdot CE = AC \cdot AE$ (đpcm).
- c) Xét $\triangle ADH$ và $\triangle NBO$, ta có
 $\widehat{ADH} = \widehat{NBO}$ (góc nội tiếp chắn cung AE).
 $\widehat{AHD} = \widehat{AOC}$ (góc nội tiếp chắn cung AC do tứ giác $CAOH$ nội tiếp)
 $\widehat{AOC} = \widehat{NOB}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{NOB}$.
 Do đó $\triangle ADH \sim \triangle NBO \Rightarrow \frac{AD}{NB} = \frac{DH}{BO} = \frac{\frac{1}{2}DE}{\frac{1}{2}BA} = \frac{DE}{BA}$.
 Suy ra $\frac{AD}{DE} = \frac{NB}{BA} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle NBA$.
 $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{NAB} = \widehat{ABD}$.
 Xét $\triangle AON$ và $\triangle BOM$ có:
 $AO = BO$
 $\widehat{AON} = \widehat{BOM}$ (đối đỉnh).
 $\widehat{OAN} = \widehat{NAB} = \widehat{ABD} = \widehat{OBM}$.
 $\Rightarrow \triangle AON = \triangle BOM$ (g-c-g) $\Rightarrow ON = OM$.
 Từ đó ta được tứ giác $AMBN$ có hai đường chéo AB, MN cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường. Vậy tứ giác $AMBN$ là hình bình hành.

□

———— HẾT ————

85 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, BẠC LIÊU

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt{45} + \sqrt{20} - 2\sqrt{5}.$

b) $B = \frac{a + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2} - \frac{a - 4}{\sqrt{a} - 2},$ (với $a \geq 0; a \neq 4$).

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{45} + \sqrt{20} - 2\sqrt{5} \\ &= \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} - 2\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= \frac{a + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2} - \frac{a - 4}{\sqrt{a} - 2} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2)}{\sqrt{a} + 2} - \frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)}{\sqrt{a} - 2} \\ &= \sqrt{a} - (\sqrt{a} + 2) \\ &= -2. \end{aligned}$$

□

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 1).$

□

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: y = x + 2m.$

a) Vẽ đồ thị $(P).$

b) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho d cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng $-1.$

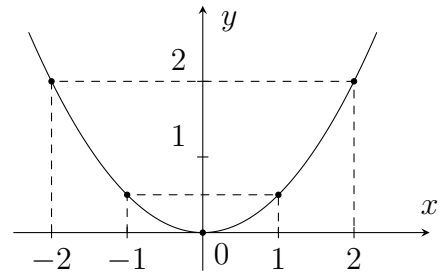
Lời giải.

a)

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vẽ đồ thị:

b) Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2}x^2 = x + 2m \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 2m = 0. \quad (1)$$

Để d cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng $-1 \Leftrightarrow x = -1$ là nghiệm của phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - (-1) - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{3}{4}.$$

□

Câu 4. Cho phương trình $x^2 + 4x + m + 1 = 0$ (1) (với m là tham số).

- Giải phương trình (1) với $m = 2$.
- Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có nghiệm.
- Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{x_1 - 1}{2x_2} + \frac{x_2 - 1}{2x_1} = -3.$$

Lời giải.

- Thay $m = 2$ vào (1): $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$\text{Ta có } a - b + c = 1 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow \text{phương trình có hai nghiệm } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3. \end{cases}$$

Vậy, với $m = 2$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -3$.

- $\Delta' = 2^2 - (m + 1) = 3 - m$.

Để phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$.

- Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Áp dụng định lý Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - 1}{2x_2} + \frac{x_2 - 1}{2x_1} &= -3 \\ \Leftrightarrow x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1) &= -6x_1x_2, (x_1 \neq 0, x_2 \neq 0) \\ \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) &= -6x_1x_2 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) &= -6x_1x_2 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 - (x_1 + x_2) &= 0. \quad (**) \end{aligned}$$

Thay (*) vào (**) ta được

$$16 + 4(m + 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -6 \text{ (thỏa mãn).}$$

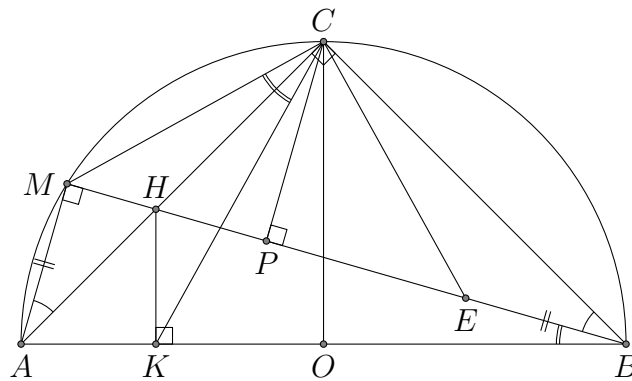
Vậy $m = -6$.

□

Câu 5. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Vẽ bán kính CO vuông góc với AB , M là một điểm bất kỳ trên cung AC (M khác A, C và điểm chính giữa cung AC); BM cắt AC tại H . Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB .

- Chứng minh tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh CA là phân giác góc MCK .
- Kẻ CP vuông góc với BM ($P \in BM$) và trên đoạn BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh $ME = 2CP$.

Lời giải.



- Xét tứ giác $BCHK$ có $\begin{cases} \widehat{BCH} = \widehat{BCA} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \\ \widehat{BKH} = 90^\circ \text{ (do } HK \perp AB) \end{cases}$
 $\Rightarrow BCHK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BH .
- Xét (O) có $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$ (1) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM).
 Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCHK$ có $\widehat{KBH} = \widehat{KCH}$ (2) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HK).
 Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{KCH} = \widehat{ACM} \Rightarrow CA$ là tia phân giác góc MCK .
- Xét $\triangle ACM$ và $\triangle BEC$ có

$$\begin{cases} \widehat{MAC} = \widehat{EBC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)} \\ AM = BE \text{ (giả thiết)} \\ AC = BC \text{ (giả thiết)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle BEC \Rightarrow MC = EC \Rightarrow \triangle MCE$ cân tại $C \Rightarrow P$ là trung điểm đoạn ME .
 Lại có $\widehat{CME} = \widehat{CMB} = \frac{1}{2}\widehat{BC} = 45^\circ \Rightarrow \triangle MCE$ vuông cân tại C . Vậy $CP = \frac{1}{2}ME$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông). Hay $ME = 2CP$.

□

———— **HẾT** ————

86 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, BÀ RỊA VŨNG TÀU

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Giải phương trình $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Lời giải.

Các hệ số của phương trình bậc hai là $a = 1, b = 4, c = -5$.

Vì $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = -5$. □

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2; 1)$. □

Câu 3. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{16} - \sqrt[3]{8} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt{16} - \sqrt[3]{8} + \sqrt{\frac{12}{3}} = 4 - 2 + 2 = 4$. □

Câu 4. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m$ (m là tham số).

a) Vẽ parabol (P) .

b) Với những giá trị nào của m thì (P) và (d) chỉ có một điểm chung. Tìm tọa độ điểm chung đó.

Lời giải.

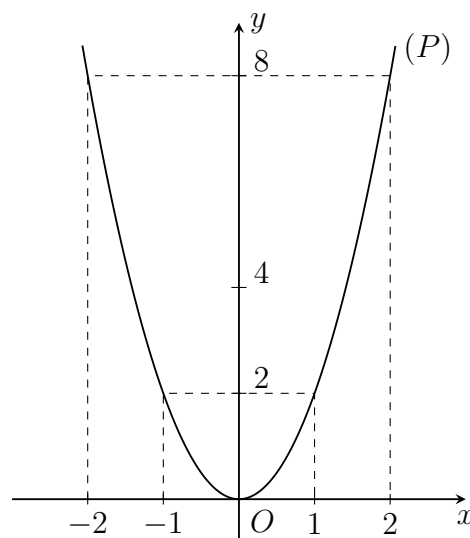
a) Vẽ đồ thị parabol (P) .

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Bảng giá trị của hàm số $y = 2x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Vì hệ số $a = 2 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$2x^2 = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - m = 0 \quad (1)$$

(P) và (d) chỉ có một điểm chung khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Khi đó, nghiệm kép của phương trình là $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, suy ra $y = \frac{1}{2}$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thì (P) và (d) có một điểm chung có tọa độ là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

□

Câu 5. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 450 km với vận tốc không đổi. Vận tốc xe thứ nhất lớn hơn vận tốc xe thứ hai 10 km/h nên xe thứ nhất đến thành phố B trước xe thứ hai 1,5 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe thứ nhất ($x > 10$). Khi đó vận tốc của xe thứ hai là $x - 10$ (km/h). Thời gian xe thứ nhất và xe thứ hai đi từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 450 km lần lượt là $\frac{450}{x}$ giờ và $\frac{450}{x-10}$ giờ.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{450}{x-10} - \frac{450}{x} &= 1,5 \Leftrightarrow 300x - 300(x-10) = x(x-10) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x - 3000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -50 \text{ (loại)} \\ x = 60. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc của xe thứ nhất là 60 km/h; vận tốc xe thứ hai là 50 km/h.

□

Câu 6. Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = 6$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$. Vì $x_1 < x_2$ và $x_1 x_2 = -1 < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$. Do đó

$$|x_1| - |x_2| = 6 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 6 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -6 \Leftrightarrow m = -6.$$

Vậy $m = -6$ là giá trị cần tìm.

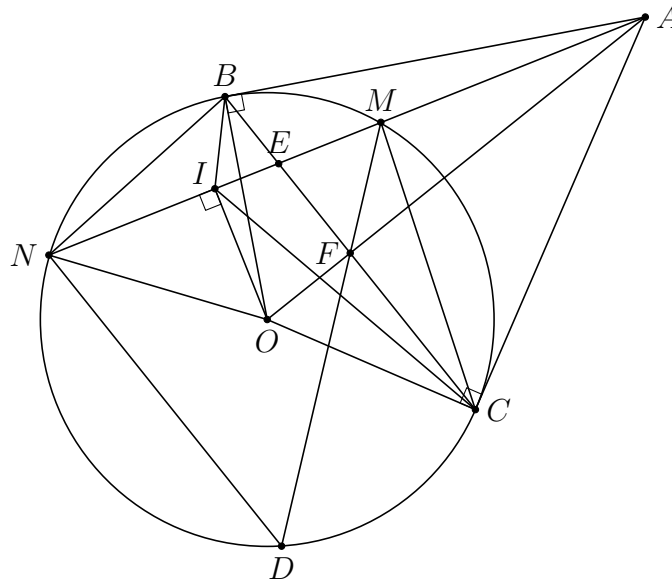
□

Câu 7. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn đó. Kẻ cát tuyến AMN không đi qua O (M nằm giữa A và N). Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với $(O; R)$ (B, C là hai tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ MN). Đường thẳng BC cắt MN và AO lần lượt tại E, F. Gọi I là trung điểm của MN.

- Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp được đường tròn.
- Chứng minh $EB \cdot EC = EM \cdot EN$ và IA là tia phân giác của $\widehat{BIC}$.
- Tia MF cắt $(O; R)$ tại điểm thứ hai là D. Chứng minh $\triangle AMF \sim \triangle AON$ và $BC \parallel DN$.

d) Giả sử $AO = 2R$. Tính diện tích tam giác ABC theo R .

Lời giải.



a) Vì AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B, C nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$. Do đó, tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) • Chứng minh $EB \cdot EC = EM \cdot EN$.

Xét hai tam giác EBN và EMC có:

$\widehat{BEN} = \widehat{MEC}$ (đối đỉnh)

$\widehat{BNE} = \widehat{MCE}$ (cùng chắn cung $\widehat{BM}$)

Suy ra, $\triangle EBN \sim \triangle EMC$, suy ra $\frac{EB}{EM} = \frac{EN}{EC}$ hay $EB \cdot EC = EM \cdot EN$.

• Chứng minh IA là tia phân giác của $\widehat{BIC}$.

Ta có $OI \perp MN$ (định lý đường kính và dây cung)

Suy ra, I thuộc đường tròn đường kính AO hay 5 điểm O, I, B, A, C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $\widehat{AIB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$)

và $\widehat{AIC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$)

mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra, $\widehat{AIB} = \widehat{AIC}$ hay IA tia phân giác của $\widehat{BIC}$.

c) • Chứng minh $\triangle AMF \sim \triangle AON$.

Ta có $\triangle ABN \sim \triangle AMB$ (do $\widehat{A}$ chung và $\widehat{ANB} = \widehat{ABM} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BM}$).

Suy ra, $AB^2 = AM \cdot AN$.

(1)

Mặt khác, tam giác ABO vuông tại B có BF là đường cao nên $AB^2 = AF \cdot AO$.

(2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \cdot AN = AF \cdot AO$ hay $\frac{AM}{AO} = \frac{AF}{AN} \Rightarrow \triangle AMF \sim \triangle AON$.

• Chứng minh $BC \parallel DN$.

Ta có $\widehat{AFM} = \widehat{ANO}$ (do $\triangle AMF \sim \triangle AON$). Suy ra,

$$90^\circ - \widehat{AFM} = 90^\circ - \widehat{ANO} \Leftrightarrow \widehat{MFE} = \widehat{NOI} \quad (3)$$

Mặt khác,

$$\widehat{MDN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \widehat{NOI} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{MDN}$.

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị, suy ra $BC \parallel DN$.

d) Trong tam giác ACO vuông tại C , CF là đường cao, ta có

$$OF \cdot OA = OC^2 \Rightarrow OF = \frac{OC^2}{OA} = \frac{R}{2} \Rightarrow AF = OA - OF = \frac{3R}{2}.$$

Ta lại có

$$CF = \sqrt{OC^2 - OF^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2CF = R\sqrt{3}.$$

Do đó, diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AF \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

□

Câu 8. Giải phương trình $2\sqrt{x} - \sqrt{3x+1} = x-1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x} - 2\sqrt{3x+1} &= 2x-2 \Leftrightarrow x + 4\sqrt{x} + 4 = 3x+1 + 2\sqrt{3x+1} + 1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)^2 = (\sqrt{3x+1}+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+2 = \sqrt{3x+1}+1 \\ \sqrt{x}+2 = -\sqrt{3x+1}-1 \text{ (phương trình vô nghiệm)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \sqrt{3x+1} \\ &\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 = 3x+1 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1. \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0; 1\}$.

□

Câu 9. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a+b+3ab=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} + \frac{3ab}{a+b}.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\begin{aligned} 1-a^2 + \frac{8}{9} &\geq 2\sqrt{\frac{8}{9}(1-a^2)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-a^2} \\ 1-b^2 + \frac{8}{9} &\geq 2\sqrt{\frac{8}{9}(1-b^2)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-b^2} \end{aligned}$$

Suy ra,

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} (\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2}) \leq \frac{34}{9} - (a^2 + b^2).$$

Từ giả thiết và a, b dương nên

$$\frac{1-a-b}{3} = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow 3(a+b)^2 + 4(a+b) - 4 \geq 0 \Rightarrow a+b \geq \frac{2}{3}.$$

Mặt khác,

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{34}{9} - (a^2 + b^2) \leq \frac{32}{9}.$$

Do đó,

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{32}{9} = 4\sqrt{23}.$$

Ta lại có,

$$\frac{3ab}{a+b} = \frac{1-a-b}{a+b} = \frac{1}{a+b} - 1 \leq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Suy ra,

$$P = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} + \frac{3ab}{a+b} \leq 4\sqrt{23} + \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$. □

———— HẾT ————

87 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, BÌNH ĐỊNH**◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆**

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \div \frac{\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 1}$, với $x > 0$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm các giá trị của x để $A > \frac{1}{2}$.

Lời giải.

- a) Với $x > 0$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{x} \\ &= \frac{1 - x}{x}. \end{aligned}$$

- b) Với $x > 0$, ta có

$$A > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - x}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - 2x > x \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}.$$

Vậy các giá trị x cần tìm là $0 < x < \frac{2}{3}$. □

Câu 2. Không dùng máy tính, trình bày cách giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 12 \\ x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$. □

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy đường thẳng d có hệ số góc k đi qua điểm $M(1; -3)$ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B .

- a) Xác định tọa độ các điểm A và B theo k .
 b) Tính diện tích tam giác OAB khi $k = 2$.

Lời giải.

- a) Do d đi qua điểm $M(1; -3)$ và có hệ số góc k nên có phương trình

$$y = k(x - 1) - 3 \Leftrightarrow y = kx - k - 3,$$

ở đây $k \neq 0$ vì d cắt hai trục tọa độ.

Cho $x = 0$, thu được $y = -k - 3$, suy ra $B(0; -k - 3)$.

Cho $y = 0$, thu được $x = \frac{k + 3}{k}$, suy ra $A\left(\frac{k + 3}{k}; 0\right)$.

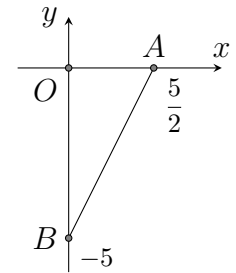
Vậy $A\left(\frac{k + 3}{k}; 0\right)$ và $B(0; -k - 3)$.

b)

Khi $k = 2$ thì $A\left(\frac{5}{2}; 0\right), B(0; -5)$.

Tam giác OAB vuông tại O có $OA = \frac{5}{2}$ và $OB = 5$, từ đó

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{25}{4}.$$



□

Câu 4. Tìm một số có hai chữ số biết rằng hiệu của số ban đầu và số đảo ngược của nó bằng 18 (số đảo ngược của một số là số thu được bằng cách viết các chữ số của số đó theo thứ tự ngược lại) và tổng của số ban đầu với bình phương số đảo ngược của nó bằng 618.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$, khi đó số đảo ngược của nó là $\overline{ba}$ ($a, b \in \{1; 2; \dots; 9\}, a > b$).

Theo giả thiết bài toán ta có hệ

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{ab} - \overline{ba} = 18 \\ \overline{ab} + (\overline{ba})^2 = 618 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 18 + \overline{ba} \\ 18 + \overline{ba} + (\overline{ba})^2 = 618 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 18 + \overline{ba} \\ (\overline{ba})^2 + \overline{ba} - 600 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 18 + \overline{ba} \\ \overline{ba} = 24 \\ \overline{ba} = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{ba} = 24, \overline{ab} = 42 \quad (\text{thỏa mãn}) \\ \overline{ba} = -25, \overline{ab} = -7 \quad (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

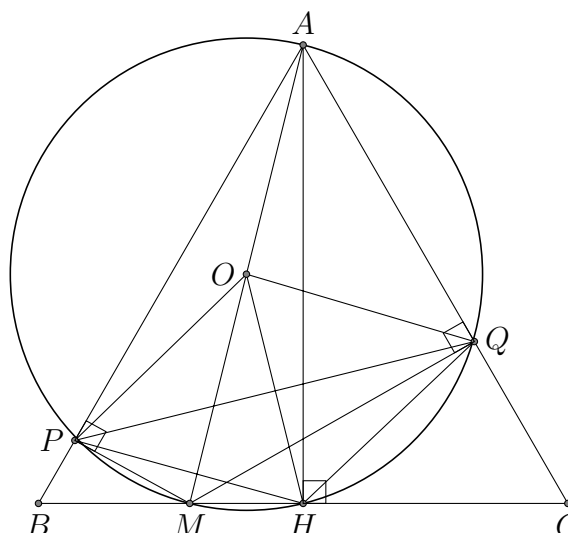
Vậy số cần tìm là 42.

□

Câu 5. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B, C, H). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC .

- Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được trong đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
- Chứng minh $OH \perp PQ$.
- Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Lời giải.



- a) Chứng minh tứ giác $APMQ$ nội tiếp được và xác định tâm O của đường tròn này.

Theo giả thiết bài toán, hai điểm P và Q cùng nhìn đoạn AM dưới một góc vuông, suy ra chúng thuộc đường tròn đường kính AM .

Vậy tứ giác $APMQ$ nội tiếp được đường tròn, tâm O của đường tròn này là trung điểm của đoạn AM .

- b) Chứng minh $OH \perp PQ$.

Vì H nhìn đoạn AM dưới một góc vuông nên H thuộc đường tròn (O) đường kính AM .

Mà $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{HAP} = \widehat{HAQ}$, suy ra hai dây cung $HP = HQ$.

Mặt khác $OP = OQ$, suy ra OH là đường trung trực của PQ . Nói cách khác $OH \perp PQ$.

- c) Chứng minh $MP + MQ = AH$.

Do $\triangle BMP$ vuông tại P và có góc $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $MP = MB \sin 60^\circ = \frac{MB\sqrt{3}}{2}$.

Tương tự $MQ = \frac{MC\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $MP + MQ = \frac{MB\sqrt{3}}{2} + \frac{MC\sqrt{3}}{2} = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$.

Mà $\triangle ABC$ đều nên $AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$. Từ đó $AH = MP + MQ$.

□

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng AB, AC sao cho $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$. Đặt $AM = x$ và $AN = y$. Chứng minh $MN = a - x - y$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\frac{x}{a-x} + \frac{y}{a-y} = 1$$

$$\Leftrightarrow ax - xy + ay - xy = a^2 - ax - ay + xy$$

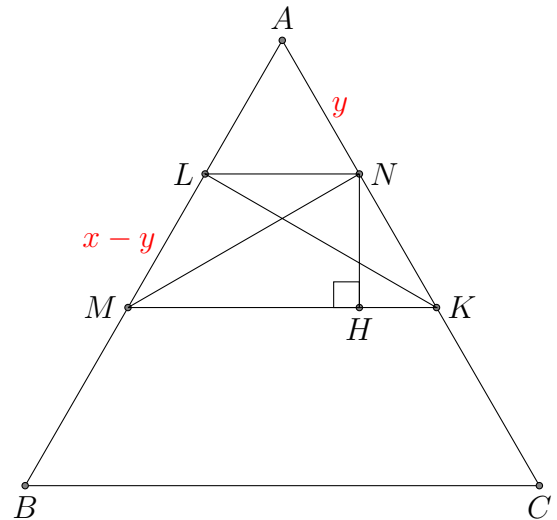
$$\Leftrightarrow a^2 + x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2xy = x^2 + y^2 - xy$$

$$\Leftrightarrow (a - x - y)^2 = x^2 + y^2 - xy.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x > y$.

Kẻ $MK \parallel BC$ ($K \in AC$), $NL \parallel BC$ ($L \in AB$).

Khi đó $\triangle AMK$ và $\triangle ALN$ là các tam giác đều (tam giác cân và có góc bằng 60°) và tứ giác $LNKM$ là hình thang cân. Kẻ $NH \perp MK$ tại H .



Tam giác NHK vuông tại H , có $NK = x - y$, $\widehat{HKN} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30^\circ$.

Suy ra $HK = NK \cdot \sin 30^\circ = \frac{x-y}{2}$, $NH = NK \cos 30^\circ = \frac{(x-y)\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông MNH , có

$$MH = x - \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2},$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{(x-y)\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = \sqrt{(a - x - y)^2} = |a - x - y|.$$

Cuối cùng, vì $\frac{x}{a-x} + \frac{y}{a-y} = 1$ nên

$$\begin{cases} \frac{x}{a-x} < 1 \\ \frac{y}{a-y} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a-x \\ y < a-y \end{cases} \Rightarrow x+y < 2a-x-y \Rightarrow a-x-y > 0.$$

Vậy $MN = a - x - y$.

□

———— **HẾT** ————

88 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, BÌNH DƯƠNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Bài 1.

- a) Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{40}$.
- b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.
- Tính giá trị của B khi $x = 12 + 8\sqrt{2}$.

Lời giải.

- a) $A = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{40} = 5 - 2\sqrt{10} + 2 + 2\sqrt{10} = 7$.
- b) $B = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1$.
- Với $x = 12 + 8\sqrt{2} \Rightarrow B = \sqrt{12 + 8\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})^2} - 1 = 1 + 2\sqrt{2}$.

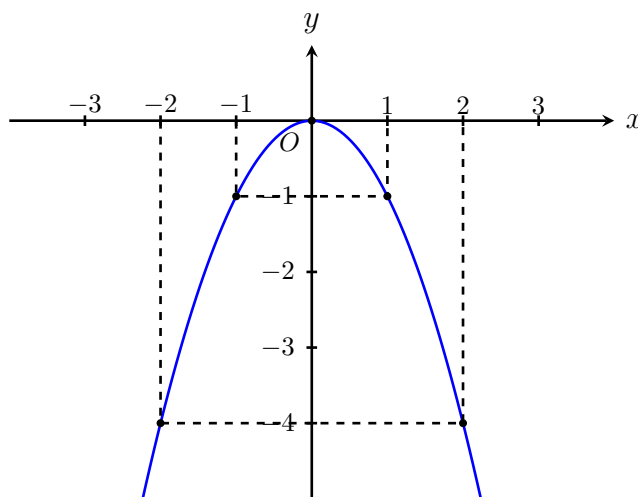
□

Bài 2. Cho parabol $(P) : y = -x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2\sqrt{3}x + m + 1$ (m là tham số).

- a) Vẽ đồ thị (P) .
- b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

- a) Parabol (P) đi qua 5 điểm $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(-1; -1)$, $(2; -4)$, $(-2; -4)$.



- b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) , ta có:

$$-x^2 = 2\sqrt{3}x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x + m + 1 = 0. \quad (*)$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\Delta = 12 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Vậy $m < 3$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

□

Bài 3.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 9x + y = 11 \\ 5x + 2y = 9. \end{cases}$
- b) Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 3m - 2 = 0$ (1), (m là tham số)
- i) Giải phương trình (1) với $m = 3$.
- ii) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = 2018 + 3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

$$a) \begin{cases} 9x + y = 11 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 - 9x \\ 5x + 22 - 18x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

$$b) x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 3m - 2 = 0 \quad (1)$$

i) Khi $m = 3$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Ta có $\Delta = 100 - 4.16 = 16 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{36}}{2} = 8, \quad x_2 = \frac{10 - \sqrt{36}}{2} = 2.$$

Vậy $m = 3$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 8; x_2 = 2$.

ii) Điều kiện để (1) có hai nghiệm phân biệt là

$$\Delta = 4(m^2 + 4m + 4) - 4(m^2 + 3m - 2) > 0 \Leftrightarrow m > -6. \quad (2)$$

$$\text{Theo hệ thức vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1x_2 = m^2 + 3m - 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= 2018 + 3x - 1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= 2018 + 5x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 \\ &= m^2 - m + 1992 \\ &= \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7969}{4} \geq \frac{7969}{4}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \min A = \frac{7969}{4} \text{ khi } m = \frac{1}{2}.$$

□

Bài 4. Một người dự định đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 90 km trong một thời gian đã định. Sau khi đi được 1 giờ người đó nghỉ 9 phút. Do đó, để đến B đúng hẹn, người ấy phải tăng vận tốc thêm 4 km/h. Tính vận tốc lúc đầu của người đó.

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc lúc đầu ($x > 0$)

$x + 4$ là vận tốc đi lúc sau; $\frac{90}{x}$ là thời gian đi dự định. $\frac{90 - x}{x + 4}$ là thời gian đi lúc tăng tốc.

Vì sau khi đi một giờ người đó nghỉ 9 phút nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{9}{60} + \frac{90 - x}{x + 4} &= \frac{90}{x} \\ \Leftrightarrow 23(x + 4)x + 20x(90 - x) &= 1800(x + 4) \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 92x - 7200 &= 0 \end{aligned}$$

Giải được hai nghiệm $x_1 = 36$ (thỏa mãn), $x_2 = \frac{-200}{3}$ (loại).

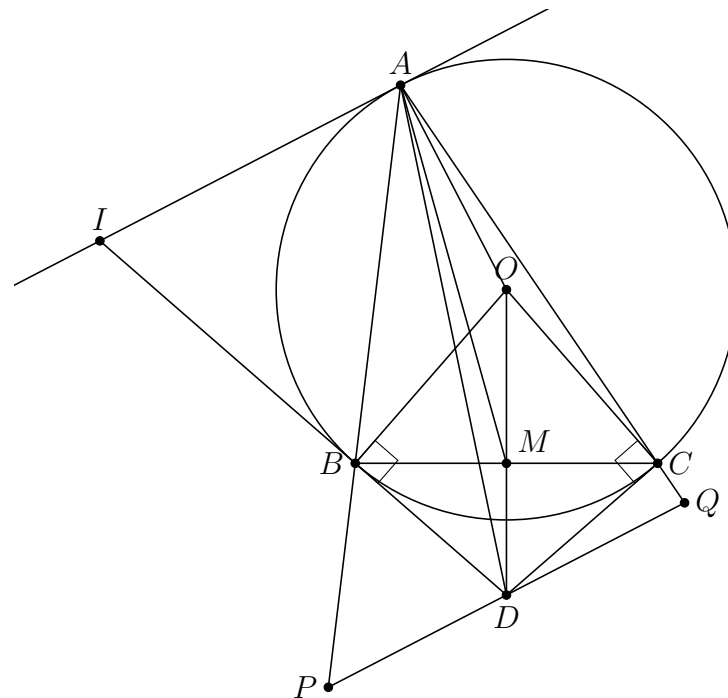
Vậy vận tốc lúc đầu là 36 km/h.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có bán kính $R = 3$ cm. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại D .

- Chứng minh tứ giác $OBCD$ nội tiếp đường tròn
- Gọi M là giao điểm của BC và OD . Biết $OD = 5$ cm. Tính diện tích tam giác BCD .
- Kẻ đường thẳng d đi qua D và song song với đường tiếp tuyến với (O) tại A , d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P và Q . Chứng minh $AB \cdot AP = AQ \cdot AC$
- Chứng minh góc $\widehat{PAD} = \widehat{MAC}$

Lời giải.



- $\widehat{OBD} = 90^\circ$, $\widehat{OCD} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)
 $\Rightarrow \widehat{OBD} + \widehat{OCD} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $OBDC$ nội tiếp.
- $OB = OC$, $DB = DC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
 $\Rightarrow OD$ là trung trực của $BC \Leftrightarrow OD \perp BM$.
 $\triangle OBD$ vuông tại B , đường cao BM
 $\Rightarrow OB^2 = OM \cdot OD \Rightarrow OM = \frac{9}{5} \Rightarrow MD = \frac{16}{5}$.
 $BM^2 = OM \cdot MD = \frac{144}{25} \Rightarrow BM = \frac{12}{5} \Rightarrow BC = 2BM = \frac{24}{5}$.
 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot MD = \frac{192}{25} \text{ cm}^2$.
- Gọi Ax là tiếp tuyến của (O) tại A .
 $d \parallel Ax \Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{BPQ}$ (so le trong)
 Mà $\widehat{xAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BPQ}$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AQP \Rightarrow \frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AP}.$$

d) Gọi I là giao điểm hai tiếp tuyến tại A và B của (O) suy ra $IA = IB$.

$$\triangle AIB \sim \triangle PDB \Rightarrow \frac{AI}{PD} = \frac{IB}{DB} \Rightarrow DB = DP.$$

Tương tự $DC = DQ$. Mặt khác $DB = DC \Rightarrow DP = DQ \Rightarrow D$ là trung điểm của PQ

Xét $\triangle AQP$ và $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC}$ chung; $\widehat{ACB} = \widehat{APQ}$ (vì cùng bằng $\widehat{ABI}$)

$$\Rightarrow \triangle AQP \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{QP}{BC} = \frac{PD}{CM}.$$

$$\text{Xét } \triangle APD \text{ và } \triangle ACM \text{ có } \widehat{APD} = \widehat{ACM} \text{ và } \frac{AP}{AC} = \frac{PD}{CM} \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle ACM$$

$$\Rightarrow \widehat{PAD} = \widehat{MAC}.$$

□

————— HẾT —————

89 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, BÌNH PHƯỚC

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Tính giá trị của các biểu thức

a) $M = \sqrt{36} + \sqrt{25}$.

b) $N = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} - \sqrt{5}$.

Lời giải.

a) $M = \sqrt{6^2} + \sqrt{5^2} = 6 + 5 = 11$.

b) $N = |\sqrt{5} - 1| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} = -1$.

□

Câu 2. Cho biểu thức $P = 1 + \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị của x , biết $P > 3$.

Lời giải.

a) Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Ta có $P = 1 + \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \sqrt{x}$.

b) $P > 3 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$.

Kết hợp điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$ ta có nghiệm của bất phương trình là $x > 4$.

Vậy với $x > 4$ thì $P > 3$.

□

Câu 3. Cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -x + 2$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

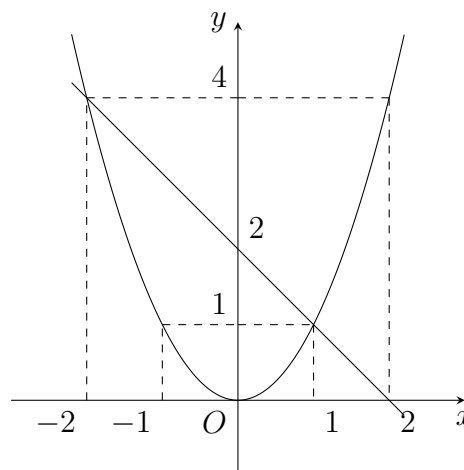
b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Lời giải.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy .

Trên đường thẳng d ta lấy 2 điểm $(0; 2)$ và $(2; 0)$.

Trên parabol (P) ta lấy các điểm $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$.



b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) , ta có

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 4. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là $(1; 1)$ và $(-2; 4)$. □

Câu 4. Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ y = 2x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; -4)$. □

Câu 5. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). (1)

- Giải phương trình với $m = 2$.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 3)(x_2^2 - 2mx_2 - 2) = 50.$$

Lời giải.

- Thay $m = 2$ vào phương trình (1) ta có phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$.
 Vì $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.
- Phương trình (1) có hai nghiệm

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (m - 1)^2 \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m .

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + 2m - 1 = 0 \\ x_2^2 - 2x_2 + 2m - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 1. \end{cases}$$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} (x_1^2 - 2mx_1 + 3)(x_2^2 - 2mx_2 - 2) = 50 &\Leftrightarrow (4 - 2m)(-2m - 1) = 50 \\ &\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{2} \\ m = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy với } \begin{cases} m = \frac{9}{2} \\ m = -3 \end{cases} \text{ thỏa mãn điều kiện bài toán.}$$

□

Câu 6. Quãng đường AB dài 50 km. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ A đến B . Vận tốc xe thứ nhất lớn hơn vận tốc xe thứ hai 10 km/h, nên xe thứ nhất đến B trước xe thứ hai 15 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải.

Gọi vận tốc của xe thứ nhất là x (km/h) ($x > 10$).

Nên vận tốc xe thứ hai là $x - 10$ (km/h).

Thời gian xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{50}{x}$ (h).

Thời gian xe thứ hai đi từ A đến B là $\frac{50}{x-10}$ (h).

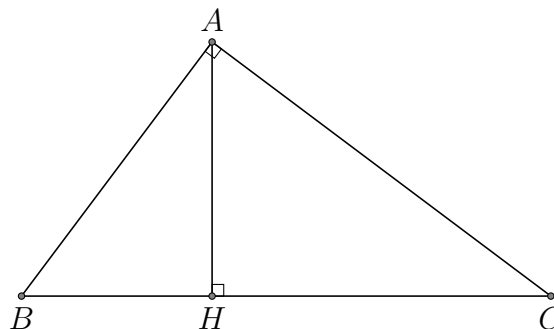
Vì xe thứ nhất đến B trước xe thứ hai 15 phút là $\frac{1}{4}$ (h) nên ta có phương trình

$$\frac{50}{x-10} - \frac{50}{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 10x - 2000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ x = -40. \end{cases}$$

Vậy vận tốc của xe thứ nhất là 50 (km/h) và vận tốc xe thứ hai là 40 (km/h). □

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$). Biết $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , BH , CH và AH .

Lời giải.



Tính AB : Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABC tại A ta có $AB = 6$.

Tính BH : $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = 3,6$ (cm).

Tính CH : $CH = 10 - 3,6 = 6,4$ (cm).

Tính AH : $AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow AH = 4,8$ (cm). □

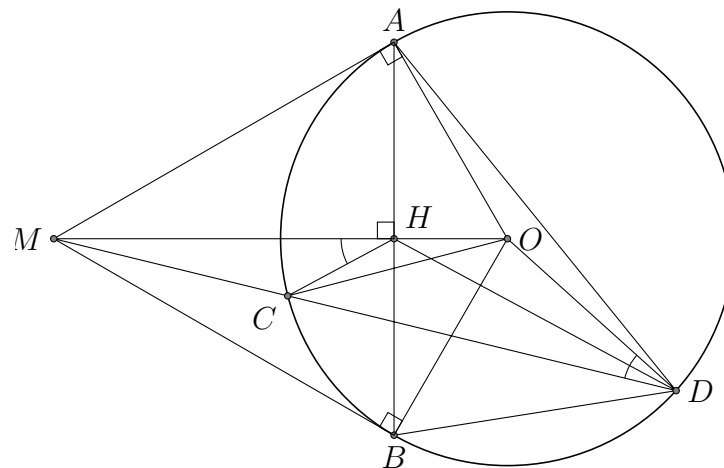
Câu 8. Cho đường tròn tâm (O) , từ điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm), kẻ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D ; O và B nằm về hai phía so với cát tuyến MCD).

a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Chứng minh $MB^2 = MC \cdot MD$.

c) Gọi H là giao điểm của AB và OM . Chứng minh AB là phân giác của $\widehat{CHD}$.

Lời giải.



- a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$ (do MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O)).

Xét tứ giác $OAMB$ có $\widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $OAMB$ nội tiếp.

- b) Chứng minh $MB^2 = MC \cdot MD$.

Xét tam giác MBC và tam giác MDB có

- $\widehat{BMD}$ chung.
- $\widehat{MBC} = \widehat{MDB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn cung BC).

$$\Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle MDB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MB^2 = MC \cdot MD.$$

- c) Gọi H là giao điểm của AB và OM . Chứng minh AB là phân giác của $\widehat{CHD}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MA = MB \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \\ OA = OB = R \end{cases}$$

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$.

Xét tam giác vuông OMB có $MB^2 = MH \cdot MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

$$\text{Mà } MB^2 = MC \cdot MD \text{ (cmt)} \Rightarrow MH \cdot MO = MC \cdot MD \Rightarrow \frac{MC}{MO} = \frac{MH}{MD}.$$

$$\text{Xét } \triangle MCH \text{ và } \triangle MOD \text{ có } \widehat{OMD} \text{ chung và } \frac{MC}{MO} = \frac{MH}{MD} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle MCH \sim \triangle MOD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO} \text{ (hai góc tương ứng).} \quad (1)$$

Mà $\widehat{MHC} + \widehat{OHC} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $OHCD$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

$$\Rightarrow \widehat{OHD} = \widehat{OCD} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } OD). \quad (2)$$

$$\text{Mà } \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \widehat{MDO} \text{ (tam giác } OCD \text{ cân tại } O). \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{OHD} \Rightarrow 90^\circ - \widehat{MHC} = 90^\circ - \widehat{OHD} \Rightarrow \widehat{CHB} = \widehat{BHD}.$$

Vậy BH là tia phân giác của góc $\widehat{CHD}$ hay AB là tia phân giác của góc $\widehat{CHD}$.

□

————— HẾT —————

90 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, CẦN THƠ**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****I. PHẦN TRẮC NGHIỆM****Câu 1.** Điều kiện của x để $\sqrt{4-x}$ có nghĩa là

(A) $x \geq 4$.

(B) $x \geq \frac{1}{4}$.

(C) $x \leq \frac{1}{4}$.

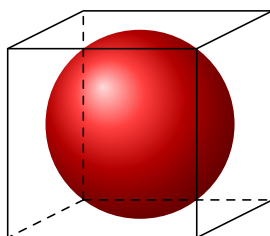
(D) $x \leq 4$.

Lời giải.

$\sqrt{4-x}$ xác định $\Leftrightarrow 4-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 2. Một quả bóng rổ có dạng hình cầu được đặt vừa khít vào trong một chiếc hộp hình lập phương (như hình bên dưới). Biết nửa chu vi đáy của hình lập phương bằng 48 cm. Diện tích bề mặt của quả bóng rổ bằng

(A) $144\pi \text{ cm}^2$.

(B) $768\pi \text{ cm}^2$.

(C) $576\pi \text{ cm}^2$.

(D) $2304\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải.

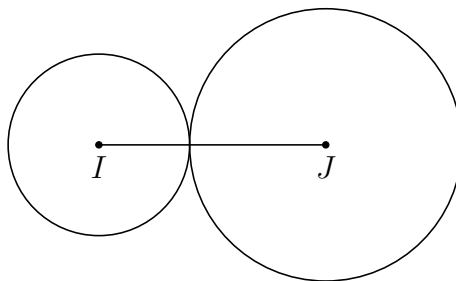
Cạnh hình lập phương là $\frac{48}{2} = 24 \text{ cm}$.

Do quả bóng rổ đặt vừa khít chiếc hộp nên bán kính của quả bóng rổ là 12 cm.

Vậy diện tích bề mặt quả bóng rổ bằng $4\pi \cdot 12^2 = 576\pi \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 3. Cho hai đường tròn $(I; 2 \text{ cm})$ và $(J; 3 \text{ cm})$ tiếp xúc ngoài nhau (như hình bên dưới). Độ dài đoạn nối IJ bằng

(A) 1 cm.

(B) 5 cm.

(C) 10 cm.

(D) 13 cm.

Lời giải.

Độ dài đoạn nối tâm IJ bằng $2 + 3 = 5 \text{ cm}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 4. Giá trị của biểu thức $\sqrt{49} - \sqrt{\frac{225}{16}}$ bằng

(A) $-\frac{13}{4}$.

(B) $\frac{13}{4}$.

(C) $-\frac{43}{4}$.

(D) $\frac{43}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{49} - \sqrt{\frac{225}{16}} = 7 - \frac{15}{4} = \frac{13}{4}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 5. Trong một đường tròn, xét các khẳng định sau:

- a) Đường kính là dây cung lớn nhất.
- b) Dây nhỏ hơn thì gần tâm hơn.
- c) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- d) Tiếp tuyến vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

Số khẳng định đúng là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

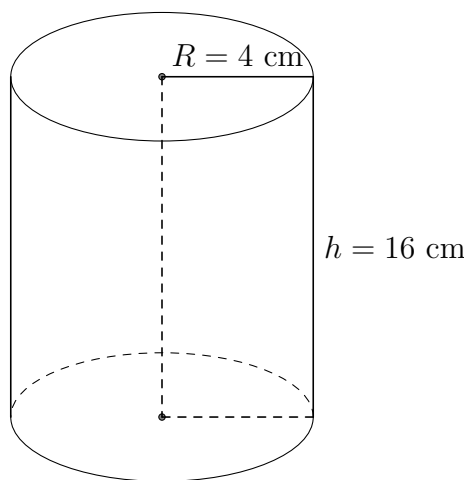
Khẳng định (I), (III), (IV) đúng. Khẳng định (II) sai vì dây lớn hơn thì gần tâm hơn.

Vậy có 3 khẳng định đúng.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 6. Cho hình trụ (T) có bán kính đáy bằng 4 cm và chiều cao bằng 16 cm (như hình bên dưới). Thể tích hình trụ (T) bằng



(A) $\frac{64\pi}{3} \text{ cm}^3$.

(B) $\frac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$.

(C) $256\pi \text{ cm}^3$.

(D) $64\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải.

Diện tích hình trụ (T) bằng $\pi R^2 h = 256\pi \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 7. Cho đường tròn ($O; r$) có chu vi bằng 16π cm. Diện tích của hình tròn ($O; r$) bằng

(A) $16\pi \text{ cm}^2$.

(B) $8\pi \text{ cm}^2$.

(C) $64\pi \text{ cm}^2$.

(D) $256\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn là $r = \frac{1}{2\pi} \cdot 16\pi = 8 \text{ cm}$.

Diện tích hình tròn bằng $\pi r^2 = 64\pi \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 8. Cặp số $(-3; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình

☐ **A** $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$
 ☒ **B** $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = -9 \end{cases}$
 ☐ **C** $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$
 ☐ **D** $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 3y = -9 \end{cases}$

Lời giải.

Thế $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ lần lượt vào các hệ phương trình.

Suy ra cặp số $(-3; 2)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = -9 \end{cases}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 9. Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc nhất?

☐ **A** $y = 2x^2$.
 ☐ **B** $y = -\frac{1}{x}$.
 ☒ **C** $y = -x + 2$.
 ☐ **D** $y = -3x^2$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x + 2$ là hàm số bậc nhất vì có dạng $y = ax + b$ với $a = -1 \neq 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 10. Giá trị của tham số m sao cho hai hệ phương trình $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + my = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

tương đương với nhau là

☒ **A** $m = 1$.
 ☐ **B** $m = -1$.
 ☐ **C** $m = -2$.
 ☐ **D** $m = 2$.

Lời giải.

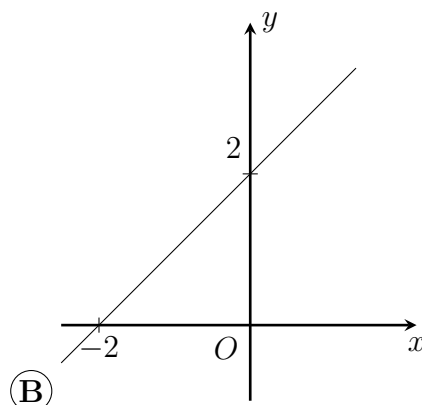
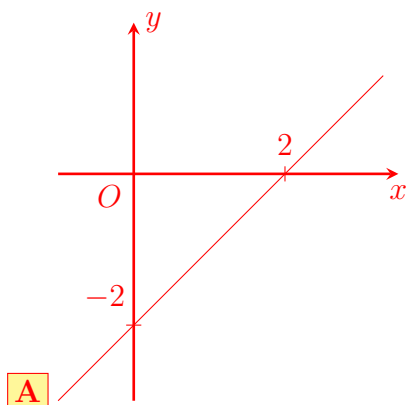
Hệ $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

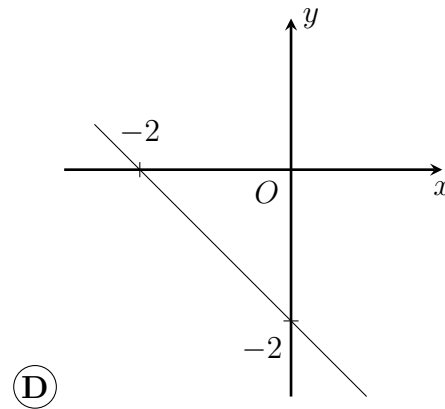
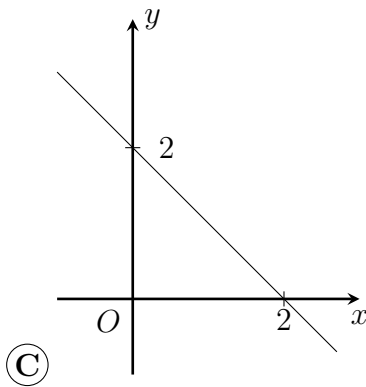
Thế $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ vào hệ $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + my = 3 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} 1 - 2 = -1 \\ 1 + 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **A** □

Câu 11. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x - 2$





Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x - 2$ là một đường thẳng đi qua điểm $(0; -2)$ và $(2; 0)$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 12. Sau giờ tan học, hai nhóm bạn cùng nhau đi ăn phở và uống trà xanh tại cùng một quán ăn. Nhóm I ăn 4 tô phở, uống 3 chai trà xanh và trả hết 185000 đồng. Nhóm II ăn 5 tô phở, uống 2 chai trà xanh và trả hết 205000 đồng. Giá tiền của mỗi tô phở và mỗi chai trà xanh lần lượt là

(A) 35000 đồng và 15000 đồng.

(B) 45000 đồng và 15000 đồng.

(C) 15000 đồng và 35000 đồng.

(D) 40000 đồng và 20000 đồng.

Lời giải.

Gọi x (đồng), y (đồng) lần lượt là giá tiền của mỗi tô phở và mỗi chai trà xanh ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Nhóm I ăn 4 tô phở, uống 3 chai trà xanh và trả hết 185000 đồng nên ta có $4x + 3y = 185000$ (1).

Nhóm II ăn 5 tô phở, uống 2 chai trà xanh và trả hết 205000 đồng nên ta có $5x + 2y = 205000$ (2).

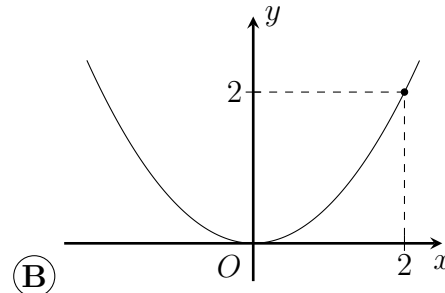
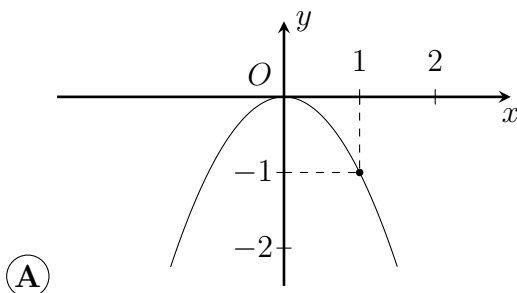
Từ (1), (2) ta có hệ

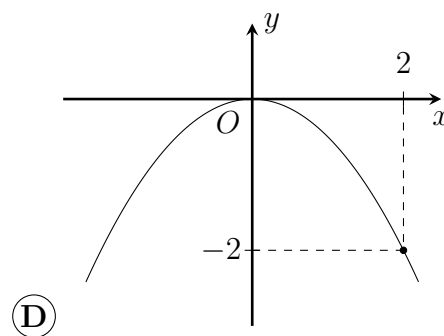
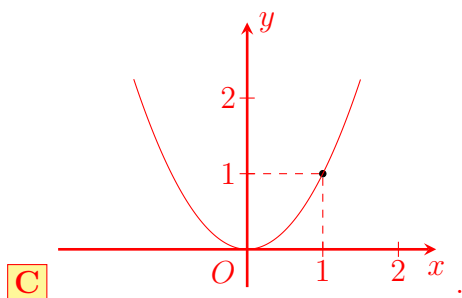
$$\begin{cases} 4x + 3y = 185000 \\ 5x + 2y = 205000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35000 \\ y = 15000. \end{cases}$$

Vậy giá tiền mỗi tô phở là 35000 đồng, giá tiền mỗi chai trà xanh là 15000 đồng.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 13. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^2$?



**Lời giải.**

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là một parabol đi qua gốc tọa độ O và qua điểm $(1; 1), (-1; 1)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 14. Tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$ là

(A) $S = \{1; 2\}$.

(B) $S = \{-2; 1\}$.

(C) $S = \{-2; -1\}$.

(D) $S = \{-1; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = 9 > 0$.

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = 1, x_2 = -2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2; 1\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 15. Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc hai?

(A) $y = \frac{3}{x^2}$.

(B) $y = \frac{2}{x}$.

(C) $y = x + 3$.

(D) $y = -\frac{3}{4}x^2$.

Lời giải.

Hàm số $y = -\frac{3}{4}x^2$ là hàm số bậc hai vì có dạng $y = ax^2 + bx + c$ với $a = -\frac{3}{4} \neq 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 16. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 13$ cm. Giá trị của $\sin C$ bằng

(A) $\frac{5}{12}$.

(B) $\frac{1}{13}$.

(C) $\frac{12}{13}$.

(D) $\frac{5}{13}$.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A nên ta có $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 17. Trong một đường tròn, khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

(B) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90° .

(C) Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

(D) Số đo của góc nội tiếp bằng số đo của cung bị chắn.

Lời giải.

Khẳng định “Số đo của góc nội tiếp bằng số đo của cung bị chắn” **sai** vì số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 18. Giá trị của x thỏa mãn $\sqrt{8-4x} = 2$ là

(A) $x = -\frac{3}{2}$.

(B) $x = 1$.

(C) $x = -1$.

(D) $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

ĐK: $8 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương

$$8 - 4x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

So sánh điều kiện ta được $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. Một hàm số bậc nhất được cho bằng bảng bên dưới. Hàm số đó là hàm số nào sau đây?

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1	-3

(A) $y = 3x + 1$.

(B) $y = -2x + 1$.

(C) $y = -3x + 1$.

(D) $y = 2x + 1$.

Lời giải.

Thế lần lượt $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$ vào $y = -2x + 1$ ta được $y = 5, y = 3, y = 1, y = -1, y = -3$.

Vậy $y = -2x + 1$ là hàm số cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 20. Hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = -1 \end{cases}$ có nghiệm là

(A) $(-2; 1)$.

(B) $(2; -1)$.

(C) $(2; 1)$.

(D) $(-2; -1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (-2; 1)$.

Chọn đáp án **(A)** □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 > 0$.

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{3+5}{4}, x_2 = \frac{3-5}{4} \text{ hay } x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$. □

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 9x + 3y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 11x = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (3; -2)$. □

Bài 3. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \\ &= \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} + \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} \\ &= \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{5} + 2 \\ &= |2 - \sqrt{5}| + \sqrt{5} + 2 \\ &= \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

□

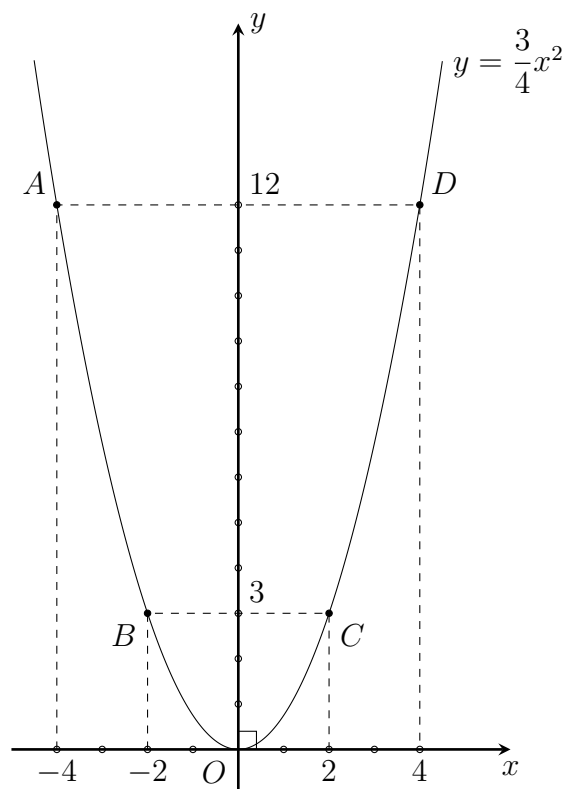
Bài 4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{4}x^2$.

Lời giải.

Ta có bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
y	12	3	0	3	12

Đồ thị hàm số $y = \frac{3}{4}x^2$ là một parabol đi qua gốc tọa độ O và đi qua các điểm $A(-4; 12)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 3)$, $D(4; 12)$.



□

Bài 5. Khi thực hiện xây dựng trường điển hình đổi mới năm 2017, hai trường trung học cơ sở A và B có tất cả 760 học sinh đăng ký tham gia nội dung hoạt động trải nghiệm. Đến khi tổng kết, số học sinh tham gia đạt tỷ lệ 85% so với số đã đăng ký. Nếu tính riêng thì tỷ lệ học sinh tham gia của trường A và trường B lần lượt là 80% và 89,5%. Tính số học sinh ban đầu đăng ký tham gia của mỗi trường.

Lời giải.

Gọi số học sinh trường A đăng ký hoạt động là x (học sinh), ($x < 760, x \in \mathbb{N}^*$).

Gọi số học sinh trường B đăng ký hoạt động là y (học sinh), ($y < 760, y \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó tổng số học sinh hai trường đăng kí là $x + y = 760$. (1)

Số học sinh hai trường tham gia là $760 \cdot \frac{85}{100} = 646$ (học sinh).

Số học sinh trường A tham gia là $80\%x = \frac{4}{5}x$ (học sinh).

Số học sinh trường B tham gia là $89,5\%y = \frac{179}{200}y$ (học sinh).

Theo đề bài ta có phương trình $\frac{4}{5}x + \frac{179}{200}y = 646$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 760 \\ \frac{4}{5}x + \frac{179}{200}y = 646 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 760 \\ 160x + 179y = 129200 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 160x + 160y = 121600 \\ 160x + 179y = 129200 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 19y = 7600 \\ x = 760 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 360 \\ y = 400. \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ta được số học sinh trường A và trường B đăng ký hoạt động lần lượt là 360 (học sinh) và 400 (học sinh). $\square$

Bài 6. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $2x^2 - (m+5)x - 3m^2 + 10m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 = 4$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (m+5)^2 - 8(-3m^2 + 10m - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow 25m^2 - 70m + 49 > 0$$

$$\Leftrightarrow (5m - 7)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{7}{5}.$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+5}{2} \\ x_1x_2 = \frac{-3m^2 + 10m - 3}{2}. \end{cases}$$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 = 4 \\ \Leftrightarrow &(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 = 4 \\ \Leftrightarrow &(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4 \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{m+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+5}{2}\right) - \frac{-3m^2 + 10m - 3}{2} = 4 \\ \Leftrightarrow &7m^2 - 12m + 5 = 0 \Leftrightarrow (7m - 5)(m - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow &m = \frac{5}{7} \text{ hoặc } m = 1. \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ta được $m = \frac{5}{7}$ hoặc $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán. $\square$

Bài 7. Cho đường tròn tâm O và điểm P nằm ngoài (O). Vẽ tiếp tuyến PC của (O) (C là tiếp điểm) và cát tuyến PAB ($PA < PB$) sao cho các điểm A, B, C nằm cùng phía so với đường thẳng PO . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD là đường kính của (O).

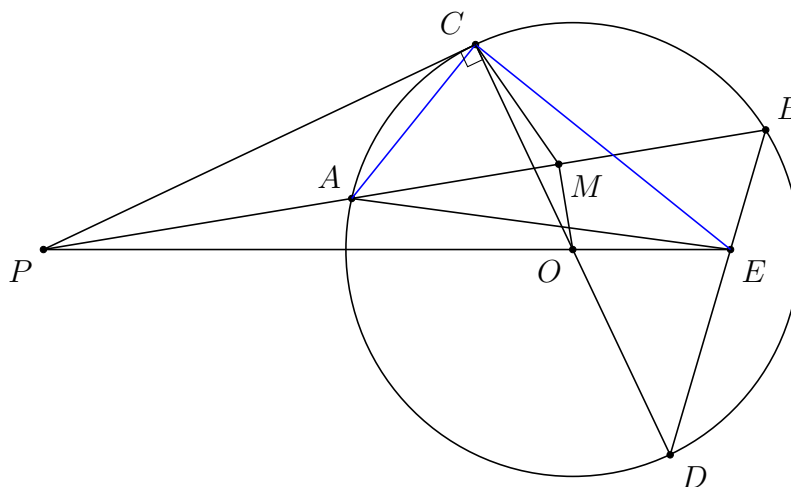
a) Chứng minh tứ giác $PCMO$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng PO với đường thẳng BD . Chứng minh

$$AM.DE = AC.DO.$$

c) Chứng minh đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng CA .

Lời giải.



a) Chứng minh tứ giác $PCMO$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có M là trung điểm của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ (tính chất đường kính và dây cung).
 $\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{PMO} = 90^\circ$.

Lại có PC là tiếp tuyến của (O) tại C nên $\widehat{PCO} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $PCMO$ có $\widehat{PMO} = \widehat{PCO} = 90^\circ$.

Mà C và M là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh PO dưới một góc vuông.

Nên $PCMO$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AM \cdot DE = AC \cdot DO$.

Vì $PCMO$ nội tiếp nên $\widehat{POC} = \widehat{PMC}$ (cùng chắn cung PC).

Mà $\widehat{DOE} = \widehat{POC}$ (đối đỉnh).

Nên $\widehat{DOE} = \widehat{AMC}$ (cùng bằng $\widehat{POC}$).

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle DEO$ có

$\widehat{DOE} = \widehat{AMC}$ (cmt),

$\widehat{ODE} = \widehat{CAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC của đường tròn (O)).

Do đó $\triangle ACM \sim \triangle DEO$ (g-g).

$\Rightarrow \frac{AC}{DE} = \frac{AM}{DO} \Rightarrow AM \cdot DE = AC \cdot DO$.

c) Chứng minh đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng CA .

Ta có $\triangle ACM \sim \triangle DEO$ (cmt).

$\Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{OD}{AM} = \frac{2OD}{2AM} = \frac{CD}{AB}$.

Xét $\triangle DEC$ và $\triangle ACB$ có

$\frac{DE}{AC} = \frac{DC}{AB}$ (cmt)

$\widehat{EDC} = \widehat{BAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn chung BC)

Do đó $\triangle DEC \sim \triangle ACB$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{CBA}$ (hai góc tương ứng).

Lại có $\widehat{CBA} = \widehat{PCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung CA).

$$\Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{PCA} \text{ (cùng bằng } \widehat{CBA}\text{)}.$$

Mặt khác $\widehat{PCA} + \widehat{ACO} = 90^\circ$ (GT)

$$\Rightarrow \widehat{DCE} + \widehat{ACO} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{ACE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AC \perp CE.$$

□

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. B	4. B	5. D
6. C	7. C	8. B	9. C	10. A
11. A	12. A	13. C	14. B	15. D
16. D	17. D	18. B	19. B	20. A

91 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, CAO BẰNG**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** Thực hiện phép tính $5\sqrt{16} - 18$.**Lời giải.**Ta có $5\sqrt{16} - 18 = 5 \cdot 4 - 18 = 2$. □**Câu 2.** Cho hàm số $y = 3x$. Hàm số trên là hàm số đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$? Vì sao?**Lời giải.**Do hàm số trên là hàm số bậc nhất với hệ số $a > 0$ nên hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R}$. □**Câu 3.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + y = -3. \end{cases}$$
Lời giải.Cộng hai phương trình trong hệ vế với vế ta được $3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.Với $x = 1$ thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $y = -5$.Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -5)$. □**Câu 4.** Giải phương trình $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.**Lời giải.**Phương trình đã cho tương đương với $(x^2 + 1)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. □**Câu 5.** Trong lúc học nhóm, bạn Nam yêu cầu bạn Linh và bạn Mai mỗi người chọn một số tự nhiên sao cho hai số này hơn kém nhau là 6 và tích của chúng phải bằng 280. Vậy hai bạn Linh và Mai phải chọn những số nào?**Lời giải.**Giả sử số bạn Linh chọn là số lớn hơn. Gọi số bạn Linh chọn là x ($x \in \mathbb{N}, 6 < x < 280$).Khi đó số bạn Mai chọn là $x - 6$. Theo bài ra ta có phương trình

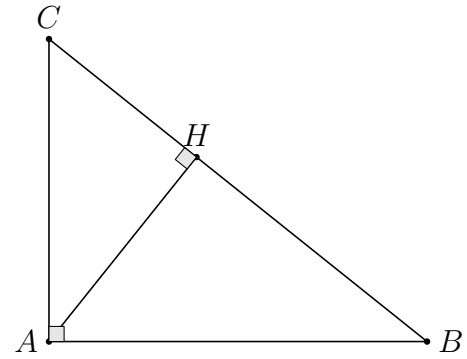
$$\begin{aligned}
 x(x - 6) = 280 &\Leftrightarrow x^2 - 6x - 280 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 20)(x + 14) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 20 = 0 \\ x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -14 \text{ (loại)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy số bạn Linh chọn là 20, số bạn Mai chọn là 14, hoặc số bạn Linh chọn là 14 và số bạn Mai chọn là 20. □**Câu 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $BC = 10$ cm, $AC = 8$ cm.a) Tính cạnh AB .b) Kẻ đường cao AH . Tính BH .**Lời giải.**

a)

Áp dụng định lý Pi-ta-go trong tam giác vuông ABC , ta có $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2$
 $\Rightarrow AB = 6$ cm.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ,
 ta có $AB^2 = BH \cdot BC$
 $\Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6$ cm.



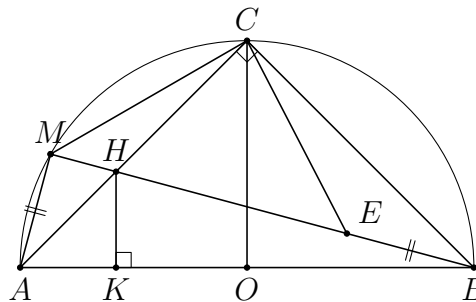
□

Câu 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Gọi C là điểm chính giữa của cung AB , M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M không trùng với A và C), BM cắt AC tại H . Từ H kẻ HK vuông góc với AB tại K .

a) Chứng minh $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác MCE là tam giác vuông cân.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BCH} = \widehat{BCA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Lại có $\widehat{BKH} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{BCH} + \widehat{BKH} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BEC$, ta có
$$\begin{cases} AM = BE \\ AC = BC \\ \widehat{MAC} = \widehat{EBC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC).} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle BEC$ (c.g.c), suy ra $MC = EC \Rightarrow \triangle CME$ cân tại C .

Do $\triangle ACB$ vuông cân tại $C \Rightarrow \widehat{CAB} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{CME} = \widehat{CAB} = 45^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC).

Do đó $\widehat{CME} = \widehat{CEM} = 45^\circ \Rightarrow \triangle MCE$ vuông cân tại C .

□

Câu 8. Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (với m là tham số). Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}.$$

Lời giải.

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2 \geq 0 \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Khi đó áp dụng hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x_1 x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 x_2 + 1)} = \frac{2x_1 x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} \\ &= \frac{2(m - 1) + 3}{m^2 + 2} \\ &= \frac{2m + 1}{m^2 + 2}. \end{aligned}$$

Mà ta có $2P + 1 = 2 \cdot \frac{2m + 1}{m^2 + 2} + 1 = \frac{(m + 2)^2}{m^2 + 2} \geq 0$ vì $(m + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow P \geq -\frac{1}{2}$.

Vậy min $P = -\frac{1}{2}$, xảy ra khi $m = -2$. □

————— **HẾT** —————

92 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, ĐẮK LẮK

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Tìm x biết $2\sqrt{x} = 3$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$. Ta có

$$2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Vậy $x = \frac{9}{4}$. □

Câu 2. Giải phương trình $43x^2 - 2018x + 1975$.

Lời giải.

Để thấy phương trình có tổng các hệ số $a + b + c = 43 - 2018 + 1975 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{1975}{43}.$$
□

Câu 3. Cho hàm số $y = (a + 1)x^2$. Tìm a để hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

Lời giải.

Hàm số $y = (a + 1)x^2$ nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0 \Leftrightarrow a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$. □

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ (1), m là tham số.

a) Tìm m để $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1).

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Lời giải.

a) Ta có $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1) khi

$$\begin{aligned} 2^2 - 2(m + 1) \cdot 2 + m^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 2 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - (m^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m + 1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 2. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + x_2^2 = 10 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \\
 &\Leftrightarrow [2(m+1)]^2 - 2(m^2 + 2) = 10 \\
 &\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ m + 5 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \text{ (loại)}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm. □

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các đường thẳng có phương trình $(d_1): y = x + 2$, $(d_2): y = -2$, $(d_3): y = (k+1)x + k$. Tìm k để các đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2. \end{cases}$

Do đó ba đường thẳng trên đồng quy khi (d_3) đi qua điểm $(-4; -2)$.

Suy ra $-2 = -4(k+1) + k \Leftrightarrow 3k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$. □

Câu 6. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3} \quad (x \geq 0, x \neq 1).$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3} \\
 &= \frac{-(x+\sqrt{x}+1) + x+2 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{3(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{3}{x+\sqrt{x}+1}.
 \end{aligned}$$

Vì $x + \sqrt{x} + 1 \geq 1, \forall x \geq 0$ nên $A = \frac{3}{x+\sqrt{x}+1} \leq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

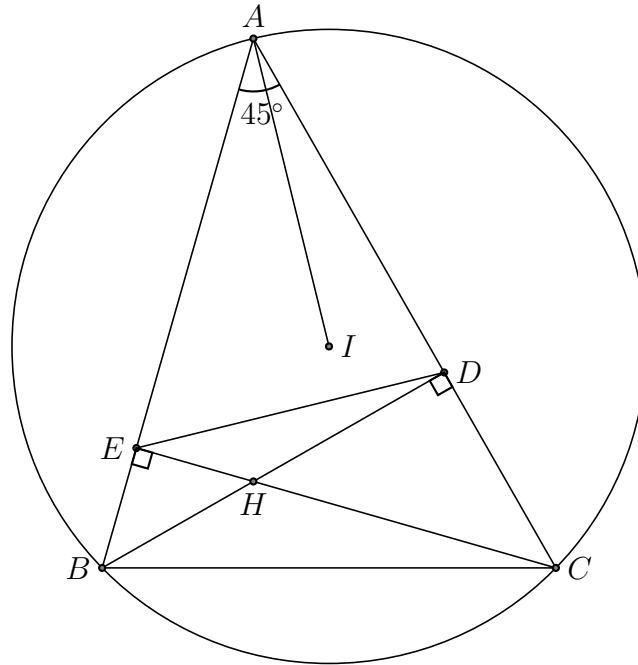
Vậy $\max A = 3$ khi $x = 0$. □

Câu 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $\hat{A} = 45^\circ$. Gọi D, E lần lượt là các hình chiếu vuông góc của B, C lên AC, AB ; H là giao điểm của BD và CE .

a) Chứng minh tứ giác $BECD$ nội tiếp.

- b) Chứng minh $DE \cdot AB = BC \cdot AD$ và tính tỉ số $\frac{ED}{BC}$.
 c) Chứng minh $HE + HD = BE + CD$.
 d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Chứng minh $AI \perp DE$.

Lời giải.



- a) Theo giả thiết $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$. Khi đó tứ giác $BECD$ có đỉnh E và D cùng nhìn cạnh BC dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $BECD$ nội tiếp.
 b) Tứ giác $BECD$ nội tiếp nên $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BED}$).
 Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$ có $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ và $\hat{A}$ chung nên $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.
 Do đó $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow DE \cdot AB = BC \cdot AD$.
 Từ $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$.
 Vì $\triangle ABD$ vuông tại D nên ta có
 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \cos \widehat{BAD} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 c) $\triangle ABD$ vuông tại D và $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên $\widehat{ABD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EBH} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \triangle EBH$ vuông cân tại $E \Rightarrow HE = BE$ (1).
 Chứng minh tương tự $\triangle CDH$ vuông cân tại $D \Rightarrow HD = CD$ (2).
 Từ (1) và (2) suy ra $HE + HD = BE + CD$.
 d) Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ nên I là giao điểm của ba đường trung trực $\triangle ABC$.
 Ta có I thuộc trung trực của AC ; E thuộc trung trực của AC (vì $\triangle AEC$ vuông cân tại E)
 suy ra $EI \perp AC \Rightarrow EI \perp AD$ (3).
 Chứng minh tương tự $DI \perp AB \Rightarrow DI \perp AE$ (4).
 Từ (3) và (4) suy ra I là trực tâm của $\triangle AED \Rightarrow AI \perp DE$.

□

Câu 8. Cho n là số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$Q = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} + \frac{101}{n+1}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{2}{n(n+1)}} \\ &= \sqrt{1 + \left[\frac{1}{n(n+1)}\right]^2 + \frac{2}{n(n+1)}} \\ &= \sqrt{\left[1 + \frac{1}{n(n+1)}\right]^2} \\ &= 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} Q &= \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{101}{n+1} \\ &= n + 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{101}{n+1} = n + 1 + \frac{100}{n+1}. \end{aligned}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta có

$$Q = n + 1 + \frac{100}{n+1} \geq 2\sqrt{(n+1) \cdot \frac{100}{n+1}} = 20.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $n + 1 = \frac{100}{n+1} \Leftrightarrow n = 9$.

Vậy min $Q = 20$ khi $n = 9$.

□

———— **HẾT** ————

93 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

NỘI DUNG ĐỀ

Bài 1. Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

Lời giải.

$$A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}.$$

□

Bài 2. Cho $a \geq 0, a \neq 4$. Chứng minh $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2} + \frac{2(\sqrt{a} - 2)}{a - 4} = 1$.

Lời giải.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2} + \frac{2(\sqrt{a} - 2)}{a - 4} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) + 2(\sqrt{a} - 2)}{a - 4} = \frac{a - 2\sqrt{a} + 2\sqrt{a} - 4}{a - 4} = \frac{a - 4}{a - 4} = 1.$$

□

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 2x + 3y = 24. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 2x + 3y = 24. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 28 \\ 2x + 3y = 24. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 2x + 3y = 24. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 2x + 3 \cdot 4 = 24. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 6. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (6; 4)$.

□

Bài 4. Giải phương trình $4x + \frac{3}{x - 1} = 11$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1$.

$$4x + \frac{3}{x - 1} = 11 \Leftrightarrow \frac{4x(x - 1) + 3}{x - 1} = \frac{11(x - 1)}{x - 1} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 3 = 11x - 11 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 14 = 0.$$

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 14 = 1 > 0.$$

Suy ra

$$x_1 = \frac{15 + 1}{2 \cdot 4} = 2 \quad (\text{chọn}); \quad x_2 = \frac{15 - 1}{2 \cdot 4} = \frac{7}{4} \quad (\text{chọn}).$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{2; \frac{7}{4}\right\}$.

□

Bài 5. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và $y = x - 4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Gọi A và B là các giao điểm của đồ thị hai hàm số trên. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB , với O là gốc tọa độ (đơn vị đo trên các trục tọa độ là cen-ti-mét).

Lời giải.

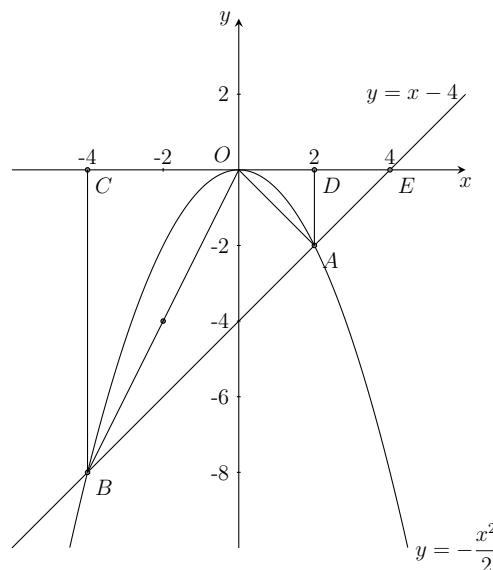
• $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-8	-2	0	-2	-8

• $y = x - 4$

x	0	4
$y = x - 4$	-4	0

Đồ thị



Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho

$$-\frac{x^2}{2} = x - 4 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4. \end{cases}$$

• $x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(2; -2).$

• $x = -4 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow B(-4; -8).$

Gọi các điểm $C(-4; 0), D(2; 0), E(4; 0).$

Xét tam giác OAE có $AD = OD = DE = 2$ cm nên tam giác OAD vuông tại A . Suy ra $OA \perp BE$.

Tam giác OAB vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB có tâm là trung điểm cạnh OB và bán kính $R = \frac{OB}{2}$.

Xét tam giác OCB vuông tại C có

$$OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $R = \frac{OB}{2} = 2\sqrt{5}$. □

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + 2(m - 1)x + 4m - 11 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $2(x_1 - 1)^2 + (6 - x_2)(x_1 x_2 + 11) = 72$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 - (4m - 11) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 3)^2 + 3 > 0 \quad (\text{đúng với mọi } m \in \mathbb{R}).$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-1) \\ x_1 x_2 = 4m - 11. \end{cases}$$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2(m-1)x + 4m - 11 = 0$ nên ta có

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 4(m-1)x_1 + 8m - 22 = 0 \\ x_2^2 + 2(m-1)x_2 + 4m - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1^2 = -4(m-1)x_1 - 8m + 22 \\ x_2^2 = -2(m-1)x_2 - 4m + 11. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & 2(x_1 - 1)^2 + (6 - x_2)(x_1 x_2 + 11) = 72 \\ \Leftrightarrow & 2x_1^2 - 4x_1 + 2 + 6x_1 x_2 + 66 - x_1 x_2^2 - 11x_2 - 72 = 0 \\ \Leftrightarrow & -4(m-1)x_1 - 8m + 22 - 4x_1 + 2 + 6x_1 x_2 + 66 - x_1(-2(m-1)x_2 - 4m + 11) - 11x_2 - 72 = 0 \\ \Leftrightarrow & -4mx_1 + 4x_1 - 8m + 22 - 4x_1 + 2 + 6x_1 x_2 + 66 + 2(m-1)x_1 x_2 + 4mx_1 - 11x_1 - 11x_2 - 72 = 0 \\ \Leftrightarrow & -11(x_1 + x_2) + (2m+4)x_1 x_2 - 8m + 18 = 0 \\ \Leftrightarrow & 22(m-1) + (2m+4)(4m-11) - 8m + 18 = 0 \\ \Leftrightarrow & 22m - 22 + 8m^2 - 6m - 44 - 8m + 18 = 0 \\ \Leftrightarrow & 8m^2 + 8m - 48 = 0 \\ \Leftrightarrow & m^2 + m - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & m^2 - 2m + 3m - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & m(m-2) + 3(m-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (m+3)(m-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m = -3 \\ m = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = -3$ hoặc $m = 2$. □

Bài 7. Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 17 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 7 cm. Tính diện tích của tam giác vuông đó.

Lời giải.

Gọi độ dài một cạnh góc vuông lớn hơn của tam giác vuông là x (cm). ($7 < x < 17$)

Khi đó cạnh góc vuông còn lại của tam giác vuông đó là $x - 7$ (cm).

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông này, ta có

$$\begin{aligned} x^2 + (x - 7)^2 &= 17^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 49 &= 289 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 14x - 240 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x - 15)(x + 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 15 = 0 \\ x + 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 & (\text{chọn}) \\ x = -8 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy diện tích của tam giác vuông đó là

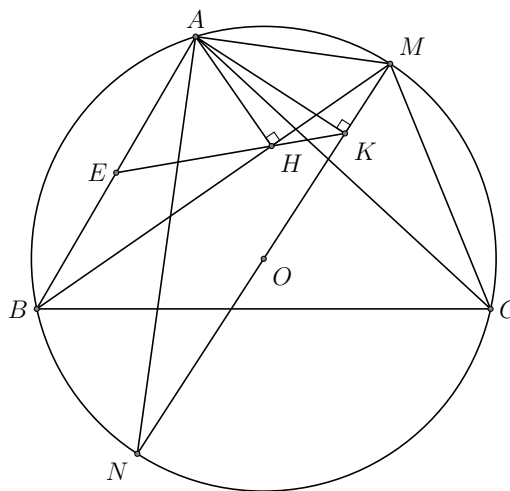
$$\frac{1}{2}x(x - 7) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (15 - 7) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

□

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O có $AB < AC$. Trên cung nhỏ $\widehat{AC}$ lấy điểm M khác A thỏa $MA < MC$. Vẽ đường kính MN của đường tròn (O) và gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB, MN . Chứng minh rằng

- Bốn điểm A, H, K, M cùng nằm trên một đường tròn.
- $AH \cdot AK = HB \cdot MK$.
- Khi điểm M di động trên cung nhỏ $\widehat{AC}$ thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



- Xét tứ giác $AHKM$ có $\widehat{AHM} = \widehat{AKM} = 90^\circ$ (gt).

Suy ra H, K cùng nhìn cạnh AM dưới một góc vuông.

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp. Hay bốn điểm A, H, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

- b) Xét đường tròn (O) có $\widehat{ABM} = \widehat{ANM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AM}$). (1)

Ta có $\widehat{MAN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{MAK}$ (cùng phụ với $\widehat{AMK}$). (2)

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MAK}$ hay $\widehat{ABH} = \widehat{MAK}$.

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle MAK$ có

$$\widehat{AHB} = \widehat{MKA} \quad (= 90^\circ)$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{MAK} \quad (\text{cmt})$$

Suy ra $\triangle AHB \sim \triangle MAK$ (g-g)

Suy ra $\frac{AH}{MK} = \frac{HB}{KA} \Leftrightarrow AH \cdot AK = HB \cdot MK$.

- c) Gọi E là giao điểm của HK và AB .

Ta có

$$\widehat{MAK} = \widehat{MHK} \quad (\text{hai góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{MK}).$$

$$\widehat{MHK} = \widehat{EHB} \quad (\text{hai góc đối đỉnh}).$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{MAK} \quad (\text{cmt})$$

Suy ra $\widehat{ABH} = \widehat{EBH}$ hay $\widehat{EHB} = \widehat{EBH}$.

Suy ra $\triangle EBH$ cân tại E .

Suy ra $EH = EB$. (3)

Mặt khác, ta có

$$\widehat{EAH} + \widehat{EBH} = 90^\circ$$

$$\widehat{EHA} + \widehat{EHB} = 90^\circ$$

$$\widehat{EBH} = \widehat{EHB}$$

Suy ra $\widehat{EAH} = \widehat{EHA}$

Suy ra $\triangle EAH$ cân tại E .

Suy ra $EH = EA$. (4)

(3), (4) $\Rightarrow EA = EB \Rightarrow E$ là trung điểm của AB . Mà A, B cố định nên E cố định.

Vậy khi điểm M di động trên cung nhỏ $\widehat{AC}$ thì đường thẳng HK luôn đi qua trung điểm E của đoạn thẳng AB .

□

———— HẾT ————

94 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, ĐIỆN BIÊN**◇◇◇◇ NỘI DUNG ĐỀ ◇◇◇◇****Câu 1.** Giải phương trình $5(x + 1) = 3x + 7$.**Lời giải.**

Ta có

$$5(x + 1) = 3x + 7 \Leftrightarrow 5x + 5 = 3x + 7 \Leftrightarrow 5x - 3x = 7 - 5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$. □**Câu 2.** Giải phương trình $x^4 - x^2 - 12 = 0$.**Lời giải.**Đặt $t = x^2$, với $t \geq 0$. Ta được phương trình

$$\begin{aligned} t^2 - t - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3t - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow t(t - 4) + 3(t - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 4)(t + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t - 4 = 0 \\ t + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 & (\text{nhận}) \\ t = -3 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 4$ ta được

$$x^4 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2, x = -2$. □**Câu 3.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 2m - 1 \\ x + 2y = 3m + 2. \end{cases}$ a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$.b) Tìm m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$.**Lời giải.**a) Thay $m = 1$ vào hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x + 2(3x - 1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy khi $m = 1$ hệ phương trình đã cho có nghiệm $(1; 2)$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 3x - y = 2m - 1 \\ x + 2y = 3m + 2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 3x - 2m + 1 \\ x + 2(3x - 2m + 1) = 3m + 2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 3x - 2m + 1 \\ x + 6x - 4m + 2 = 3m + 2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 7x = 7m \\ y = 3x - 2m + 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = m \\ y = m + 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm $(m; m + 1)$ với mọi m .

Theo đề bài nghiệm $(x; y)$ này thỏa mãn

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 = 10 & \Leftrightarrow m^2 + (m + 1)^2 = 10 \\
 & \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 9 = 0 \\
 & \Leftrightarrow 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{19}{2} \\
 & \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{19}{4} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} m + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{19}}{2} \\ m + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{19}}{2} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{19}}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{2}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 4. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}, \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A - 9\sqrt{x}$.

Lời giải.

a) Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$ ta có

$$A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}.$$

b) Với điều kiện $x > 0$, $x \neq 1$ ta có

$$P = A - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \left(9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow 9\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 6.$$

Như vậy $P \leq -5$. Đẳng thức xảy ra khi $9\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ hay $x = \frac{1}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là -5 khi $x = \frac{1}{9}$.

□

Câu 5. Một chiếc bè trôi từ bến sông A đến bến B với vận tốc dòng nước là 4 km/h, cùng lúc đó một chiếc thuyền chạy từ bến A đến B rồi quay lại ngay thì gặp chiếc bè tại vị trí C cách bến A là 8 km. Tính vận tốc thực của thuyền biết khoảng cách giữa hai bến A và B là 24 km.

Lời giải.

Gọi vận tốc thực của thuyền là x km/h, vận tốc xuôi dòng của thuyền là $(x + 4)$ km/h, vận tốc ngược dòng của thuyền là $(x - 4)$ km/h.

Điều kiện của x là $x > 4$.

Vì thuyền chạy từ A đến B rồi quay lại ngay thì gặp chiếc bè tại vị trí C cách bến A là 8 km tức là thuyền đi xuôi dòng được 24 km và ngược dòng được $24 - 8 = 16$ km, nên ta có thời gian của thuyền đi đến khi gặp chiếc bè là $\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4}$ giờ.

Thời gian của chiếc bè trôi đến khi gặp thuyền là $8 : 4 = 2$ giờ.

Khi đó ta có phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{24(x-4) + 16(x+4)}{x^2 - 16} = \frac{2(x^2 - 16)}{x^2 - 16} \\ \Leftrightarrow & 24x - 96 + 16x + 64 = 2x^2 - 32 \quad (\text{vì } x > 4) \\ \Leftrightarrow & 2x^2 - 40x = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 & (\text{loại}) \\ x = 20 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc thực của thuyền là 20 km/h.

□

Câu 6. Trong hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = (m - 1)x + m^2 - 2m + 3$, với m là tham số.

a) Chứng minh với mọi giá trị của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Giả sử (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm m để tam giác OAB cân tại O . Khi đó tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 - (m-1)x - m^2 + 2m - 3 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có biệt thức

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(m-1)]^2 - 4(-m^2 + 2m - 3) = 5m^2 - 10m + 13 \\ &= 5(m^2 - 2m + 1) + 8 = 5(m-1)^2 + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Như vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m . Do đó đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .

b) Ta có parabol $(P): y = x^2$ nhận trục Oy làm trục đối xứng.

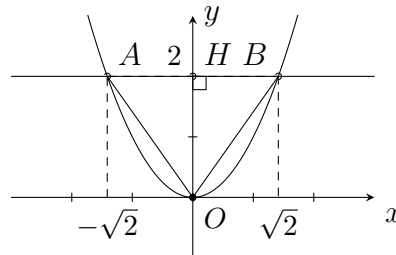
Vì A, B là giao điểm của (d) và (P) , thêm nữa tam giác OAB cân tại O nên $AB \perp Oy$ hay $AB \parallel Ox$, suy ra đường thẳng (d) (đi qua A, B) song song với trục Ox , do đó

$$\begin{cases} m-1=0 \\ m^2-2m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m^2-2m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Với $m=1$ phương trình (1) trở thành

$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Vậy khi $m=1$ đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt là $A(-\sqrt{2}; 2), B(\sqrt{2}; 2)$.



Dựa vào đồ thị ta thấy $AB = |\sqrt{2} - (-\sqrt{2})| = 2\sqrt{2}$, chiều cao $OH = 2$.

Diện tích tam giác OAB là $S_{OAB} = \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}$.

□

Câu 7. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến Ax và By của nửa đường tròn đó lần lượt tại C và D .

- Chứng minh $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- Gọi K là giao điểm của BM với Ax . Chứng minh $\triangle KMO \sim \triangle AMD$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM và BDM .

Lời giải.

Đẳng thức xảy ra khi $MH = R$ hay M là điểm chính giữa $\widehat{AB}$.

Vì OC là tia phân giác của $\widehat{AOM}$ nên $\widehat{AOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOM}$.

Lại có $\widehat{BDO} = \widehat{ODM} = \widehat{ABM} = \frac{1}{2}\widehat{AOM}$.

Suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BDO}$.

Xét hai tam giác OAC và DBO có $\widehat{OAC} = \widehat{OBD} = 90^\circ$ và $\widehat{AOC} = \widehat{BDO}$ nên chúng đồng dạng với nhau.

Suy ra $\frac{OA}{BD} = \frac{CA}{OB}$ hay $OA \cdot OB = CA \cdot BD$.

Diện tích hình thang $CABD$ là

$$S_{CABD} = \frac{(CA + BD) \cdot AB}{2} = (CA + BD) \cdot R.$$

Khi đó

$$S_{CABD} \geq 2\sqrt{CA \cdot BD} \cdot R \Leftrightarrow S_{CABD} \geq 2R\sqrt{OA \cdot OB} \Leftrightarrow S_{CABD} \geq 2R^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $CA = BD$ hay M là điểm chính giữa $\widehat{AB}$.

Vậy $S_{ACM} + S_{BDM}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R^2 - R^2 = R^2$ khi M là điểm chính giữa $\widehat{AB}$. $\square$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(x)$ là một biểu thức đại số xác định với mọi số thực $x \neq 0$. Biết rằng $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, \forall x \neq 0$. Tính $f(2)$.

Lời giải.

Ta có

$$f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \quad (2)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3f\left(\frac{1}{2}\right) + 9f(2) = \frac{3}{4} \quad (3)$$

Trừ theo từng vế đẳng thức (3) cho (2) ta được

$$8f(2) = -\frac{13}{4} \Leftrightarrow f(2) = -\frac{13}{32}.$$

$\square$

Câu 9. Cho ba số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn a là ước của $b + c + bc$, b là ước của $c + a + ca$ và c là ước của $a + b + ab$. Chứng minh a, b, c không đồng thời là các số nguyên tố.

Lời giải.

Giả sử a, b, c đều là các số nguyên tố. Xét các trường hợp sau:

- $a = 2$, b và c là các số nguyên tố lớn hơn 2. Khi đó $b + c + bc$ là một số lẻ (vì b, c cùng lẻ) nên không chia hết cho $a = 2$. Mâu thuẫn với giả thiết a là ước của $b + c + bc$. Vậy a, b, c không đồng thời là các số nguyên tố.

- Với $a, b, c \geq 3$ và a, b, c đôi một khác nhau.

Đặt $a = 3k_1, b = 3k_2 + 1, c = 3k_3 + 2$ với k_1, k_2, k_3 là các số nguyên dương.

Ta có

$$b + c + bc = 3(k_2 + k_3 + 1) + 3(3k_2k_3 + 2k_2 + k_3) + 2$$

$$c + a + ca = 3(k_1 + k_3) + 3(3k_1k_3 + 2k_1) + 2$$

$$a + b + ab = 3(k_1 + k_2) + 3(3k_1k_2 + k_1) + 1.$$

Nên $b + c + bc$ chia cho a dư 2, $c + a + ca$ chia cho b có dư khác 0, $a + b + ab$ chia cho c có dư khác 0. Mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy a, b, c không đồng thời là các số nguyên tố.

□

———— HẾT ————

95 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, ĐỒNG NAI
◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 8. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 5 \\ 5(-3y + 5) - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

□

Câu 2. Giải phương trình $2x^2 + 5x - 7 = 0$.

Lời giải.

Ta có $a + b + c = 2 + 5 + (-7) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -\frac{7}{2}$.

□

Câu 3. Giải phương trình $x^4 + 9x^2 = 0$.

Lời giải.

$$x^4 + 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 + 9 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

□

Câu 4. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = x - 1$ có đồ thị lần lượt là (P) và (d) .

- Vẽ hai đồ thị (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) .

Lời giải.

a) Vẽ đồ thị

- Vẽ đồ thị (P) .

$$\text{Cho } x = \pm 4 \Rightarrow y = 4.$$

$$\text{Cho } x = \pm 2 \Rightarrow y = 1.$$

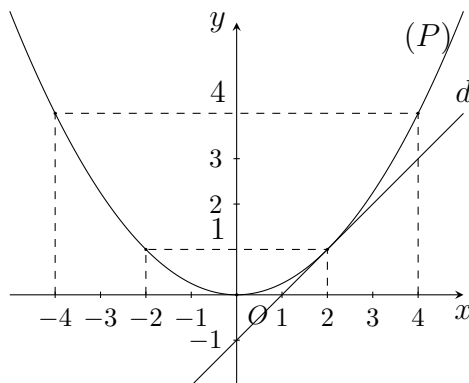
$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

- Vẽ đồ thị (d) .

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow y = -1.$$

$$\text{Cho } x = 1 \Rightarrow y = 0.$$

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{4}x^2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) là $(2; 1)$. □

Câu 5. Rút gọn biểu thức $S = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

Lời giải.

$$S = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2. \quad \square$$

Câu 6. Một xe ô tô và một xe máy khởi hành cùng lúc từ địa điểm A đi đến địa điểm B cách nhau 60 km với vận tốc không đổi, biết vận tốc của xe ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 20 km/giờ và xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải.

Đổi : 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe ô tô là x (km/giờ). Điều kiện $x > 20$.

Vận tốc xe máy là $x - 20$ (km/giờ).

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{60}{x}$ (giờ).

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{60}{x-20}$ (giờ).

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{60}{x} + \frac{1}{2} = \frac{60}{x-20} \Leftrightarrow x^2 - 20x - 2400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \text{ (nhận)} \\ x = -40 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc ô tô là 60 km/giờ và vận tốc xe máy là 40 km/giờ. □

Câu 7. Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 7$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 2m) = -4m + 9$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 9 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$.

Theo Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 3 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 2m. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| = 7 &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 49 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 49 \\ &\Leftrightarrow (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 2m) = 49 \\ &\Leftrightarrow -4m - 40 = 0 \Leftrightarrow m = -10. \end{aligned}$$

Vậy $m = -10$. □

- Chứng minh bốn điểm A, C, H, M cùng thuộc đường tròn và xác định tâm của đường tròn.
- Chứng minh rằng $MA \cdot MB = MD \cdot MH$.
- Gọi E là giao điểm của đường thẳng BD với đường tròn (O) , E khác B . Chứng minh rằng A, H, E thẳng hàng.
- Trên tia đối của tia BA lấy điểm N sao cho $MN = AB$. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của N lên AD và M lên BD . Chứng minh rằng bốn điểm D, P, H, Q nằm trên một đường tròn.

The diagram illustrates a geometric construction involving two intersecting circles with centers \$O\$ and \$M\$. A horizontal line segment \$AB\$ contains both centers. The upper arc of the circle centered at \$O\$ intersects the lower arc of the circle centered at \$M\$ at point \$D\$. A vertical line segment \$MD\$ connects the center \$M\$ to point \$D\$, and it is perpendicular to \$AB\$ at \$M\$. Another line segment \$AD\$ connects point \$A\$ to point \$D\$. A line segment \$MN\$ extends from \$M\$ to the right, passing through point \$B\$. Several other points are marked: \$P\$ is on \$AD\$, \$C\$ is on the circle centered at \$O\$, \$E\$ is on the circle centered at \$M\$, \$Q\$ is on \$BD\$, \$H\$ is on \$MD\$, and \$K\$ is on \$MN\$. Lines connect \$P\$ to \$C\$, \$P\$ to \$H\$, \$C\$ to \$H\$, \$H\$ to \$E\$, \$E\$ to \$Q\$, \$Q\$ to \$H\$, and \$H\$ to \$K\$. Right angle symbols are placed at \$\angle PCO\$, \$\angle CHD\$, and \$\angle HQE\$.

- $$\frac{MA}{MD} = \frac{MH}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MH \cdot MD.$$

- c) Ta có $DH \perp AB, BH \perp AD$ nên H là trực tâm của tam giác ABD , suy ra $AH \perp BD$. (1)
- Mặt khác E nằm trên (O) nên $AE \perp BD$. (2)
- Từ (1) và (2) ta có A, H, E thẳng hàng.

d) Kẻ đường thẳng đi qua H và song song với AB , đường thẳng này cắt NP tại K . Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{PKH} &= \widehat{PNA} \text{ (đồng vị)} \\ &= \widehat{PDH} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAD}).\end{aligned}$$

Suy ra bốn điểm D, P, K, H nằm trên một đường tròn. (3)

Mặt khác $BH \parallel NK, HK \parallel BN$ nên $HKNB$ là hình bình hành, suy ra $HK = BN = AM$ (do $MN = AB$), dẫn tới $AHKM$ là hình bình hành, nên $MK \parallel AH$, do đó M, Q, K thẳng hàng. Từ đó, ta có $\widehat{HKQ} = \widehat{EAM} = \widehat{HDQ}$. Suy ra bốn điểm D, H, Q, K nằm trên một đường tròn. (4)

Từ (3) và (4) ta có bốn điểm D, P, H, Q nằm trên một đường tròn.

□

———— HẾT ————

96 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, HẢI DƯƠNG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Giải phương trình $\frac{3x+1}{2} - x = 1$.

Lời giải.

$$\frac{3x+1}{2} - x = 1 \Leftrightarrow 3x+1-2x=2 \Leftrightarrow x=1.$$

□

Câu 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x = 17 - y \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x = 17 - y \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1+2y) = 17 - y \\ x = 1 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}.$$

□

Câu 3. Tìm m để đường thẳng $d_1: y = (m^2 + 1)x + 2m - 3$ cắt đường thẳng $d_2: y = x - 3$ tại điểm A có hoành độ bằng -1 .

Lời giải.

Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau là $m^2 + 1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Thay $x = -1$ vào hàm số $y = x - 3$ ta được $y = -4$.

Thay $x = -1; y = -4$ vào hàm số $y = (m^2 + 1)x + 2m - 3$ ta được

$$-4 = -m^2 - 1 + 2m - 3 \Leftrightarrow m(m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy, với $m = 2$ thì hai đường thẳng $y = x - 3$ và $y = (m^2 + 1)x + 2m - 3$ cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng -1 .

□

Câu 4. Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 2\sqrt{x} + 1} + 1$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 2\sqrt{x} + 1} + 1 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)^2} + 1 \\ &= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)} + 1 \\ &= \frac{-(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} + 1 = \frac{-\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

□

Câu 5. Quảng đường tỉnh Hải Dương - Hạ Long dài 100 km. Một ô tô đi từ tỉnh Hải Dương đến Hạ Long rồi nghỉ ở đó 8 giờ 20 phút, sau đó trở về tỉnh Hải Dương hết tất cả 12 giờ. Tính vận tốc của ô tô lúc đi, biết vận tốc ô tô lúc về nhanh hơn vận tốc ô tô lúc đi 10 km/h.

Lời giải.

Gọi vận tốc lúc đi của ô tô là x km/h ($x > 0$).

Vận tốc lúc về là $x + 10$ km/h.

Thời gian lúc đi là $\frac{100}{x}$ h.

Thời gian lúc về là $\frac{100}{x + 10}$ h.

Theo đề ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{100}{x} + \frac{100}{x + 10} + \frac{25}{3} &= 12 \\ \Leftrightarrow \frac{100x + 1000}{x(x + 10)} + \frac{100x}{x(x + 10)} &= \frac{11}{3} \\ \Rightarrow 600x + 3000 &= 11x^2 + 110x \\ \Leftrightarrow 11x^2 - 490x - 3000 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = -\frac{60}{11} &\text{ (không thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc của ô tô lúc đi là 50km/h. □

Câu 6. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $|x_1^3 - x_2^3| = 10\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m^2 - m^2 + 2 = 2 > 0$ do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow |x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$.

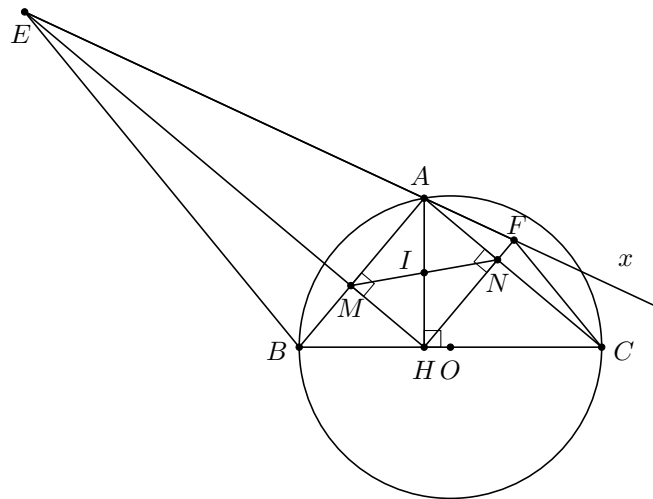
Ta có $|x_1^3 - x_2^3| = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| [(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] = 10\sqrt{2}$
 $\Rightarrow 3m^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \pm 1$. □

Câu 7. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BC . Kẻ $AH \perp BC$ (H thuộc BC), gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC .

- Chứng minh $AC^2 = CH \cdot CB$.
- Chứng minh tứ giác $BCNM$ nội tiếp và $AC \cdot BM + AB \cdot CN = AH \cdot BC$.
- Đường thẳng đi qua A cắt tia HM tại E và cắt tia đối của tia NH tại F . Chứng minh $BE \parallel CF$.

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có $AC^2 = CH \cdot BC$.

- b) Ta có $\widehat{HMA} = \widehat{MAN} = \widehat{ANH} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của AH và MN , khi đó ta có tam giác IAN cân.

Suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{HAN}$.

(1)

Ta lại có $\widehat{ABH} = \widehat{HAN}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$).

(2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{MNA} = \widehat{ABH}$

Mà $\widehat{MNA} + \widehat{MNC} = 180^\circ$, do đó $\widehat{MBC} + \widehat{MNC} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Ta có $MH \parallel AC \Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{HCA}$ (đồng vị).

Suy ra $\triangle BMH \sim \triangle AHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BM}{AH} = \frac{BH}{AC} \Rightarrow AC \cdot BM = BH \cdot AH$.

Chứng minh tương tự $\triangle CNH \sim \triangle AHB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CN}{AH} = \frac{CH}{AB} \Rightarrow CN \cdot AB = AH \cdot CH$.

Từ đó ta có $AC \cdot BM + AB \cdot CN = AH \cdot BC$.

- c) Ta có $HE \parallel AC \Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{NAF}$ (đồng vị). Do đó $\triangle ANF \sim \triangle EMA$ (g.g).

Suy ra $\frac{AN}{ME} = \frac{NF}{AM} \Rightarrow AN \cdot AM = NF \cdot ME$.

Ta có $\widehat{BHM} = \widehat{HCN}$ (chứng minh trên). Do đó $\triangle HNC \sim \triangle BMH$ (g.g)

Suy ra $\frac{BM}{HN} = \frac{MH}{NC} \Rightarrow BM \cdot NC = MH \cdot NH$

Mà $AN \cdot AM = MH \cdot NH \Rightarrow NF \cdot ME = BM \cdot NC$

$\Rightarrow \frac{ME}{NC} = \frac{BM}{NF}$ từ đó ta có $\triangle BME \sim \triangle FNC$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BEM} = \widehat{FCN}$.

Ta lại có $\widehat{CFx} = \widehat{FAC} + \widehat{FCA}$ (góc ngoài của tam giác FAC)

Khi đó $\widehat{CFx} = \widehat{MEA} + \widehat{BEM} = \widehat{BEA}$.

Mặt khác $\widehat{BEA}$ và $\widehat{CFx}$ nằm ở vị trí đồng vị. Do đó $BE \parallel CF$.

□

Câu 8. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $L = \frac{3a^2 - ab + ac}{5a^2 - 3ab + b^2}$.

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } L = \frac{3a^2 - ab + ac}{5a^2 - 3ab + b^2} = \frac{3 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}}{5 - 3\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{3 + x_1 + x_2 + x_1 x_2}{5 + 3x_1 + 3x_2 + (x_1 + x_2)^2}$$

Theo giả thiết ta có $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 \leq 2x_1 \\ x_2^2 \leq 2x_2 \\ x_1 - 2 \leq 0 \\ x_2 - 2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 2(x_1 + x_2) \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} &= \frac{5 + 3(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2}{3 + x_1 + x_2 + x_1 x_2} \\ &\leq \frac{5 + 3(x_1 + x_2) + 2(x_1 + x_2) + 2x_1 x_2}{3 + x_1 + x_2 + 2x_1 x_2} \\ &= \frac{3(3 + x_1 + x_2 + x_1 x_2) - (x_2 - 2)x_1 + 2(x_2 - 2)}{3 + x_1 + x_2 + x_1 x_2} \\ &= 3 - \frac{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}{3 + x_1 + x_2 + x_1 x_2} \leq 3 \text{ (do } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x_1^2 = 2x_1 \\ x_2^2 = 2x_2 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ (loại vì } x_1 \leq x_2) \\ \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $L_{\min} = \frac{1}{3}$ khi $(x_1; x_2) = \{(0; 2), (2; 2)\}$

□

———— HẾT ————

97 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, THÀNH PHỐ HẢI PHÒNG

✧✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧✧

Bài 1. Cho biểu thức

$$A = \sqrt{3} (\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{27}),$$

$$B = \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right) \quad (\text{với } x > 0, x \neq 1).$$

- 1) Rút gọn biểu thức A và B .
- 2) Tìm các giá trị của x sao cho $A \cdot B \leq 0$.

Lời giải.

- 1) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3} (\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{27}) \\ &= \sqrt{3} (\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right) \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= -(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1) \\ &= 1 - x. \end{aligned}$$

- 2) $A \cdot B \leq 0 \Leftrightarrow 3(1 - x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy $x \geq 1$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 2x - 1$ và cắt với trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Xác định a và b .

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 2x - 1$ nên ta có $a = 2$ và $b \neq -1$.

Khi đó, ta có đường thẳng $y = 2x + b$.

Vì đồ thị hàm số $y = 2x + b$ đi qua điểm có tọa độ $(0; 3)$ nên ta có $3 = b$.

Vậy $a = 2$ và $b = 3$. □

Bài 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + \sqrt{y+6} = 11 \\ 5x - \sqrt{y+6} = 13. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $y \geq -6$.

Đặt $b = \sqrt{y+6}$, hệ phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} 3x + b = 11 \\ 5x - b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ b = 2. \end{cases}$$

Với $b = 2$, ta có $\sqrt{y+6} = 2 \Leftrightarrow y+6 = 4 \Leftrightarrow y = -2$ (thỏa điều kiện).

Vậy $(x; y) = (3; -2)$. □

Bài 4. Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0$ (*) (m là tham số).

- Giải phương trình (*) khi $m = 2$.
- Xác định các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 - 2x_2 = -1$.

Lời giải.

- Khi $m = 2$, phương trình (*) trở thành $x^2 - 6x + 5 = 0$ (1).

Vì $1 - 6 + 5 = 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = 5$.

- $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 1) = 2m$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' = 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Với $m > 0$, theo định lí Vi-et, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1. \end{cases}$$

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} x_1 = \frac{4m+3}{3} \\ x_2 = \frac{2m+3}{3}. \end{cases}$$

Khi đó,

$$x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{4m+3}{3} \cdot \frac{2m+3}{3} = m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 - 18m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 18 \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Vậy $m = 18$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 5. Bài toán thực tế: Khoảng cách giữa hai thành phố A và B là 144 km. Một ô tô khởi hành từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi trên cả quãng đường. Sau khi ô tô thứ nhất đi được 20 phút, ô tô thứ 2 cũng đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô thứ nhất là 6 km/h (vận tốc không đổi). Biết rằng cả hai ô tô cùng đến thành phố B cùng một lúc.

- Tính vận tốc của mỗi xe ô tô.
- Nếu trên đường đó có biển báo cho phép xe chạy với vận tốc tối đa là 50km/h thì hai xe ô tô trên, xe nào vi phạm về tốc giới hạn tốc độ?

Lời giải.

- Gọi x (km/h) ($x > 0$) là vận tốc xe ô tô thứ nhất.

y (km/h) ($y > 0$) là vận tốc xe ô tô thứ hai.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{144}{x} - \frac{144}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ \frac{144}{x} - \frac{144}{x+6} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1):

$$\frac{144}{x} - \frac{144}{x+6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + 6x - 2592 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -54 \text{ (loại)} \\ x = 48 \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Với $x = 48$, ta có $y = 54$.

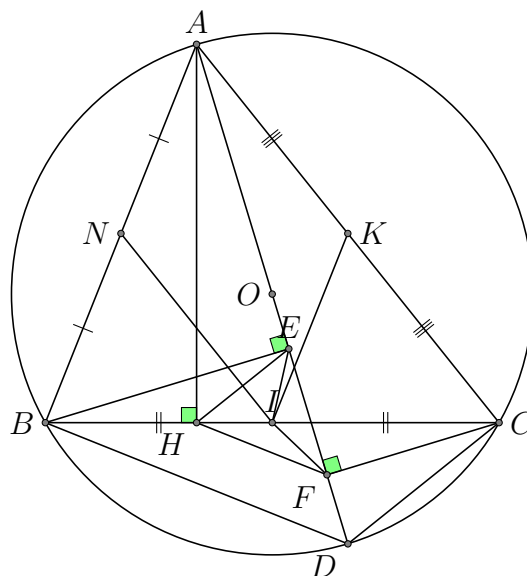
Vậy vận tốc xe ô tô thứ nhất là 48 km/h, vận tốc xe ô tô thứ hai là 54 km/h.

Xe thứ hai vi phạm về giới hạn tốc độ (vì 54 km/h > 48 km/h). □

Bài 6. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , AH là đường cao của tam giác ABC . Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) . Từ hai điểm B và C kẻ $BE \perp AD$ tại E và $CF \perp AD$ tại F .

- Chứng minh tứ giác $ABHE$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh: $HE \parallel CD$.
- Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh: $IE = IF$.

Lời giải.



a)

Xét tứ giác $ABHE$ có $\widehat{AHB} = 90^\circ$ và $\widehat{AEB} = 90^\circ$. Vì hai góc AHB và AEB ở vị trí đối nhau và $\widehat{AHB} + \widehat{AEB} = 180^\circ$ nên tứ giác $ABHE$ là tứ giác nội tiếp.

- b) Vì tứ giác $ABHE$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BAD} = \widehat{CHE}$ (vì cùng bù với góc $\widehat{BHE}$).
 Mặt khác, $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (vì cùng chắn cung BD). Do đó, $\widehat{EHC} = \widehat{HCD}$.
 Vì hai góc EHC và HCD ở vị trí so le trong nên $HE \parallel CD$.
- c) Gọi N và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Khi đó, IN là đường trung bình của tam giác ABC nên $IN \parallel AC$.
 Vì $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \parallel HE \end{cases}$ nên $HE \perp AC$.
 Mặt khác, vì $IN \parallel AC$ nên $HE \perp IN$. Vì tứ giác $ABHE$ nội tiếp đường tròn tâm N và $IN \perp HE$ nên IN là đường trung trực của đoạn thẳng HE . Suy ra, $IE = IH$. (1).
 Tứ giác $AHFC$ có $\widehat{AHC}$ và $\widehat{AFC}$ cùng nhìn cạnh AC dưới một góc 90° nên tứ giác $AHFC$ nội tiếp đường tròn tâm K (vì K là trung điểm của đoạn thẳng AC).
 Khi đó, vì $\widehat{CHF} = \widehat{CAF}$ (cùng chắn cung CF) và $\widehat{CAF} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD) nên $\widehat{CHF} = \widehat{CBD}$. Mặt khác, hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HF \parallel BD$.
 Vì $\begin{cases} AB \perp BD \\ IK \parallel AB \end{cases}$ nên $IK \perp BD$. Mà $HF \parallel BD$ nên $IK \perp HF$.
 Vì tứ giác $AHFC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm K nên IK là đường trung trực của đoạn thẳng HF . Do đó, $IH = IF$ (2).
 Từ (1) và (2), suy ra $IE = IF$.

□

Bài 7. Tính diện tích toàn phần của một hình nón có chiều cao $h = 16$ cm và bán kính đường tròn $r = 12$ cm?

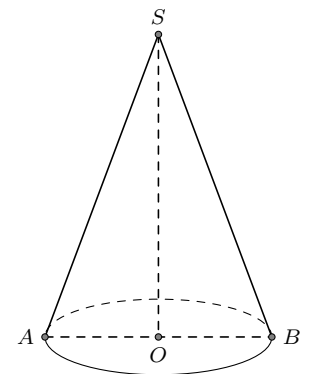
Lời giải.

Gọi l là đường sinh của hình nón.

Ta có $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 20$ cm.

Diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{\text{tp}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r \cdot (l + r) = \pi \cdot 12 \cdot 32 = 384\pi \text{ cm}^2.$$



□

Bài 8.

- a) Chứng minh với mọi số thực a, b, c ta có: $ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3}$.
- b) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = \frac{3}{4}$. Chứng minh:

$$6(x^2 + y^2 + z^2) + 10(xy + yz + zx) + 2\left(\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}\right) \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 ab + bc + ca &\leq \frac{(a + b + c)^2}{3} \\
 \Leftrightarrow 3(ab + bc + ca) &\leq (a + b + c)^2 \\
 \Leftrightarrow ab + bc + ca &\leq a^2 + b^2 + c^2 \\
 \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) &\leq 2(a^2 + b^2 + c^2) \\
 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &\geq 0 \quad (*).
 \end{aligned}$$

Vì bất đẳng thức (*) luôn đúng với mọi số thực a, b, c nên ta có điều phải chứng minh.

b) Trước hết, ta có $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2$, với mọi số dương x, y, z ;
và

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \geq \frac{9}{4(x + y + z)} = 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
 &6(x^2 + y^2 + z^2) + 10(xy + yz + zx) + 2\left(\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}\right) \\
 &= 5(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}\right) \\
 &= 5 \cdot \frac{9}{16} + x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}\right) \\
 &\geq \frac{45}{16} + \frac{1}{3}(x + y + z)^2 + 2 \cdot \frac{9}{4(x + y + z)} \\
 &= \frac{45}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} + 2 \cdot 3 = 9.
 \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z > 0 \\ x + y + z = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{4}.$$

□

———— HẾT ————

98**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, HÀ NAM****◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** Giải phương trình: $x^2 + 6x + 5 = 0$.**Lời giải.**Phương trình đã cho có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a - b + c = 1 - 6 + 5 = 0$.Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = -1$ và $x = -5$. □**Câu 2.** Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 1 = y + 4. \end{cases}$$
Lời giải.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 1 = y + 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ 3x = 30 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ x = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 10 \\ y = 15. \end{cases}$ □**Câu 3.** Rút gọn các biểu thức $A = 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{8} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$.**Lời giải.**Ta có $A = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. □**Câu 4.** Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9}$ với $a \geq 0, a \neq 9$.Rút gọn B . Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên.**Lời giải.**Với $a \geq 0, a \neq 9$, ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{a-9} - \frac{3(\sqrt{a}-3)}{a-9} - \frac{a-2}{a-9} \\ &= \frac{11}{a-9}. \end{aligned}$$

$$B = \frac{11}{a-9} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11 \text{ chia hết cho } a-9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-9=1 \\ a-9=-1 \\ a-9=11 \\ a-9=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ a=8 \\ a=20 \\ a=-2 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy $a \in \{8, 10, 20\}$ thì B nhận giá trị nguyên. □

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng d có phương trình: $y = 5x - m + 2$ (m là tham số).

- Điểm $A(2; 4)$ có thuộc đồ thị hàm số P không? Tại sao?
- Tìm m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2 thỏa mãn $y_1 + y_2 + y_1 y_2 = 25$.

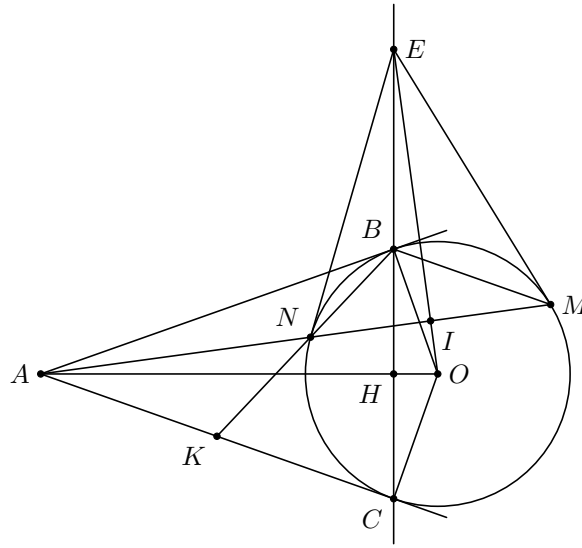
Lời giải.

- Thay tọa độ của A vào phương trình của (P) ta có $4 = 2^2$ (thỏa mãn) $\Rightarrow A(2; 4) \in (P)$.
- Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :
 $x^2 - 5x + m - 2 = 0$, có $\Delta = 25 - 4(m - 2) = 33 - 4m$.
 Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $33 - 4m > 0$ hay $m < \frac{33}{4}$. □

Câu 6. Cho đường tròn (O, R) và một điểm A sao cho $OA = 3R$. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Lấy điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho $BM \parallel AC$. Gọi N là giao điểm thứ hai của của đường thẳng AM với đường tròn (O) , K là giao điểm của hai đường thẳng BN và AC .

- Chứng minh $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $KA^2 = KB \cdot KN$.
- Tính độ dài đoạn thẳng AK theo R .
- Tiếp tuyến tại M và N của (O) cắt nhau tại E . Chứng minh E, B, C thẳng hàng.

Lời giải.



a) AB, AC là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì $BM \parallel AC \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{NAK}$.

Mà $\widehat{BMN} = \widehat{NAK}$ (cùng chắn cung NB) $\Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{ABK}$.

Xét $\triangle KAB$ và $\triangle KNA$ có:

$$\begin{aligned} \widehat{KAN} &= \widehat{ABK} \\ \widehat{AKB} &\text{ chung} \\ \Rightarrow \triangle KAB &\sim \triangle KNA \\ \Rightarrow \frac{KA}{KB} &= \frac{KN}{KA} \Rightarrow KA^2 = KB \cdot KN. \end{aligned}$$

c) Chứng minh tương tự như câu b) suy ra $\triangle \sim \triangle KCN \Rightarrow KC^2 = KB \cdot KN$.

Suy ra $KA = KC = \frac{1}{2}AC$.

Tam giác ACO vuông tại C , suy ra $AC^2 = AO^2 - OC^2 = 8R^2 \Rightarrow AK = R\sqrt{2}$.

d) Gọi H là giao điểm của AO và BC , I là giao điểm của EO và $MN \Rightarrow AO \perp BC$ tại H , $EO \perp NM$ tại I .

$\triangle AOC$ vuông tại C , có CH là đường cao $\Rightarrow OH \cdot OA = OC^2 = R^2$. (1)

$\triangle EMO$ vuông tại M , có MI là đường cao $\Rightarrow OI \cdot OE = OM^2 = R^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OH \cdot OA = OI \cdot OE \Rightarrow \frac{OH}{OI} = \frac{OE}{OA}$.

Xét $\triangle OHE$ và $\triangle OIA$ có:

$$\begin{aligned} \frac{OH}{OI} &= \frac{OE}{OA} \\ \widehat{AOE} &\text{ chung} \\ \Rightarrow \triangle &\sim \triangle OIA \\ \Rightarrow \widehat{OHE} &= \widehat{OIA} = 90^\circ \text{ hay } EH \text{ vuông góc với } AO \text{ tại } H. \end{aligned}$$

Mà $BC \perp AO$ tại H nên E, B, C thẳng hàng.

□

Câu 7. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 4. Chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 8 > 9 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right).$$

Lời giải.

Ta có $a + b + c = 4$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{9}{4-a} - \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{9}{4-b} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{9}{4-c} - \frac{1}{c} \right) < 8.$$

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác

$$\Rightarrow a < b + c \Rightarrow 2a < a + b + c = 4$$

$$\Rightarrow a < 2 \Rightarrow a - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2(a-2) \leq 0 \quad (*) \text{ (luôn đúng)}$$

$$(*) \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 + 5a - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}{a(4-a)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5a-2}{a(4-a)} \leq a$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2(4-a)} - \frac{1}{2a} \leq a \Leftrightarrow \frac{9}{4-a} - \frac{1}{a} \leq 2a \quad (1)$$

Tương tự ta có

$$\frac{9}{4-b} - \frac{1}{b} \leq 2b \quad (2)$$

$$\frac{9}{4-c} - \frac{1}{c} \leq 2c. \quad (3)$$

Cộng hai vế tương ứng của (1), (2) và (3) ta được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{9}{4-a} - \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{9}{4-b} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{9}{4-c} - \frac{1}{c} \right) \leq 2(a+b+c) = 8 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 8 \geq \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$ (vô lý).

Vậy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 8 > \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$.

□

————— **HẾT** —————

99 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, HÀ NỘI

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$.
- 3) Tìm tất cả giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$.

Lời giải.

- 1) Với $x = 9$ ta có $A = \frac{7}{2}$.
- 2) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{3\sqrt{x} + 1 - 2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

- 3) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1} : \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} + 4$.
- $$\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

□

Câu 2. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật theo đơn vị mét.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là x, y ($x \geq y > 0$). Chu vi của mảnh đất là 28 mét nên $x + y = 14 \Leftrightarrow y = 14 - x$. Độ dài đường chéo của mảnh đất là 10 mét nên

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 100 \Leftrightarrow x^2 + (14 - x)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = 6. \end{aligned}$$

Với $x = 8, y = 6$ (thỏa mãn).

Với $x = 6, y = 8$ (loại).

Vậy chiều dài của mảnh đất 8 mét, chiều rộng là 6 mét.

□

Câu 3.

- 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x - |y + 2| = 3 \\ x + 2|y + 2| = 3. \end{cases}$
- 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : y = (m+2)x + 3$ và parabol $(P) : y = x^2$.
 - a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

- b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có các hoành độ là các số nguyên.

Lời giải.

- 1) Ta có

$$\begin{cases} 4x - |y + 2| = 3 \\ x + 2|y + 2| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y + 2| = 4x - 3 \\ x + 2(4x - 3) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ |y + 2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(1; -1)$ và $(1; -3)$.

- 2)

- a) Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 = (m + 2)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - (m + 2)x - 3 = 0$$

Ta có $\Delta = (m + 2)^2 + 12 > 0$ với mọi m nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

- b) Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) thì x_1, x_2 là các hoành độ của các giao điểm của (d) và (P) . Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 \cdot x_2 = -3$. Không mất tổng quát giả sử $x_1 < x_2$, khi đó ta có các trường hợp.

- $x_1 = -3$ và $x_2 = 1 \Rightarrow m = -4$.
- $x_1 = -1$ và $x_2 = 3 \Rightarrow m = 0$.

□

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy S là một điểm bất kì trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn $(O; R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- 1) Chứng minh rằng năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO .
- 2) Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.
- 3) Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC , cắt đường thẳng CD tại K . Chứng minh rằng tứ giác $ADHK$ nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC .
- 4) Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD . Chứng minh rằng khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.

100 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, HÀ TĨNH

- ĐỀ 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn các biểu thức sau

a) $P = \sqrt{45} - \sqrt{5}.$

b) $Q = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 2}\right) : \frac{x}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0$ và $x \neq 4.$

Lời giải.

a) Ta có $P = \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$

b) Ta có $Q = \frac{\sqrt{x} - 2 + 2}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

□

Câu 2.

a) Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$), biết đồ thị của nó đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right).$

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - m = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1 + x_1)^2 + (1 + x_2)^2 = 6.$

Lời giải.

a) Đồ thị của hàm số đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ nên $x = -\frac{1}{3}; y = 1$ thay vào đẳng thức $y = ax^2$ được $a\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 9.$

b) Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Rightarrow (m - 1)^2 - (m^2 - m) \geq 0$
 $\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - m^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1.$

Theo định lý Vi-et thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1 x_2 = m^2 - m. \end{cases}$

Ta có $(1 + x_1)^2 + (1 + x_2)^2 = 6$

$\Leftrightarrow 1 + 2x_1 + x_1^2 + 1 + 2x_2 + x_2^2 = 6$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 4$

$\Rightarrow 4(m - 1)^2 - 2(m^2 - m) + 4(m - 1) = 4$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 2m^2 + 2m + 4m - 4 = 4$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m(m - 2) + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện $m \leq 1$ ta được $m = -1$ thỏa mãn bài toán.

□

Câu 3. Hai người công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 16 giờ. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 2 giờ thì họ làm được $\frac{1}{6}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Lời giải.

Gọi thời gian người công nhân A làm một mình xong công việc là x (giờ) ($x > 6$).

Gọi thời gian người công nhân B làm một mình xong công việc là y (giờ) ($y > 16$).

Mỗi giờ A làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), B làm được $\frac{1}{y}$ (công việc), cả hai người làm được $\frac{1}{16}$ (công việc).

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{16} - \frac{1}{x}$ (1).

Vì A làm 3 giờ và B làm 2 giờ thì họ làm được $\frac{1}{16}$ công việc nên ta có phương trình

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{6} \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được $\frac{3}{x} + \frac{2}{16} - \frac{2}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \Rightarrow x = 24$ thay vào (1) được

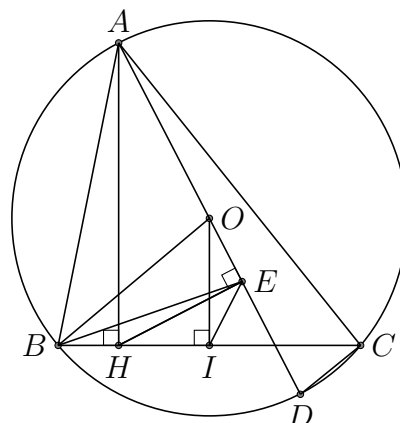
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{16} - \frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \Rightarrow y = 48.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là 24 giờ, người thứ hai là 48 giờ. $\square$

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ đường kính AD của đường tròn (O) , đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC) và BE vuông góc với AD (E thuộc AD).

- Chứng minh rằng tứ giác $AEHB$ nội tiếp.
- Chứng minh $AH \cdot DC = AC \cdot BH$.
- Gọi I là trung điểm BC . Chứng minh rằng $IH = IE$.

Lời giải.



- a) Ta có $BH \perp AE$ (gt) và $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$.

Suy ra đỉnh E, B cùng nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc vuông nên tứ giác $AEHB$ nội tiếp đường tròn.

- b) Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle ACD$ ta có

$$\widehat{AHB} = \widehat{ACD} = 90^\circ$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{ADC} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } AC).$$

$$\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle ACD \text{ (góc - góc)}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{DC}$$

$$\Rightarrow AH \cdot DC = AC \cdot BH.$$

- c) Theo câu a) tứ giác $AEHB$ nội tiếp nên $\widehat{BAD} = \widehat{EHI}$ (cùng bù với $\widehat{BHE}$).

$$\text{Ta có } \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BOD} \text{ (góc nội tiếp, góc ở tâm cùng chắn cung } BD) \Rightarrow \widehat{EHI} = \frac{1}{2}\widehat{BOD} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } IB = IC \text{ (gt)} \Rightarrow OI \perp BC.$$

$$\text{Do đó } \widehat{BIO} = \widehat{BEO} = 90^\circ.$$

Suy ra đỉnh E, I cùng nhìn đoạn BO dưới một góc vuông nên tứ giác $BIEO$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EIC} = \widehat{EHI} + \widehat{IEH}$ (góc ngoài của $\triangle EIH$) (2) .

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EHI} = \frac{1}{2}\widehat{EIC} \Rightarrow \widehat{EIC} = 2\widehat{EHI}$ mà $\widehat{EIC} = \widehat{EHI} + \widehat{IEH}$ (góc ngoài của $\triangle EIH$) $\Rightarrow \widehat{EHI} = \widehat{IEH} \Rightarrow \triangle EIH$ cân tại $I \Rightarrow IH = IE$.

□

Câu 5. Cho a, b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(a+2)(b+2) = \frac{25}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Minicopski ta có

$$P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4} \geq \sqrt{(1+1)^2 + (a^2+b^2)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)^2 + 4}.$$

$$\text{Từ giả thuyết ta có } 2a+2b+ab = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Ta có } a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \quad (1)$$

$$\begin{cases} 4a^2+1 \geq 4a \\ 4b^2+1 \geq 4b \end{cases} \Rightarrow 4a^2+4b^2 \geq 4(a+b)-2 \Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq 2(a+b)-1 \quad (2).$$

$$\text{Cộng các bất đẳng thức (1) và (2) về theo về ta được } \frac{5(a^2+b^2)}{2} \geq ab+2(a+b)-1 = \frac{9}{4}-1 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow P \geq \sqrt{\frac{1}{4}+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Do đó giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ khi và chỉ khi } a=b=\frac{1}{2}.$$

□

———— HẾT ————

101

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, HÀ TĨNH - ĐỀ 2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{75} - \sqrt{3}$.

Lời giải.

$$P = \sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}. \quad \square$$

Câu 2. Rút gọn biểu thức $Q = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{x} - 3}\right) : \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$ với $x > 0$ và $x \neq 9$.

Lời giải.

$$Q = \left(\frac{\sqrt{x} - 3 + 3}{\sqrt{x} - 3}\right) : \frac{x}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad \square$$

Câu 3. Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$, biết đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(\frac{-1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Thay $x = \frac{-1}{2}$, $y = 1$ vào hàm số $y = ax^2$ ta được

$$a \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a = 4.$$

Vậy $a = 4$. $\square$

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$, m là tham số. Tìm giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2 = 14$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 3m) = m^2 \Leftrightarrow m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$. (1)

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3m \end{cases}.$$

Theo bài ra, ta có

$$\begin{aligned} (1+x_1)^2 + (1+x_2)^2 = 14 &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 + 2(x_1+x_2) - 2x_1x_2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 4(m-1) - 2(m^2-3m) - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 & (\text{thỏa mãn điều kiện (1)}) \\ m = -3 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

Vậy giá trị của m cần tìm là $m = 2$.

Câu 5. Hai người công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 8 giờ. Nếu người thứ nhất làm 2 giờ và người thứ hai làm 3 giờ thì họ làm được $\frac{1}{3}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Lời giải.

Gọi thời gian hoàn thành công việc một mình của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là x giờ, y giờ. Trong một giờ người thứ nhất làm một mình được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm một mình được $\frac{1}{y}$ công việc. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 12. \end{cases}$$

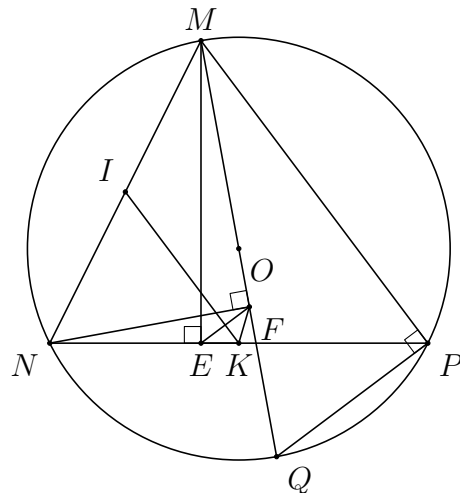
Vậy nếu làm một mình xong công việc thì người thứ nhất hết 24 giờ, người thứ hai hết 12 giờ. $\square$

Câu 6. Cho tam giác MNP có ba góc nhọn, $MN < MP$, nội tiếp đường tròn (O, R) . Vẽ đường kính MQ của đường tròn (O, R) , đường cao ME của tam giác MNP , ($E \in NP$) và NF vuông góc với MQ , ($F \in MQ$).

- Chứng minh tứ giác $MFEN$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $ME \cdot QP = MP \cdot NE$.
- Gọi K là trung điểm của NP , chứng minh $KE = KF$.

Lời giải.

- Từ giả thiết suy ra $\widehat{MEN} = \widehat{MFN} = 90^\circ$, suy ra 2 đỉnh E, F cùng nhìn cạnh MN dưới một góc bằng nhau, do đó tứ giác $MFEN$ nội tiếp đường tròn.
- Xét tam giác $\triangle MEN$ và $\triangle MPQ$ có
 - $\widehat{MEN} = \widehat{MPQ} = 90^\circ$;
 - $\widehat{MNE} = \widehat{MNP} = \widehat{MQP}$ (cùng chắn cung $\widehat{MP}$).



Suy ra $\triangle MEN \sim \triangle MPQ$ (g.g), từ đó ta có $\frac{ME}{NE} = \frac{MP}{QP} \Leftrightarrow ME \cdot QP = MP \cdot NE$.

- Gọi I là trung điểm của MN , khi đó KI là đường trung bình trong tam giác MNP , suy ra $KI \parallel MP$.

Tứ giác $MFEN$ nội tiếp nên $\widehat{FEP} = \widehat{NMF} = \widehat{NPQ} \Rightarrow EF \parallel PQ$.

Do $PQ \perp MP \Rightarrow EF \perp MP \Rightarrow KI \perp EF$.

Vì $\widehat{MEN} = 90^\circ$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MFEN$, lại có $KI \perp EF$ nên KI là đường trung trực của EF . Vậy $KE = KF$. $\square$

Câu 7. Cho x, y là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(x+2)(y+2) = \frac{25}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{1+x^4} + \sqrt{1+y^4}$.

Lời giải.

Bất đẳng thức Minkowski cho 4 số thực a, b, x, y : $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2}$.

Áp dụng BĐT Mincopxki cho 4 số 1, 1, x, y ta có

$$F = \sqrt{1+x^4} + \sqrt{1+y^4} \geq \sqrt{(1+1)^2 + (x^2+y^2)^2} = \sqrt{(x^2+y^2)^2 + 4}.$$

Từ giả thiết ta có $2x + 2y + xy = \frac{9}{4}$.

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy. \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} 4x^2 + 1 \geq 4x \\ 4y^2 + 1 \geq 4y \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 \geq 4(x+y) - 2 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq 2(x+y) - 1. \quad (2)$$

Cộng theo vế các BĐT (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} \frac{5(x^2 + y^2)}{2} &\geq xy + 2(x+y) - 1 \Leftrightarrow \frac{5(x^2 + y^2)}{2} \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow F &\geq \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

$F = \frac{\sqrt{17}}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{\sqrt{17}}{2}$. □

———— **HẾT** ————

102

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, HẬU GI-ANG

NỘI DUNG ĐỀ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = a\sqrt{3} + b$ với a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a^3 + b^3$.

(A) $T = 9$.

(B) $T = 7$.

(C) $T = -9$.

(D) $T = -7$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2} = 2\sqrt{3} - 1$ nên $a = 2, b = -1$. Vậy $T = 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

(A) $(4\sqrt{3} - 7)^{2019} (4\sqrt{3} + 7)^{2018} = -4\sqrt{3} - 7$. (B) $(4\sqrt{3} - 7)^{2019} (4\sqrt{3} + 7)^{2018} = -4\sqrt{3} + 7$.

(C) $(4\sqrt{3} - 7)^{2018} (4\sqrt{3} + 7)^{2019} = 7 - 4\sqrt{3}$. (D) $(4\sqrt{3} - 7)^{2018} (4\sqrt{3} + 7)^{2019} = 4\sqrt{3} + 7$.

Lời giải.

Ta có $(4\sqrt{3} - 7)(4\sqrt{3} + 7) = -1$ nên

$$\begin{aligned} (4\sqrt{3} - 7)^{2018} (4\sqrt{3} + 7)^{2019} &= [(4\sqrt{3} - 7)(4\sqrt{3} + 7)]^{2018} (4\sqrt{3} + 7) \\ &= 4\sqrt{3} + 7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2ax - 3\sqrt{2} = 0$, với a là số thực tùy ý. Tính giá trị biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2$ theo a .

(A) $T = 4a^2 + 6\sqrt{2}$.

(B) $T = 4a^2 - 6\sqrt{2}$.

(C) $T = 4a^2 + 3\sqrt{2}$.

(D) $T = -4a^2 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 = -2a$ và $x_1x_2 = -3\sqrt{2}$. Suy ra

$$T = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 + 6\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $x^2 - 2\sqrt{3}x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

(A) Vô số.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 3 - (m - 3) > 0 \Leftrightarrow m < 6.$$

Suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Giả sử $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}y = -3 \\ 2x + y = 3\sqrt{3} \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

(A) $P = 9$.

(B) $P = 7$.

(C) $P = 3$.

(D) $P = 6$.

Lời giải.

Chia hai vế của phương trình đầu cho $-\sqrt{3}$ rồi cộng với phương trình thứ hai ta được $4y = 4\sqrt{3}$ hay $y = \sqrt{3}$, suy ra $x = \sqrt{3}$. Vậy $P = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = -bx + c$ có đồ thị là đường thẳng d , với a, b là các số thực khác 0. Giả sử đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Chọn khẳng định đúng.

(A) $b^2 - 4ac < 0$.

(B) $b^2 - 4ac > 0$.

(C) $b^2 + 4ac < 0$.

(D) $b^2 + 4ac > 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $ax^2 + bx - c = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hay $b^2 + 4ac = \Delta > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2\sqrt{5}a$, $AC = 5\sqrt{3}a$. Kẻ AK vuông góc với BC , với K nằm trên cạnh BC . Tính AK theo a .

(A) $AK = \frac{19\sqrt{57}}{10}a$.

(B) $AK = \frac{\sqrt{95}}{2}a$.

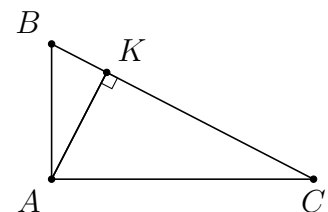
(C) $AK = \frac{10\sqrt{57}}{19}a$.

(D) $AK = \frac{5\sqrt{57}}{19}a$.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$AK = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{10\sqrt{57}}{19}a.$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

(A) Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

(B) Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh tại tiếp điểm, một cạnh là tiếp tuyến và cạnh kia chứa dây cung.

(C) Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn.

(D) Hình thang cân không nội tiếp đường tròn.

Lời giải.

Hình thang cân, chẳng hạn hình vuông, là tứ giác nội tiếp được trong đường tròn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Cho đường tròn tâm O , bán kính $r = 1$, và (O) nội tiếp trong tam giác ABC . Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 3. Tính chu vi c của tam giác ABC .

(A) $c = 2$.

(B) $c = 6$.

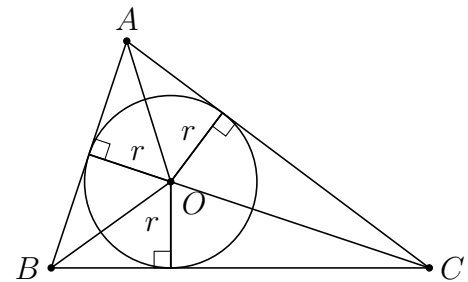
(C) $c = 1$.

(D) $c = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r + \frac{1}{2} \cdot CA \cdot r \\ &= \frac{c}{2}. \end{aligned}$$



Vậy $c = 2S_{ABC} = 6$.

Chọn đáp án **(B)**

□

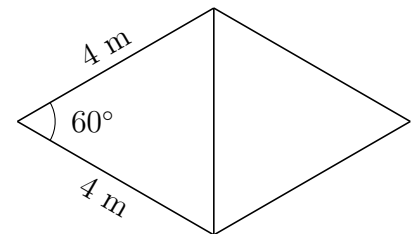
Câu 10. Một sân vườn có dạng hình thoi, có cạnh $a = 4$ m và góc nhọn của hình thoi có số đo bằng 60° . Người ta muốn lát nền cho cái sân vườn này. Giả sử mỗi m^2 tốn chi phí 500 nghìn đồng. Tính số tiền để lát nền sân vườn này (làm tròn đến hàng nghìn).

- (A)** 6.928.000 đồng. **(B)** 13.856.000 đồng. **(C)** 3.464.000 đồng. **(D)** 1.732.000 đồng.

Lời giải.

Để thấy sân vườn là hình thoi, bao gồm hai tam giác đều cạnh 4 m (hình vẽ). Do đó diện tích của sân vườn là

$$S = 2 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}.$$



Số tiền lát nền sân vườn là

$$500.000 \cdot S \approx 6.928.000 \text{ đồng.}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

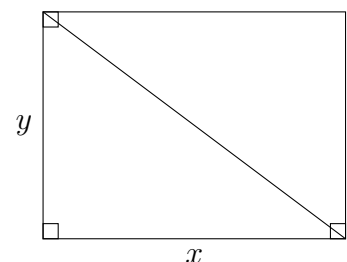
Câu 11. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 14 m và diện tích bằng $12 m^2$. Tính độ dài đường chéo của hình chữ nhật này.

- (A)** 25 m. **(B)** 7 m. **(C)** 5 m. **(D)** 10 m.

Lời giải.

Gọi x (m) và y (m) lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ($x > y > 0$). Khi đó, theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3. \end{cases}$$



Vậy độ dài đường chéo hình chữ nhật là $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$ m.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 12. Trong tháng 5 năm 2018, gia đình anh Tâm (gồm 5 người) đã sử dụng hết $32 m^3$ nước máy. Biết rằng định mức tiêu thụ mỗi người là $4 m^3$ trong một tháng và đơn giá được tính theo bảng sau

Lượng nước sử dụng (m ³)	Giá cước (đồng/m ³)
Đến 4 m ³ /người/tháng	5.300
Trên 4 m ³ /người/tháng đến 6 m ³ /người/tháng	10.200
Trên 6 m ³ /người/tháng	11.400

Biết rằng số tiền phải trả trong hóa đơn bao gồm tiền nước, 5% thuế giá trị gia tăng và 10% phí bảo vệ môi trường của tiền nước. Tính số tiền m mà anh Tâm phải trả theo hóa đơn (làm tròn đến hàng chục).

(A) $m = 248.110$ đồng.

(B) $m = 329.970$ đồng.

(C) $m = 230.800$ đồng.

(D) $m = 265.420$ đồng.

Lời giải.

Trung bình mỗi tháng, một người sử dụng $32 \div 5 = 6,4$ m³ nước. Do đó số tiền chưa tính thuế anh Tâm phải trả là

$$4 \cdot 5.300 + 2 \cdot 10.200 + 0,4 \cdot 11.400 = 230.800 \text{ đồng.}$$

Số tiền anh Tâm phải trả theo hóa đơn là

$$230.800 + 230.800 \cdot 5\% + 230.800 \cdot 10\% = 230.800 \cdot 1,15 = 265.420 \text{ đồng.}$$

Chọn đáp án (D)

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.

- Tính giá trị biểu thức A với $x = \frac{4}{9}$.
- Tìm điều kiện để biểu thức A có nghĩa.
- Tìm x để $A = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{a) Với } x = \frac{4}{9} \text{ ta có } A = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}}} + \frac{\sqrt{\frac{4}{9}}}{\sqrt{\frac{4}{9}} + 1} = \frac{19}{10}.$$

b) Biểu thức A có nghĩa khi $x > 0$.

c) Với $x > 0$, ta có $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}$. Do đó

$$\begin{aligned} A = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x} + 2 = 3x + 3\sqrt{x} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy với } x = 1 \text{ thì } A = \frac{3}{2}.$$

□

Câu 2. Giải phương trình $3x^2 - 2x - 4 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có $\Delta' = (-1)^2 - 3 \cdot (-4) = 13$, do đó phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$ và $x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$. $\square$

Câu 3. Giải phương trình $(2x - 3)^4 - 4(3x - 3)^2 - 21 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = (2x - 3)^2$, $t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4t - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = -3 \quad (\text{loại}). \end{cases}$$

Suy ra

$$(2x - 3)^2 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{7}}{2}; \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \right\}$. $\square$

Câu 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - \frac{2}{y} = 1 \\ 5x + \frac{4}{y} = 19 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện của hệ phương trình $y \neq 0$. Khi đó hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2x - \frac{4}{y} = 2 \\ 5x + \frac{4}{y} = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ \frac{2}{y} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(3; 1)$. $\square$

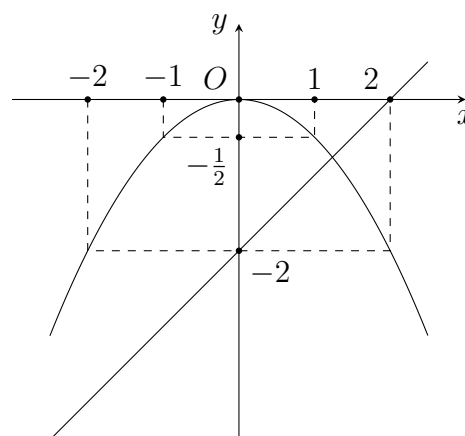
Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = x - 2$ có đồ thị là đường thẳng d . Vẽ đồ thị (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ.

Lời giải.

Bảng một số giá trị tương ứng của x và y của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

Trên mặt phẳng tọa độ, nối các điểm $(-2; -2)$, $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, $(0; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 1)$, $(2; -2)$, ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$. Hai điểm $(0; -2)$ và $(2; 0)$ thuộc đường thẳng d , vẽ đường thẳng đi qua hai điểm này ta được đồ thị hàm số $y = x - 2$. $\square$



Câu 6. Cho hàm số $y = kx + b$ có đồ thị là đường thẳng Δ . Tìm k và b biết đường thẳng Δ có hệ số góc bằng $\sqrt{2}$ và đi qua điểm $M(-\sqrt{2}; 3)$.

Lời giải.

Do đường thẳng Δ có hệ số góc bằng $\sqrt{2}$ nên $k = \sqrt{2}$. Lại có $M \in \Delta$ nên

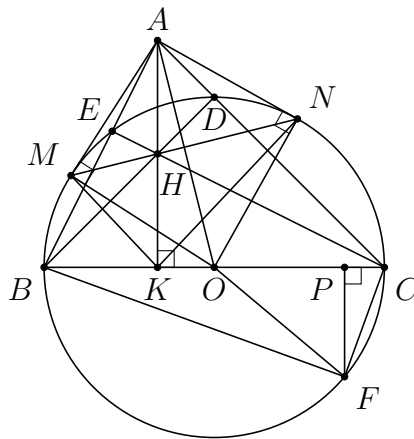
$$3 = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + b \Rightarrow b = 5.$$

Vậy $k = \sqrt{2}$, $b = 5$. □

Câu 7. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và ba góc đều nhọn. Đường tròn tâm O , đường kính BC cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại E và D .

- Giả sử $BC = 6a$. Tính diện tích hình tròn (O) theo a .
- Gọi H là giao điểm của BD và CE , gọi K là giao điểm của AH và BC . Chứng minh rằng AH vuông góc với BC .
- Từ A kẻ các tiếp tuyến AM , AN đến đường tròn (O) với M , N là các tiếp điểm. Chứng minh rằng $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$.
- Giả sử F là điểm di động trên đường tròn (O) . Xác định vị trí của điểm F để tam giác FBC có diện tích lớn nhất.

Lời giải.



- Diện tích hình tròn (O) là $\pi \cdot \frac{BC^2}{4} = 9\pi a^2$.
- Do D, E thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ hay BD, CE là các đường cao của tam giác ABC . Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC . Vì vậy $AH \perp BC$.
- Không mất tính tổng quát, giả sử M và B cùng phía đối với OA . Do AM, AN là các tiếp tuyến với (O) $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$, mà $\widehat{AKO} = 90^\circ$ (chứng minh trên), nên năm điểm A, M, K, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO . Mặt khác do AM, AN là tiếp tuyến với (O) nên $AM = AN$, hay $\widehat{AM} = \widehat{AN}$, do đó $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$.
- Gọi P là hình chiếu của F trên BC . Ta có

$$S_{FBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot FP \leq \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot FO = 3a \cdot 3a = 9a^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $FP = FO \Leftrightarrow FO \perp BC \Leftrightarrow F$ là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ của đường tròn (O) .

Vậy diện tích tam giác FBC đạt giá trị lớn nhất khi F là điểm chính giữa cung BC của đường tròn (O)

□

Câu 8. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \frac{a}{2+bc} + \frac{b}{2+ca} + \frac{c}{2+ab}.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó

$$(a-b)[a(a-c)-b(b-c)]+c(c-a)(c-b) \geq 0$$

hay

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0. \quad (1)$$

Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$, ta có

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=pq-3r, \quad (2)$$

$$a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r. \quad (3)$$

Từ (1) ta có

$$a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a) \geq 0. \quad (4)$$

Thay (2) và (3) vào (4), ta được

$$9r \geq p(4q-p^2). \quad (5)$$

Mặt khác, ta có

$$p^2-2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-2=2q. \quad (6)$$

Thay (6) vào (5), ta được

$$9r \geq p(2p^2-4-p^2)=p^3-4p. \quad (7)$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2S &= a \cdot \frac{2+bc-bc}{2+bc} + b \cdot \frac{2+ca-ca}{2+ca} + c \cdot \frac{2+ab-ab}{2+ab} \\ &= (a+b+c) - abc \left(\frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca} \geq \frac{9}{6+ab+bc+ca},$$

nên

$$2S \leq p - \frac{9r}{6+q}.$$

Nếu $p \leq 2$ thì $2S \leq 2$ hay $S \leq 1$. Xét $p > 2$, kết hợp (7), ta được

$$p - \frac{9r}{6+q} \leq p - \frac{p^3 - 4p}{6 + \frac{p^2 - 2}{2}} = -\frac{(p-2)(p^2 + 4p - 10)}{p^2 + 10} + 2 < 2 \text{ (do } p > 2\text{)}.$$

Do đó ta luôn có $S \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a = 1, b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị. Vậy giá trị lớn nhất của S là 1. □

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. A	4. B	5. D
6. D	7. C	8. D	9. B	10. A
11. C	12. D			

103**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, TP HỒ CHÍ MINH****HẾT**

HoChiMinh.tex

Câu 1. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x - 2$.

- a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ tọa độ.
 b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải.

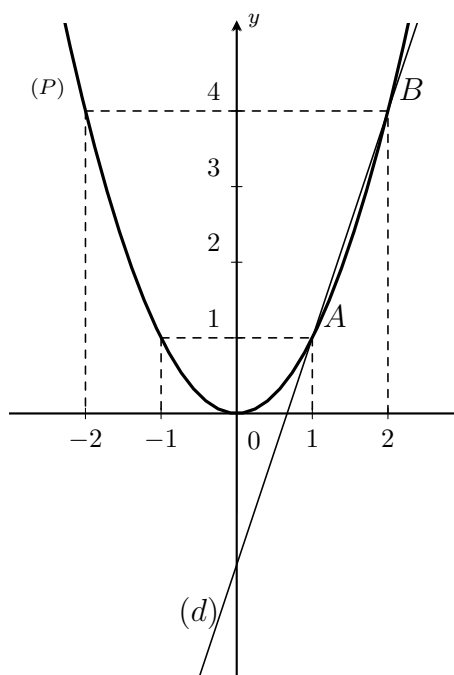
- a) Vẽ đồ thị
- $(P): y = x^2$
- và
- $(d): y = 3x - 2$
- .

Bảng giá trị của hàm số (P) :

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Bảng giá trị của hàm số (d) :

x	0	1
$y = 3x - 2$	-2	1



- b) Phương trình hoành độ giao điểm của
- (d)
- và
- (P)
- :

$$3x - 2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) - (x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 1.$$

Với $x = 2$ thay vào $(d): y = 3x - 2$ ta được $y = 4$.

Với $x = 1$ thay vào (d): $y = 3x - 2$ ta được $y = 1$.

Vậy giao điểm của (P) và (d) là $A(2; 4), B(1; 1)$.

□

Câu 2. Cho phương trình $3x^2 - x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

Lời giải.

Phương trình $3x^2 - x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , theo Định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{3} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{7}{9}$.

□

Câu 3. Mối quan hệ giữa thang nhiệt độ F (Fahrenheit) và thang nhiệt độ C (Celsius) được cho bởi công thức $T_F = 1,8T_C + 32$, trong đó T_C là nhiệt độ tính theo độ C và T_F là nhiệt độ tính theo độ F. Ví dụ $T_C = 0^\circ \text{C}$ tương ứng với $T_F = 32^\circ \text{F}$.

a) Hỏi 25°C tương ứng với bao nhiêu độ F?

b) Các nhà khoa học đã tìm ra mối liên hệ giữa A là số tiếng kêu của một con dế trong một phút và T_F là nhiệt độ cơ thể của nó bởi công thức $A = 5,6T_F - 275$, trong đó nhiệt độ T_F tính theo độ F. Hỏi nếu con dế kêu 106 tiếng trong một phút thì nhiệt độ của nó khoảng bao nhiêu độ C? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải.

a) 25°C tương ứng với độ F

$$T_F = 1,8 \cdot 25 + 32 = 77(^\circ \text{F}).$$

b) Ta có $A = 106$ khi đó nhiệt độ cơ thể của con dế tính theo độ F là

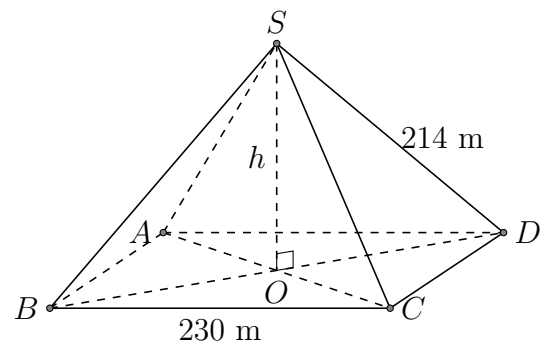
$$A = 5,6T_F - 275 \Rightarrow T_F = \frac{A + 275}{5,6} = \frac{106 + 275}{5,6} \approx 68(^\circ \text{F})$$

Nhiệt độ của con dế tính theo độ C: $(68 - 32) : 1,8 = 20^\circ \text{C}$.

□

Câu 4.

Kim tự tháp Kheops - Ai Cập có dạng hình chóp đều, đáy là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân chung đỉnh (hình vẽ). Mỗi cạnh bên của kim tự tháp dài 214 m, cạnh đáy của nó dài 230 m.



- a) Tính theo mét chiều cao h của kim tự tháp (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

- a) Cho biết thể tích của hình chóp được tính theo công thức $V = \frac{1}{3}S.h$, trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của hình chóp. Tính theo m^3 thể tích của kim tự tháp này (làm tròn đến hàng nghìn).

Lời giải.

- a) Do mặt đáy kim tự tháp là hình vuông nên tam giác BCD vuông cân tại C , do đó theo định lý Pi-ta-go

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{230^2 + 230^2} = 230\sqrt{2} \text{ (m)}.$$

Suy ra

$$OD = \frac{BD}{2} = \frac{230\sqrt{2}}{2} \text{ (m)}.$$

Chiều cao của kim tự tháp là

$$h = SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{214^2 - 26\,450} \approx 139,1 \text{ (m)}.$$

- b) Thể tích của kim tự tháp Kheops là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 139,1 \cdot 230^2 \approx 2\,453\,000 \text{ (m}^3\text{)}.$$

□

Câu 5. Siêu thị A thực hiện chương trình giảm giá cho khách hàng mua loại túi bột giặt 4 kg như sau:

- Nếu mua 1 túi thì được giảm 10 000 đồng so với giá niêm yết.
 - Nếu mua 2 túi thì túi thứ nhất được giảm 10 000 đồng và túi thứ hai được giảm 20 000 đồng so với giá niêm yết.
 - Nếu mua từ 3 túi trở lên thì ngoài 2 túi đầu được hưởng chương trình giảm giá như trên, từ túi thứ ba trở đi mỗi túi sẽ được giảm 20% so với giá niêm yết.
- a) Bà Tư mua 5 túi bột giặt loại 4kg ở siêu thị A thì phải trả số tiền là bao nhiêu, biết rằng loại túi bột giặt mà bà tư mua có giá niêm yết là 150 000 đồng/túi.
- b) Siêu thị B lại có hình thức giảm giá khác cho loại túi bột giặt nêu trên là: Nếu mua từ 3 túi trở lên thì sẽ giảm giá 15% cho mỗi túi. Nếu bà Tư mua 5 túi bột giặt thì bà Tư nên mua ở siêu thị nào để số tiền phải trả là ít hơn? Biết rằng giá niêm yết của hai siêu thị là như nhau.

Lời giải.

a) Số tiền bà Tư phải trả khi mua bột giặt ở siêu thị A là

$$150\,000 - 10\,000 + 150\,000 - 20\,000 + 3 \times 150\,000 \times 80\% = 630\,000 \text{ (đồng)}.$$

b) Số tiền bà Tư phải trả khi mua bột giặt ở siêu thị B là

$$5 \times 150\,000 \times 85\% = 637\,500 \text{ (đồng)}.$$

Do đó, bà Tư nên mua ở siêu thị A để phải trả ít tiền hơn.

□

Câu 6. Nhiệt độ sôi của nước không phải lúc nào cũng là 100°C mà phụ thuộc vào độ cao của nơi đó so với mực nước biển. Chẳng hạn, TP Hồ Chí Minh có độ cao xem như ngang mực nước biển ($x = 0$ m) thì nước có nhiệt độ sôi $y = 100^\circ\text{C}$ nhưng ở thủ đô La Paz của Bolivia, Nam Mỹ có độ cao $x = 3\,600$ m so với mực nước biển thì nhiệt độ sôi của nước là $y = 87^\circ\text{C}$. Ở độ cao trong khoảng vài km, người ta thấy mối liên hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$.

a) Xác định các hệ số a, b .

b) Thành phố Đà Lạt có độ cao 1 500 m so với mực nước biển. Hỏi nhiệt độ sôi của nước ở thành phố này là bao nhiêu?

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} 100 = a \cdot 0 + b \\ 87 = a \cdot 3600 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{13}{3600} \\ b = 100 \end{cases}.$$

$$\text{b) Nhiệt độ sôi của nước ở thành phố Đà Lạt là } y = -\frac{13}{3600} \cdot 1500 + 100 = \frac{1135}{12} \approx 94,6^\circ\text{C}.$$

□

Câu 7. Năm học 2017 – 2018, trường THCS Tiến Thành có ba lớp 9 gồm 9A, 9B, 9C trong đó lớp 9A có 35 học sinh và lớp 9B có 40 học sinh. Tổng kết cuối năm học, lớp 9A có 15 học sinh đạt danh hiệu học sinh giỏi, lớp 9B có 12 học sinh đạt danh hiệu học sinh giỏi, lớp 9C có 20% học sinh đạt danh hiệu học sinh giỏi và toàn khối 9 có 30% học sinh đạt danh hiệu học sinh giỏi. Hỏi lớp 9C có bao nhiêu học sinh?

Lời giải.

Gọi x là số học sinh của lớp 9C. Khi đó, số học sinh giỏi của lớp 9C là $0,2x$.

Số học sinh giỏi của ba lớp 9 là $15 + 12 + 0,2x = 27 + 0,2x$.

Tổng số học sinh của ba lớp 9 là $35 + 40 + x = 75 + x$.

Theo bài thì tỉ lệ số học sinh giỏi của ba lớp là 30% nên

$$\frac{27 + 0,2x}{75 + x} = 0,3 \Leftrightarrow 27 + 0,2x = 22,5 + 0,3x \Leftrightarrow x = 45.$$

Vậy số học sinh của lớp 9C là 45.

□

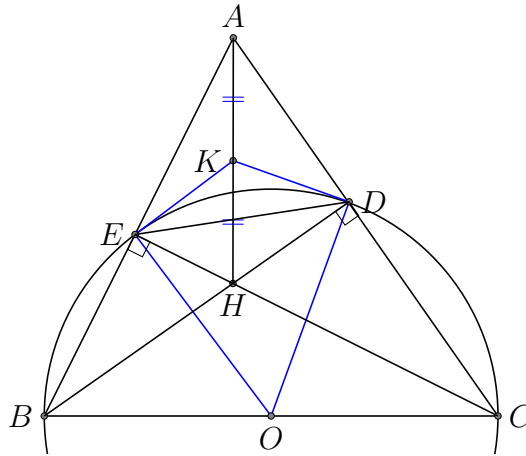
Câu 8. Cho tam giác nhọn ABC có $BC = 8$ cm. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D . Hai đường thẳng BD và CE cắt nhau tại H .

a) Chứng minh AH vuông góc với BC .

b) Gọi K là trung điểm của AH . Chứng minh tứ giác $OEKD$ nội tiếp.

c) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đoạn DE và tỉ số diện tích của hai tam giác AED và ABC .

Lời giải.



a) Vì BC là đường kính nên ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$.

Xét tam giác ABC có BD và CE là hai đường cao giao nhau tại H .

Nên H là trực tâm tam giác ABC .

Do đó AH là đường cao, suy ra $AH \perp BC$.

b) Vì $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ suy ra $AEHD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm K đường kính AH .

Suy ra $\widehat{KDH} = \widehat{KHD}$.

Hơn nữa ta có

$$\widehat{ODH} = \widehat{OBH} = \widehat{DEC} = \widehat{DAH} = 90^\circ - \widehat{KHD}.$$

Vậy $\widehat{KDO} = \widehat{KDH} + \widehat{ODH} = 90^\circ$.

Tương tự ta tính được $\widehat{KEO} = 90^\circ$.

Vậy tứ giác $OEKD$ nội tiếp đường tròn đường kính KO .

c) Vì $\widehat{BAC} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{EKD} = 120^\circ$ suy ra $\widehat{EOD} = 60^\circ$.

Vậy tam giác OED đều, mà $BC = 8 \text{ cm}$ suy ra $R = 4 \text{ cm}$.

Vậy $DE = 4 \text{ cm}$.

Vì tam giác AED đồng dạng với tam giác ACB theo tỉ số $k = \frac{AE}{AC}$.

Mà trong tam giác AEC vuông tại E ta có $\cos \widehat{EAC} = \frac{AE}{AC} \Leftrightarrow k = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Vậy ta có tỉ số diện tích của hai tam giác AED và ABC là $k^2 = \frac{1}{4}$.

□

————— HẾT —————

104

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, HƯNG YÊN

❖❖❖ NỘI DUNG ĐỀ ❖❖❖

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tam giác MNP đều, nội tiếp đường tròn $(O; R)$, khi đó số đo $\widehat{NOP}$ là

(A) 150° .

(B) 60° .

(C) 30° .

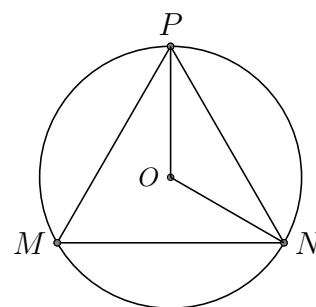
(D) 120° .

Lời giải.

Tam giác MNP là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = 60^\circ$.

Xét đường tròn $(O; R)$ ta có $\widehat{NMP}$ là góc nội tiếp chắn cung NP . $\widehat{NOP}$ là góc ở tâm chắn cung NP .

$\Rightarrow \widehat{NOP} = 2\widehat{NMP} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Phương trình nào sau đây có hai nghiệm trái dấu?

(A) $x^2 - 2017x - 2018 = 0$.

(B) $x^2 - 2018x + 2017 = 0$.

(C) $-x^2 + 2017x - 2018 = 0$.

(D) $x^2 - 2019x + 2018 = 0$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - 2017x - 2018 = 0$ có $a \cdot c = 1 \cdot (-2018) = -2018 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Tìm m để hàm số $y = \frac{3}{m+2}x + 1$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

(A) $m > -2$.

(B) $m < -2$.

(C) $m > 2$.

(D) $m \leq -2$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3}{m+2} > 0 \Leftrightarrow m+2 > 0$ (do $3 > 0$) $\Leftrightarrow m > -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Biết $(a; b)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$. Khi đó giá trị của biểu thức

$2a^2 - b^2$ là

(A) 4.

(B) -12.

(C) -4.

(D) 8.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Suy ra hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (a; b) = (2; 2)$ hay $a = 2, b = 2$.

Nên $2a^2 - b^2 = 2 \cdot 2^2 - 2^2 = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 5. Giá trị của biểu thức $\sin 62^\circ - \cos 28^\circ$ bằng

A 0.

B 1.

C $2 \sin 62^\circ$.

D $2 \cos 28^\circ$.

Lời giải.

Ta có $28^\circ = 90^\circ - 62^\circ \Rightarrow \cos 28^\circ = \sin 62^\circ$.

Suy ra $\sin 62^\circ - \cos 28^\circ = \sin 62^\circ - \sin 62^\circ = 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 6. Hệ số góc của đường thẳng $y = -5x + 7$ là

A $-5x$.

B 5.

C -5 .

D 7.

Lời giải.

Hệ số góc của đường thẳng $y = -5x + 7$ là -5 .

Chọn đáp án **C** □

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại C . Biết $\sin B = \frac{1}{3}$, khi đó $\tan A$ bằng

A $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B 3.

C $2\sqrt{2}$.

D $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

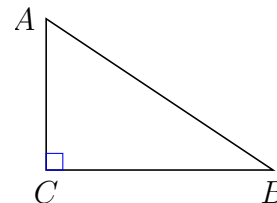
Lời giải.

Xét tam giác ABC vuông tại C ta có

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 3AC.$$

Mà áp dụng định lý Pi-ta-go ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ \Leftrightarrow (3AC)^2 &= AC^2 + BC^2 \\ \Leftrightarrow 8AC^2 &= BC^2 \\ \Leftrightarrow \frac{BC^2}{AC^2} &= 8 \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = 2\sqrt{2} = \tan A. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **C** □

Câu 8. Có hai đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và đường tròn $(I; 2 \text{ cm})$, biết $OI = 6 \text{ cm}$. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó là

A 4.

B 3.

C 2.

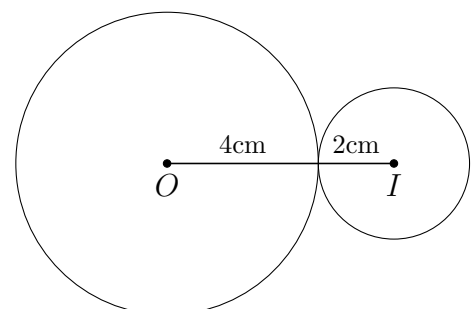
D 1.

Lời giải.

Ta có $OI = 6 \text{ cm} = 4 + 2 = R + r$.

Suy ra $(O; 4 \text{ cm})$ tiếp xúc ngoài với $(I; 2 \text{ cm})$.

Nên hai đường tròn này có 3 đường tiếp tuyến chung.



Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Kết quả của phép tính $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{5}$ là

(A) $2\sqrt{5} - 2$.

(B) -2 .

(C) 2 .

(D) $2 - 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} - \sqrt{5} = |2 - \sqrt{5}| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2 \text{ (do } 2 - \sqrt{5} < 0\text{)}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Tìm m để hai đường thẳng $(d) : y = 3x + 1$ và $(d') : y = (m - 1)x - 2m$ song song với nhau.

(A) $m = -\frac{1}{2}$.

(B) $m = 4$.

(C) $-\frac{3}{2}$.

(D) $m \neq 4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 3 \\ 1 \neq -2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 11.

Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính 1m, người ta cắt ra một hình chữ nhật (phần tô đậm như hình vẽ).

Phần hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể cắt được là

(A) $1,6\text{m}^2$.

(B) $0,5\text{m}^2$.

(C) 1m^2 .

(D) 2m^2 .

Lời giải.

Gọi kích thước của miếng tôn cần cắt như hình vẽ

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có

$$a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4 - b^2}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2}.$$

Khi đó diện tích miếng tôn hình chữ nhật là

$$S = ab = \frac{b\sqrt{4 - b^2}}{2}.$$

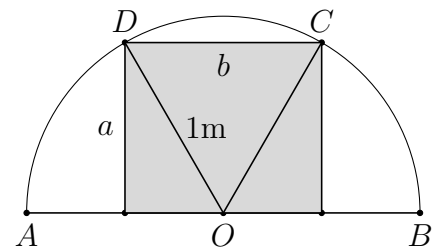
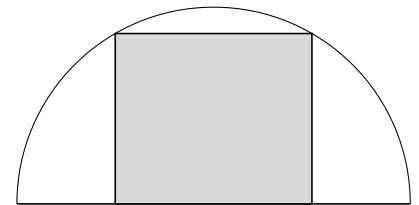
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có

$$b^2 + \sqrt{(4 - b^2)^2} \geq 2b\sqrt{4 - b^2} \Leftrightarrow b\sqrt{4 - b^2} \leq \frac{b^2 + 4 - b^2}{2} = 2.$$

$$\Rightarrow S = \frac{b\sqrt{4 - b^2}}{2} \leq \frac{2}{2} = 1.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow b = \sqrt{4 - b^2} \Leftrightarrow b = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

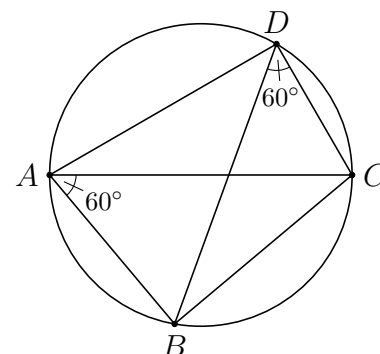


Câu 12. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC , có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Khi đó số đo của $\widehat{ADB}$ là

- A** 30° . **B** 60° . **C** 90° . **D** 45° .

Lời giải.

Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
 $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC).
 Mặt khác $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (góc nhìn đường kính AC).
 Do đó $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} - \widehat{BDC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

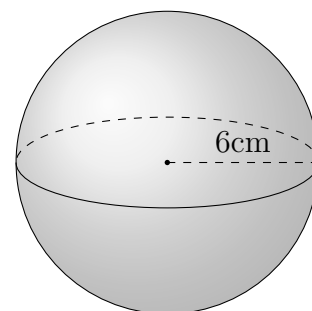


Chọn đáp án **A** □

Câu 13.

Một hình cầu có đường kính 6 cm. Diện tích mặt cầu đó là

- A** $36\pi \text{ cm}^2$. **B** $12\pi \text{ cm}^2$. **C** $216\pi \text{ cm}^2$. **D** $72\pi \text{ cm}^2$.



Lời giải.

Ta có diện tích mặt cầu là $S = 4\pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 36\pi \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 14. Cặp số nào sau đây là nghiệm của phương trình $x - 3y = -1$?

- A** $(2; 0)$. **B** $(2; 1)$. **C** $(1; 2)$. **D** $(2; -11)$.

Lời giải.

Thay $(2; 1)$ vào phương trình ta được $2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow (2; 1)$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **B** □

Câu 15. Trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng $y = x + 2$; $y = 2x + 1$ và $y = (m^2 - 1)x - 2m + 1$. Tìm giá trị của m để ba đường thẳng cùng đi qua một điểm.

- A** $m = -3$. **B** $m \in \{-1; 1\}$. **C** $m \in \{-1; 3\}$. **D** $m = 1$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = x + 2$; $y = 2x + 1$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = 2x + 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Để hai đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm thì đường thẳng $y = (m^2 - 1)x - 2m + 1$ phải

đi qua điểm $A(1;3)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} 3 &= (m^2 - 1) \cdot 1 - 2m + 1 \\ \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m + 1)(m - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 0 \\ m - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 16. Trong mặt phẳng Oxy , tập nghiệm của phương trình $4x + y = 1$ được biểu diễn bởi đồ thị hàm số nào dưới đây?

- (A)** $y = 4x + 1$. **(B)** $y = -4x - 1$. **(C)** $y = -4x + 1$. **(D)** $y = 4x - 1$.

Lời giải.

Ta có $4x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 4x = -4x + 1$.

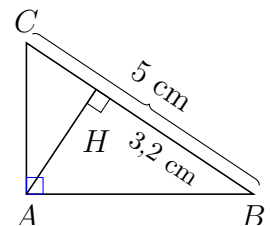
Chọn đáp án **C** □

Câu 17. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $BH = 3,2\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$ thì độ dài AB bằng

- (A)** 8cm . **(B)** 16cm . **(C)** $1,8\text{cm}$. **(D)** 4cm .

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH ta có $AB^2 = BH \cdot BC \Leftrightarrow AB^2 = 3,2 \cdot 5 = 16 \Leftrightarrow AB = 4\text{cm}$.



Chọn đáp án **D** □

Câu 18. Biết phương trình $3x^2 + 6x - 9 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Giả sử $x_1 < x_2$ khi đó biểu thức $\frac{x_2}{x_1}$ có giá trị

- (A)** $\frac{1}{3}$. **(B)** $-\frac{1}{3}$. **(C)** -3 . **(D)** 3 .

Lời giải.

Ta có $a + b + c = 3 + 6 - 9 = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = -\frac{9}{3} = -3 \end{cases} \quad (\text{do } x_1 < x_2) \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 19. Cho các đường tròn $(A; 3\text{cm})$; $(B; 5\text{cm})$; $(C; 2\text{cm})$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chu vi của $\triangle ABC$ là

- (A)** 2cm . **(B)** $10\sqrt{2}\text{cm}$. **(C)** 10cm . **(D)** $10\sqrt{3}\text{cm}$.

Lời giải.

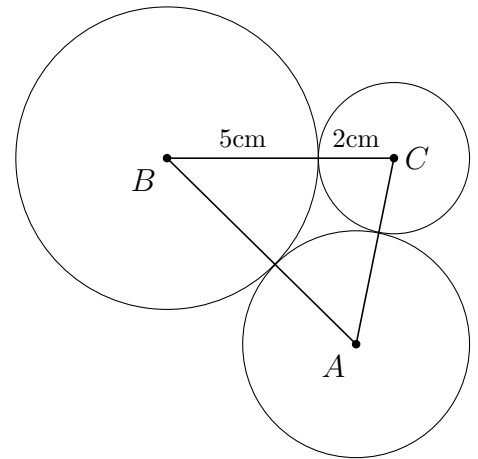
Do các đường tròn đôi một tiếp xúc ngoài với nhau nên ta có

$$AB = 3 + 5 = 8\text{cm};$$

$$AC = 3 + 2 = 5\text{cm};$$

$$BC = 5 + 2 = 7\text{cm}.$$

Vậy chu vi tam giác ABC bằng $8 + 5 + 7 = 20\text{cm}$.



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x-15}$ là

(A) $x \leq -15$.

(B) $x \geq 15$.

(C) $x \geq -15$.

(D) $x \leq 15$.

Lời giải.

$$\sqrt{x-15} \text{ xác định} \Leftrightarrow x-15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 15.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 21. Kết quả rút gọn biểu thức $\frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{17}}$ là

(A) $\frac{\sqrt{13} - \sqrt{17}}{2}$.

(B) $\frac{\sqrt{17} + \sqrt{13}}{2}$.

(C) $\sqrt{17} - \sqrt{13}$.

(D) $\frac{\sqrt{17} - \sqrt{13}}{2}$.

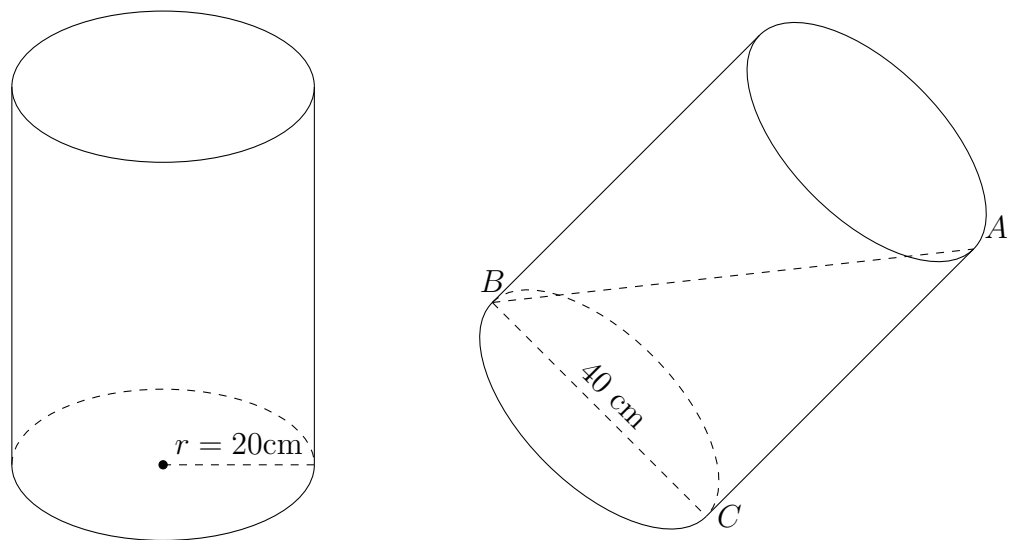
Lời giải.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{15} - \sqrt{13}}{(\sqrt{15} - \sqrt{13})(\sqrt{13} + \sqrt{15})} + \frac{\sqrt{17} - \sqrt{15}}{(\sqrt{17} - \sqrt{15})(\sqrt{17} + \sqrt{15})} \\ &= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{13}}{15 - 13} + \frac{\sqrt{17} - \sqrt{15}}{17 - 15} \\ &= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{17} - \sqrt{15}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{17} - \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 22. Đổ nước vào một chiếc thùng hình trụ có bán kính đáy 20cm. Nghiêng thùng sao cho mặt nước chạm miệng thùng và đáy thùng thì mặt nước tạo với đáy thùng một góc 45° . Thể tích của thùng là



- (A) $400\pi \text{ cm}^3$. (B) $32000\pi \text{ cm}^3$. (C) $16000\pi \text{ cm}^3$. (D) $8000\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải.

Đường kính đáy của chiếc thùng là $40\text{cm} \Rightarrow BC = 40 \text{ cm}$.

Vì mặt nước tạo với đáy một góc là 45° nên $\widehat{ABC} = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại C .

$\Rightarrow AC = BC = 40\text{cm} = h$.

Vậy thể tích của chiếc thùng là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 20^2 \cdot 40 = 16000\pi \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Cho hai đường thẳng $d_1 : y = -2x + 3$ và $d_2 : y = -\frac{1}{2}x + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) d_1 và d_2 trùng nhau.
 (B) d_1 và d_2 cắt nhau tại một điểm trên trục tung.
 (C) d_1 và d_2 song song với nhau.
 (D) d_1 và d_2 cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 3$.

Do đó hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $(0; 3)$ thuộc trục tung.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Số nhà của bạn Nam là một số tự nhiên có hai chữ số. Nếu thêm chữ số 7 vào bên trái số đó thì được một số kí hiệu là A . Nếu thêm chữ số 7 vào bên phải chữ số đó thì được một số kí hiệu là B . Tìm số nhà của bạn Nam biết $A - B = 252$.

- (A) 45. (B) 54. (C) 90. (D) 49.

Lời giải.

Gọi nhà của bạn Nam là $\overline{ab}$ ($a, b \in \mathbb{N}; a \neq 0, 0 \leq a \leq 9$)

Nếu thêm số 7 vào bên trái số $\overline{ab}$ ta được $A = 7\overline{ab} = 700 + \overline{ab}$.

Nếu thêm chữ số 7 vào bên phải số $\overline{ab}$ ta được $B = \overline{ab7} = \overline{ab} \cdot 10 + 7$.

$A - B = 252 \Leftrightarrow 700 + \overline{ab} - \overline{ab} \cdot 10 + 7 = 252 \Leftrightarrow 9\overline{ab} = 441 \Leftrightarrow \overline{ab} = 49$.

Vậy số nhà của bạn Nam là 49.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25. Cho mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d: y = x - m + 2$ và parabol $P: y = x^2$. Tìm m để d và P cắt nhau tại hai điểm phân biệt nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là trục tung.

(A) $m > \frac{9}{4}$.

(B) $\frac{4}{9} < m < 2$.

(C) $2 < m < \frac{9}{4}$.

(D) $m < \frac{4}{9}$.

Lời giải.

Ta có d và P cắt nhau tại hai điểm phân biệt nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là trục tung khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - x + m = 0$.

Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu ta có

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4(m - 2) > 0 \\ P = m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 9 > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án (C)

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{3}(\sqrt{12} - 3) + \sqrt{27}$.

Lời giải.

$$P = \sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3) + 3\sqrt{3} = 6 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6.$$

□

Câu 2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $A(2; 4)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $A(2; 4)$ vào hàm số $y = mx^2$ ta có $4 = m \cdot 2^2 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$, khi đó đồ thị hàm số có dạng $y = x^2$ và đi qua điểm $A(2; 4)$.

□

Câu 3. Giải phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 5x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 1) - 5(x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 5\}$.

□

Câu 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 2m + 3 \\ x + 2y = 3m + 1 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Lời giải.

a) Thay $m = 2$ vào hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 14 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ y = 3x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; 2)$.

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y = 2m + 3 \\ x + 2y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4m + 6 \\ x + 2y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7m + 7 \\ y = 3x - 2m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ y = m. \end{cases}$$

Thay $x = m + 1$ và $y = m$ vào điều kiện ta có phương trình

$$\begin{aligned} (m + 1)^2 + m^2 &= 5 \Rightarrow 2m^2 + 2m - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - m + 2m - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m - 1)(m + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

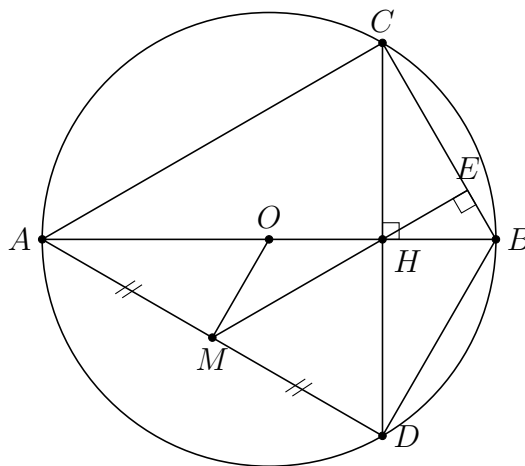
Vậy $m = 1$ hoặc $m = -2$.

□

Câu 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một dây CD vuông góc với AB tại H (H không trùng với các điểm A, B, O). Gọi M là trung điểm của AD . Chứng minh

- Bốn điểm O, M, D, H cùng thuộc một đường tròn.
- MH vuông góc với BC .

Lời giải.



- Vì M là trung điểm của $AD \Rightarrow OM \perp AD$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).
 $\Rightarrow$ Điểm M, H cùng nhìn OD dưới một góc 90° .
 $\Rightarrow$ Tứ giác $OHMD$ là tứ giác nội tiếp. Nên bốn điểm O, M, D, H cùng thuộc một đường tròn.
- Kéo dài MH cắt BC tại E .
 Xét tam giác vuông ADH có HM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AD .

$$\Rightarrow HM = \frac{1}{2}AD = MD \Rightarrow \triangle MHD \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{MDH} = \widehat{ADC}.$$

Lại có $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

$$\widehat{MHD} = \widehat{CHE} \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \widehat{CHE} = \widehat{ABC}.$$

Xét tam giác vuông BCH có $\widehat{ABC} + \widehat{HCB} = 90^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{CHE} + \widehat{HCB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CHE \text{ vuông tại } E. \text{ Suy ra } HE \perp BC.$$

Vậy $MH \perp BC$.

□

Câu 6. Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{2}{y^2 + z^2} + \frac{2}{z^2 + x^2} - \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2xyz}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{x^2 + y^2} + \frac{2}{y^2 + z^2} + \frac{2}{z^2 + x^2} - \frac{x^2}{2yz} - \frac{y^2}{2xz} - \frac{z^2}{2xy} \\ &= \left(\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{z^2}{2xy} \right) + \left(\frac{2}{y^2 + z^2} - \frac{x^2}{2yz} \right) + \left(\frac{2}{z^2 + x^2} - \frac{y^2}{2xz} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Cô-Si, ta có

$$\begin{aligned} 0 < 2xy \leq x^2 + y^2, (x, y > 0) &\Rightarrow \frac{z^2}{2xy} \geq \frac{z^2}{x^2 + y^2} \\ &\Rightarrow \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{z^2}{2xy} \leq \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{z^2}{x^2 + y^2} = \frac{2 - z^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự, } \frac{2}{y^2 + z^2} - \frac{x^2}{2yz} \leq 1; \frac{2}{z^2 + x^2} - \frac{y^2}{2xz} \leq 1.$$

$$\text{Suy ra } A = \left(\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{z^2}{2xy} \right) + \left(\frac{2}{y^2 + z^2} - \frac{x^2}{2yz} \right) + \left(\frac{2}{z^2 + x^2} - \frac{y^2}{2xz} \right) \leq 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\Rightarrow \text{Max}(A) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

□

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. A	5. A
6. C	7. C	8. B	9. B	10. B
11. C	12. A	13. A	14. B	15. C
16. C	17. D	18. B	19. A	20. B
21. D	22. C	23. B	24. D	25. C

105 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, KIÊN GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Tính $E = 2\sqrt{48} + 3\sqrt{37} - 2\sqrt{108}$.

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức $P(x) = \left(\frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x - 1}\right) : \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} E &= 2\sqrt{48} + 3\sqrt{75} - 2\sqrt{108} = 2\sqrt{4^2 \cdot 3} + 3\sqrt{5^2 \cdot 3} - 2\sqrt{6^2 \cdot 3} \\ &= 2 \cdot 4\sqrt{3} + 3 \cdot 5\sqrt{3} - 2 \cdot 6\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \\ &= 11\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vậy $E = 11\sqrt{3}$.

b) Ta có $P(x)$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 1) \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ (x - 1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(\frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x - 1}\right) : \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \left(\frac{1}{x(x - 1)} + \frac{1}{x - 1}\right) : \frac{x + 1}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x + 1}{x(x - 1)} \cdot \frac{(x - 1)^2}{x + 1} = \frac{x - 1}{x}. \end{aligned}$$

Vậy dạng thu gọn của biểu thức đã cho là $P = \frac{x - 1}{x}$.

□

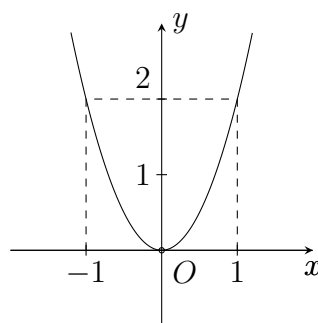
Câu 2.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = 2x^2$ trên hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d_m: y = (m^2 + m - 4)x + m - 7$ song song với đường thẳng $d: y = 2x - 5$.

Lời giải.

a) Đồ thị (P) là parabol đi qua các điểm $(-1; 2)$, $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $(0; 0)$, $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $(1; 2)$.



b) Đường thẳng $d_m \parallel d$, ta có

$$\begin{cases} m^2 + m - 4 = 2 \\ m - 7 \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 = 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy để hai đường thẳng d_m và d song song thì $m = -3$.

□

Câu 3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 2m - 7 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} \Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow (m-1)^2 + 2m + 7 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 2m + 7 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 8 \geq 0, \text{ đúng với } \forall m. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = -2m-7 \end{cases}.$$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} A = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 &= (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 \\ &= 4(m-1)^2 - 4(2m+7) \\ &= 4(m^2 - 2m + 1 - 2m - 7) \\ &= 4(m^2 - 4m + 4 - 10) \\ &= 4[(m-2)^2 - 10] \\ &= 4(m-2)^2 - 40. \end{aligned}$$

Vì $(m-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4(m-2)^2 \geq 0 \Rightarrow 4(m-2)^2 - 40 \geq -40$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.
 $\Rightarrow \min A = -40$ khi $m = 2$.

Vậy để $A = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$ nhỏ nhất thì $m = 2$.

□

Câu 4. Bạn Nam mua hai món hàng và phải trả tổng cộng 480 000 đồng, trong đó tính cả 40 000 đồng là thuế giá trị gia tăng (viết tắt là thuế VAT). Biết rằng thuế VAT đối với mặt hàng thứ nhất là 10%; thuế VAT đối với mặt hàng thứ hai là 8%. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì bạn Nam phải trả mỗi món hàng bao nhiêu tiền.

(Trong đó thuế VAT là thuế mà người mua hàng phải trả, người bán hàng thu và nộp cho Nhà nước. Giả sử thuế VAT đối với mặt hàng A được quy định là 10%. Khi đó nếu giá bán của mặt hàng A là x đồng thì kể cả thuế VAT, người mua mặt hàng này phải trả tổng cộng là $x + 10\%x$ đồng.)

Lời giải.

Gọi số tiền phải trả cho món hàng thứ nhất không kể thuế VAT là x đồng, ($0 < x < 48\,000$).

Gọi số tiền phải trả cho món hàng thứ hai không kể thuế VAT là y đồng, ($0 < y < 48\,000$).

Theo giả thiết, số tiền phải trả cho hai món hàng không kể thuế VAT là

$$x + y = 480\,000 - 40\,000 = 440\,000 \text{ (đồng)}. \quad (10)$$

Số tiền thuế phải trả cho món hàng thứ nhất là $x \cdot 10\% = \frac{x}{10}$ (đồng).

Số tiền thuế phải trả cho món hàng thứ hai là $y \cdot 8\% = \frac{2y}{25}$ (đồng).

Số tiền thuế phải trả cho cả hai món hàng là $\frac{x}{10} + \frac{2y}{25} = 40\,000 \Leftrightarrow 5x + 4y = 2\,000\,000$ (đồng). (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 440\,000 \\ 5x + 4y = 2\,000\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 1\,760\,000 \\ 5x + 4y = 2\,000\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 240\,000 \\ y = 200\,000 \end{cases} \text{ (TMDK).}$$

Vậy số tiền cần phải trả cho món hàng thứ nhất và thứ hai lần lượt là 240 000 và 200 000 đồng.

□

Câu 5. Cho biểu thức $Q(x) = \frac{5x^2 + 6x + 2018}{x + 1}$. Tìm các giá trị nguyên của x để $Q(x)$ là số nguyên.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq -1$. Ta có

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{5x^2 + 6x + 2018}{x + 1} = \frac{5x^2 + 5x + x + 1 + 2017}{x + 1} \\ &= \frac{5x(x + 1)}{x + 1} + \frac{x + 1}{x + 1} + \frac{2017}{x + 1} \\ &= 5x + 1 + \frac{2017}{x + 1}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(5x + 1 + \frac{2017}{x + 1}\right) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2017}{x + 1} \in \mathbb{Z} \text{ (do } x \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Mà } U(2017) = \{-2017; -1; 1; 2017\} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = -2017 \\ x + 1 = -1 \\ x + 1 = 1 \\ x + 1 = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2018 & (\text{tm}) \\ x = -2 & (\text{tm}) \\ x = 0 & (\text{tm}) \\ x = 2016 & (\text{tm}) \end{cases}.$$

Vậy $x \in \{-2018; -2; 0; 2016\}$. □

Câu 6. Cho đường tròn (O) , từ điểm A ngoài đường tròn vẽ đường thẳng AO cắt (O) tại B, C ($AB < AC$). Qua A vẽ đường thẳng không đi qua O cắt đường tròn (O) tại D, E ($AD < AE$). Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng CE tại F .

a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp được đường tròn.

106**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, LÀO CAI****◇◇◇◇ NỘI DUNG ĐỀ ◇◇◇◇****Câu 1.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{16+9} - 2.$

b) $B = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1.$

Lời giải.

a) $A = \sqrt{16+9} - 2 = \sqrt{25} - 2 = \sqrt{5^2} - 2 = 5 - 2 = 3.$

b) $B = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1 = |\sqrt{3}-1| + 1 = \sqrt{3}-1+1 = \sqrt{3}. \text{ (Do } \sqrt{3}-1 > 0)$

□

Câu 2. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} : \frac{2\sqrt{x}-6}{x+1} \right)$ với $x > 0, x \neq 9$.a) Rút gọn biểu thức P .b) Tìm x để $P = 1$.**Lời giải.**a) Điều kiện: $x > 0, x \neq 9$.

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{2\sqrt{x}-6}{x+1} \\
 &= \left(\frac{x-6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{2(\sqrt{x}-3)}{x+1} \\
 &= \frac{x-6-(\sqrt{x}+3)+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{x+1}{2(\sqrt{x}-3)} \\
 &= \frac{x-6-\sqrt{x}-3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{x+1}{2(\sqrt{x}-3)} \\
 &= \frac{(x-9)(x+1)}{2\sqrt{x}(x-9)} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

b) Tìm giá trị của x để $P = 1$.Điều kiện: $x > 0, x \neq 9$.

$$\begin{aligned}
 P = 1 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}
 \end{aligned}$$

Vậy $x = 1$ thì $P = 1$.

□

Câu 3. Cho đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{2}x + 2$ a) Tìm m để đường thẳng $(\Delta): y = (m-1)x + 1$ song song với đường thẳng (d) .b) Gọi A, B là giao điểm của (d) với parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$. Tìm tọa độ điểm N nằm trên trục hoành sao cho $NA + NB$ nhỏ nhất.**Lời giải.**

a) Tìm m để đường thẳng $(\Delta): y = (m - 1)x + 1$ song song với đường thẳng (d) .

$$\text{Đường thẳng } (d) \parallel (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = -\frac{1}{2} \\ 1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{2}$$

b) Gọi A, B là giao điểm của (d) với parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$. Tìm tọa độ điểm N nằm trên trục hoành sao cho $NA + NB$ nhỏ nhất.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) là (P) là nghiệm của phương trình: $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(2; 1) \\ x = -4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(-4; 4). \end{cases}$$

Khi đó $A(2; 1), B(-4; 4)$ là hai giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Ox thì $A'(2; -1)$.

Khi đó ta có: $NA = NA'$ nên $(NA + NB)_{\min} \Leftrightarrow (NA' + NB)_{\min}$

Mà A', B nằm khác phía với trục Ox .

Nên để $(NA' + NB)_{\min}$ thì A', B, N thẳng hàng.

Từ đó suy ra điểm N cần tìm là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với trục hoành: $N(n; 0)$

Gọi phương trình đường thẳng (d') đi qua hai điểm A', B là $y = ax + b$.

Do A', B thuộc đường thẳng (d') nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a + b = -1 \\ -4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{6} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ta có phương trình đường thẳng (d') là: $y = -\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}$.

Khi đó điểm N thuộc đường thẳng (d') và $N\left(\frac{4}{5}; 0\right)$.

Vậy khi $N\left(\frac{4}{5}; 0\right)$ thì $(NA + NB)_{\min} = A'B = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (4 + 1)^2} = \sqrt{61}$.

□

Câu 4. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + ay = 3a \\ -ax + y = 2 - a^2 \end{cases} \quad (*)$, với a là tham số.

a) Giải hệ phương trình $(*)$ khi $a = 1$.

b) Tìm a để hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{2y}{x^2 + 3}$ là số nguyên.

Lời giải.

a) Thay $a = 1$ vào hệ phương trình ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 4 \\ x = 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy với $a = 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

b) Tìm a để hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{2y}{x^2 + 3}$ là số nguyên.

- Với $a = 0$, ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

- Với $a \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ $\frac{1}{-a} \neq \frac{a}{1}$ ($a \neq 0$)
 $\Leftrightarrow -a^2 \neq 1$ (luôn đúng).

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi a .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a - ay \\ -a(3a - ay) + y = 2 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a - ay \\ -3a^2 + a^2y + y = 2 - a^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a - ay \\ y(a^2 + 1) = 2 + 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a - ay \\ y = \frac{2a^2 + 2}{a^2 + 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a - 2a = a \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (a; 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{2y}{x^2 + 3} &= \frac{2 \cdot 2}{a^2 + 3} = \frac{4}{a^2 + 3} \\ \frac{2y}{x^2 + 3} \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{4}{a^2 + 3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{a^2 + 3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (a^2 + 3) \in U(4) \\ \text{Mà } U(4) &= \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}. \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } a^2 + 3 \geq 3\forall a \Rightarrow a^2 + 3 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}.$$

Vậy $a = \pm 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

□

Câu 5. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ (1), với m là tham số.

- Giải phương trình (1) khi $m = 0$.
- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2$$

Lời giải.

- Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

Thay $m = 0$ vào phương trình (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = -1$ và $x = 3$.

- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - x_1 & (1) \\ x_1x_2 = m - 3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } x_1^2 + 12 = 2x_2 - x_1x_2 \quad (3)$$

Thế (1) vào (2) ta có:

$$\begin{aligned}x_1^2 + 12 &= 2(2 - x_1) - x_1(2 - x_1) \\ \Leftrightarrow x_1^2 + 12 &= 4 - 2x_1 - 2x_1 + x_1^2 \\ \Leftrightarrow -4x_1 &= 8 \Leftrightarrow x_1 = -2 \Rightarrow x_2 = 2 - x_1 = 4 \\ \Rightarrow x_1 x_2 &= m - 3 \Leftrightarrow m - 3 = -8 \Leftrightarrow m = -5 \text{ (thỏa mãn)}\end{aligned}$$

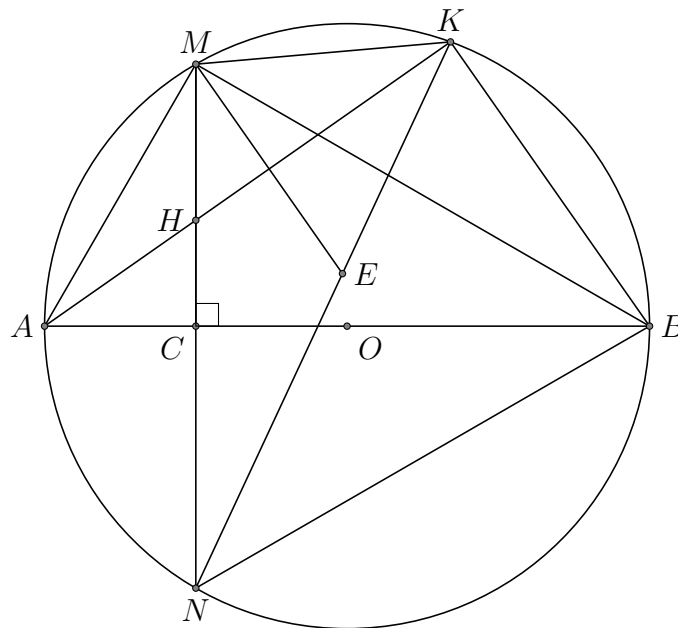
Vậy $m = -5$.

□

Câu 6. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây cung MN vuông góc với OA tại C . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM (K khác B, M), H là giao điểm của AK và MN .

- Chứng minh rằng $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $AH \cdot AK = AM^2$.
- Xác định vị trí điểm K để $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Xét tứ giác $BCHK$ có: $\widehat{BCH} + \widehat{BKH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
Suy ra tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).
- Ta có $OA \perp MN$ tại C
Suy ra C là trung điểm của MN (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)
 $\Rightarrow \triangle AMN$ có AC là đường cao đồng thời là trung tuyến.
 $\Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A . Suy ra $AM = AN$
 $\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{AN}$.
 $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AKM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)
Xét tam giác AMN và AKM có: $\begin{cases} \widehat{MAK} \text{ chung} \\ \widehat{AMN} = \widehat{AKM} \end{cases}$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle AKM \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AK} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow AM^2 = AH \cdot AK.$$

c) Lấy điểm E thuộc KN sao cho $KM = KE$.

Xét tam giác vuông AMB có $AM^2 = AC \cdot AB = \frac{R}{2} \cdot 2R = R^2 \Rightarrow AM = R$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow \sin \widehat{ABM} = \frac{AM}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABM} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MBN} = 60^\circ \text{ (tính đối xứng)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MKE} = \widehat{MKN} = \widehat{MBN} = 60^\circ \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{MN}).$$

$$\Rightarrow \triangle AKE \text{ đều} \Rightarrow KM = KE = ME.$$

Ta có AB là trung trực của $MN \Rightarrow BM = BN$

Lại có $\widehat{MBN} = 60^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \triangle BMN$ đều $\Rightarrow MB = MN = BN$ và $\widehat{BMN} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{KME} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BMN} - \widehat{BME} = \widehat{KME} - \widehat{BME}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{EMN} = \widehat{KMB}$$

Xét tam giác KMB và tam giác EMN có:

$$\begin{cases} KM = EM; \\ MB = MN; \\ \widehat{EMN} = \widehat{KMB} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle KMB = \triangle EMN \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow KB = EN \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow S = KM + KN + KB = KE + (KE + EN) + EN = 2(KE + EN) = 2KN.$$

KN lớn nhất khi và chỉ khi KN là đường kính của đường tròn O , khi đó $KN = 2R$ và $S_{\max} = 4R$.

KN nhỏ nhất khi và chỉ khi $K \equiv M \Rightarrow KN = MN \Rightarrow S_{\min} = 2MN$.

$$\text{Xét tam giác vuông } AMB \text{ có } MC^2 = AC \cdot BC = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow MC = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MN = R\sqrt{3} \Rightarrow S_{\min} = 2R\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } (KM + KN + KB)_{\max} = 4R \text{ và } (KM + KN + KB)_{\min} = 2R\sqrt{3}.$$

□

————— HẾT —————

107**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, LONG AN****✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧****Câu 1.**

- a) Rút gọn biểu thức $T = \sqrt{3} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3}$.
- b) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+4} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{x-16}$ với $x > 0, x \neq 16$.
- c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 2$.

Lời giải.

- a) Ta có $T = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$.
 Vậy $T = 0$.
- b) Tập xác định $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{16\}$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+4} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{x-16} \\ &= \frac{\sqrt{x}+4 + \sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{2\sqrt{x}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vậy $A = 1$.

- c) Ta có $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2} = 2 \Leftrightarrow |x-4| = 2 \Leftrightarrow x-4 = \pm 2 \Leftrightarrow x \in \{2; 6\}$.
 Vậy $S = \{2; 6\}$.

□

Câu 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2x + 3$.

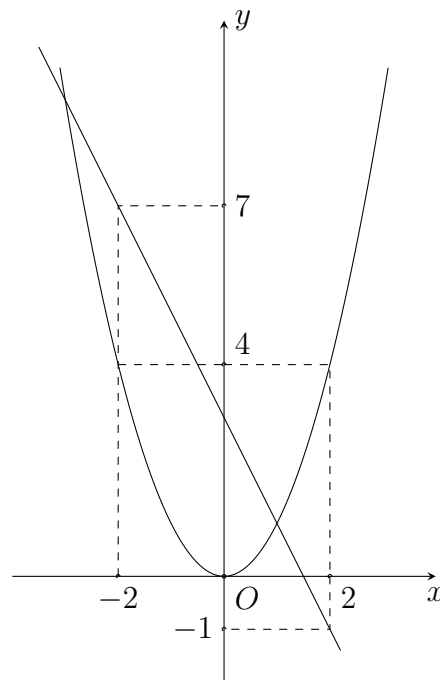
- a) Vẽ hai đồ thị trên trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên bằng phép tính.
- c) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ biết (d_1) song song với (d) và (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Lời giải.

- a) Ta có bảng giá trị của hai hàm số

x	-2	0	2
$y = x^2$	4	0	4
$y = -2x + 3$	7	3	-1

Từ đó ta có đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

- Với $x = 1$ thì $y = 1^2 = 1$, ta được giao điểm $A(1, 1)$.
- Với $x = -3$ thì $y = (-3)^2 = 9$, ta được giao điểm $B(-3, 9)$.

c) Do (d_1) song song với (d) nên (d_1) và (d) có cùng hệ số góc hay $a = -2$.

Lại có tọa độ giao điểm của (d_1) và trục tung là điểm $(0; b)$ nên theo giả thiết thì $b = 2$.

Vậy phương trình đường thẳng (d_1) là $y = -2x + 2$.

□

Câu 3.

- Giải phương trình $5x^2 - 7x - 6 = 0$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 2y = 6. \end{cases}$
- Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2(m - 3)x + m^2 + 3 = 0$.
 - Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
 - Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 86$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 169 = 13^2 > 0$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{7 + 13}{2 \cdot 5} = 2, x_2 = \frac{7 - 13}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{5}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = -\frac{3}{5}$.

b) Ta có

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2y \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2y \\ 6 - 2y - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 1)$.

c) $x^2 - 2(m - 3)x + m^2 + 3 = 0$.

(a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m - 3)^2 - (m^2 + 3) > 0 \Leftrightarrow 6 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy với $m < 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

(b) Với $m < 1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 3) = 2m - 6 \\ x_1 x_2 = m^2 + 3. \end{cases}$$

Do $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ nên từ $x_1^2 + x_2^2 = 86$ ta thu được

$$\begin{aligned} (2m - 6)^2 - 2(m^2 + 3) &= 86 \\ \Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 36 - 2m^2 - 6 &= 86 \\ \Leftrightarrow m^2 - 12m - 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m + 2)(m - 14) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ m = 14 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $m = -2$ thỏa mãn.

Vậy $m = -2$.

□

Câu 4.

- a) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , biết $AB = 5\text{cm}$ và $BC = 13\text{cm}$. Từ H kẻ HK vuông góc với AB ($K \in AB$). Tính AC , BH và $\cos HBK$.
- b) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O ; các đường cao AD , BE cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại I và K (I khác A , K khác B).
- (a) Chứng minh rằng tứ giác $CDHE$ nội tiếp.
- (b) Chứng minh rằng tam giác CIK cân.
- (c) Kẻ đường kính BF của đường tròn (O). Gọi P là trung điểm của AC . Chứng minh rằng ba điểm H , P , F thẳng hàng.

Lời giải.

a)

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A ta có

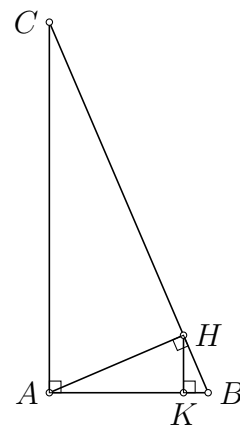
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\text{cm}.$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ta được $BA^2 = BH \cdot BC$ hay $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{25}{13}\text{cm}.$

$$\text{Ta có: } \cos HBK = \cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Vậy } AC = 12\text{cm}, BH = \frac{25}{13}\text{cm và } \cos HBK = \frac{5}{13}.$$



b)

(a) Do $\widehat{HEC} = \widehat{HDC} = 90^\circ$ nên

$$\widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 180^\circ.$$

Do đó tứ giác $HECD$ nội tiếp.

(b) Trong đường tròn (O) hai góc nội tiếp $\widehat{IBC}$ và $\widehat{IAC}$ cùng chắn cung $\widehat{IC}$ nên

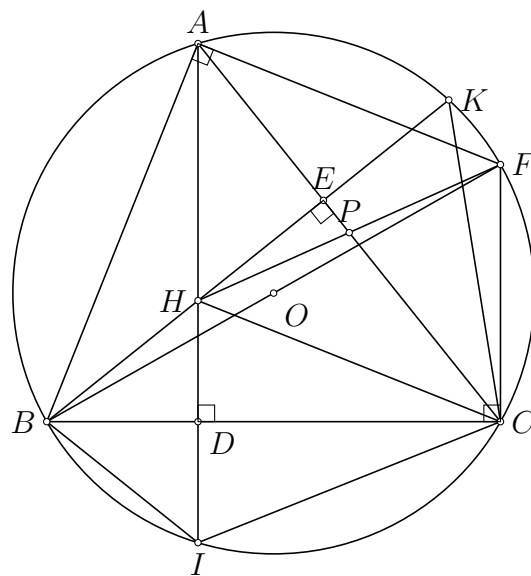
$$\widehat{IBC} = \widehat{IAC}.$$

Mà $\widehat{IAC} = 90^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{CBK}$ nên

$$\widehat{IBC} = \widehat{KBC}.$$

Từ đó $\widehat{CI} = \widehat{CK}$ hay $CI = CK$.

Vậy tam giác CIK cân tại C .



(c) Trong đường tròn (O) có đường kính BF nên $\widehat{BAF} = \widehat{BCF} = 90^\circ$ hay $BA \perp AF$ và $BC \perp FC$.

Trong tam giác ABC , hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H nên H là trực tâm tam giác ABC hay $AH \perp BC$ và $CH \perp AB$.

Từ $BA \perp AF$ và $CH \perp AB$ ta thu được $CH \parallel AF$. Tương tự thì $AH \parallel CF$.

Do đó tứ giác $AHCF$ là hình bình hành. Điều này kéo theo AC và FH cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, tức là F, P, H thẳng hàng.

□

———— HẾT ————

108**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, NAM ĐỊNH****✧✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧✧****I. PHẦN TRẮC NGHIỆM****Câu 1.** Điều kiện để biểu thức $\sqrt{4-2x}$ xác định là

A $x \leq 2$.

B $x > 2$.

C $x \neq 2$.

D $x \geq 2$.

Lời giải.Điều kiện xác định $4-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.Chọn đáp án **A** □**Câu 2.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị hàm số $y = -2x + 4$ cắt trục hoành tại điểm

A $M(0; 2)$.

B $N(2; 0)$.

C $P(4; 0)$.

D $Q(0; 4)$.

Lời giải.Tung độ giao điểm của đồ thị với trục hoành bằng $0 \Rightarrow 0 = -2x + 4 \Leftrightarrow x = 2$. Do đó giao điểm là $N(2; 0)$.Chọn đáp án **B** □**Câu 3.** Phương trình nào sau đây có hai nghiệm phân biệt và tích hai nghiệm là một số dương?

A $x^2 - x + 1 = 0$.

B $-4x^2 + 4x - 1 = 0$.

C $x^2 - 3x + 2 = 0$.

D $2x^2 - 5x - 1 = 0$.

Lời giải.Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = 2$. Tích hai nghiệm này là một số dương.Chọn đáp án **C** □**Câu 4.** Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến khi $x < 0$?

A $y = -2x$.

B $y = 3 + (2 - \sqrt{5})x$.

C $y = \sqrt{3}x^2$.

D $y = (\sqrt{3} - 2)x^2$.

Lời giải.Hàm số $y = (\sqrt{3} - 2)x^2$ có hệ số $a = \sqrt{3} - 2 < 0$ nên đồng biến khi $x < 0$.Chọn đáp án **D** □**Câu 5.** Tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng $y = 2x + m + 2$ và $y = (m^2 + 1)x + 1$ song song với nhau là

A $m = 1$.

B $m = -1$.

C $m = \pm 1$.

D $m \in \emptyset$.

Lời giải.

Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2 = m^2 + 1 \\ m + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 6. Nếu tăng bán kính của một hình tròn lên 3 lần thì diện tích hình tròn đó tăng lên gấp
 (A) 3 lần. (B) 6 lần. (C) 9 lần. (D) 27 lần.

Lời giải.

Gọi hình tròn (C) có bán kính R , tăng bán kính lên 3 lần thì được bán kính mới là $R' = 3R$ và diện tích hình tròn (C') mới là

$$S_{(C')} = \pi \cdot R'^2 = \pi \cdot (3R)^2 = 9(\pi R^2) = 9 \cdot S_{(C)}.$$

Vậy diện tích hình tròn mới tăng lên 9 lần.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Một tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là 5 cm, 12 cm, 13 cm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

(A) $\frac{5}{2}$ cm. (B) 5 cm. (C) $\frac{13}{2}$ cm. (D) 13 cm.

Lời giải.

Ta có $13^2 = 5^2 + 12^2 (= 169)$ nên tam giác đã cho là tam giác vuông có cạnh huyền bằng 13 cm. Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\frac{13}{2}$ cm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Hình trụ có bán kính đáy bằng 9 cm, diện tích xung quanh bằng 198π cm². Chiều cao hình trụ đó bằng

(A) 9 cm. (B) 11 cm. (C) 12 cm. (D) 22 cm.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = h \cdot 2\pi R \Leftrightarrow 198\pi = h \cdot 18\pi \Leftrightarrow h = 11$ cm.

Chọn đáp án (B) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. Cho biểu thức $M = \left(\frac{4x}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x^2}$, với $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$.

- Rút gọn M .
- Tìm x để $M < 4$.

Lời giải.

- Điều kiện $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$. Ta có

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{4x}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} \\ &= \frac{4x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} = \frac{4x-1}{x^2}. \end{aligned}$$

- Ta có $x > 0$ nên $x^2 > 0$ khi đó

$$M < 4 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x^2} < 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}.$$

Vậy với $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$, $x \neq 4$ thì $M < 4$. □

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - mx - 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

- Giải phương trình (1) với $m = 3$.
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 17$.

Lời giải.

- Với $m = 3$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 3x - 4 = 0$.
Ta có $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = 4$.
- Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0, \forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lí Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}.$$

Mà

$$x_1^2 + x_2^2 = 17 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 17 \Leftrightarrow m^2 + 8 = 17 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

□

Câu 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{xy} - \frac{4}{\sqrt{xy}} = 3 & (1) \\ x(1 - y) + 15 = 0. & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $xy > 0$.

Đặt $\sqrt{xy} = t, t > 0$. Phương trình (1) trở thành

$$t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (\text{loại}) \\ t = 4. \end{cases}$$

Với $t = 4$, suy ra $\sqrt{xy} = 4 \Leftrightarrow xy = 16$.

Biến đổi phương trình (2) ta được

$$x - xy + 15 = 0 \Leftrightarrow x - 16 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 16.$$

Vậy nghiệm hệ là $(1; 16)$.

□

Câu 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C trên đường tròn ($C \neq A, C \neq B$). Gọi D là một điểm trên cung nhỏ CB ($D \neq C, D \neq B$). E là giao điểm của AD và BC , I là hình chiếu vuông góc của E lên AB , M là giao điểm thứ hai của đường thẳng DI và đường tròn (O) .

- Chứng minh $BDEI$ là tứ giác nội tiếp và $CM \perp AB$.
- Gọi K là giao điểm của BC và DM . Chứng minh $BK \cdot CE = BC \cdot EK$.

Lời giải.

Mà số cái bắt tay bằng ba lần số đại biểu của cả hai trường nên

$$xy = 3(x + y) \Leftrightarrow y(x - 3) = 3x (> 0) \Leftrightarrow y = \frac{3x}{x - 3} = 3 + \frac{9}{x - 3}.$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x - 3 \in \mathcal{U}(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$. Ta có bảng sau

$x - 3$	-9	-3	-1	1	3	9
x	-6	0	2	4	6	12
y			-6	12	6	4
Đối chiếu ĐK	loại	loại	loại	loại	loại	thỏa mãn

Vậy số đại biểu trường A là 12 và số đại biểu trường B là 4. □

Câu 6. Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Lời giải.

Theo BĐT Cô-si (Cauchy, AM-GM) ta có

$$x^3 + y^2 \geq 2\sqrt{x^3 y^2} = 2\sqrt{x} \cdot xy;$$

$$y^3 + z^2 \geq 2\sqrt{y^3 z^2} = 2\sqrt{y} \cdot yz;$$

$$z^3 + x^2 \geq 2\sqrt{z^3 x^2} = 2\sqrt{z} \cdot zx.$$

Do đó

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}. \quad (1)$$

Cũng theo BDT Cô-si ta có

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy}; \quad \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{2}{yz}; \quad \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} \geq \frac{2}{zx}.$$

Cộng vế suy ra

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. □

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN

1.	A	2.	B	3.	C	4.	D	5.	A	6.	C	7.	C	8.	B

109

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, NGHỆ AN

❖❖❖❖ NỘI DUNG ĐỀ ❖❖❖❖

Câu 1.

- So sánh $2\sqrt{3} + \sqrt{27}$ và $\sqrt{74}$.
- Chứng minh đẳng thức $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \frac{x-4}{4} = 1$, với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.
- Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = 3x + m$ đi qua điểm $A(1; 2)$.

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3} + \sqrt{27})^2 &= (2\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} + (\sqrt{27})^2 = 12 + 36 + 27 = 75. \\ (\sqrt{74})^2 &= 74.\end{aligned}$$

Do $75 > 74$ nên $2\sqrt{3} + \sqrt{27} > \sqrt{74}$.

-

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \frac{x-4}{4} &= \frac{\sqrt{x}+2 - \sqrt{x}+2}{x-4} \cdot \frac{x-4}{4} \\ &= \frac{4}{x-4} \cdot \frac{x-4}{4} \\ &= 1.\end{aligned}$$

- Để đồ thị hàm số $y = 3x + m$ đi qua điểm $A(1; 2)$ thì

$$2 = 3 \cdot 1 + m \Leftrightarrow m = 2 - 3 = -1.$$

Vậy $m = -1$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 + 2x + m - 1 = 0$ (*), trong đó m là tham số.

- Giải phương trình (*) khi $m = -2$.
- Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2x_2$.

Lời giải.

- Khi $m = -2$ phương trình trở thành:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$ hoặc $x = 1$ khi $m = -2$.

- Xét phương trình (*) có: $\Delta' = 1^2 - (m - 1) = 2 - m$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thì $\Delta' > 0$ hay $2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

$$\text{Khi đó, áp dụng Vi-ét ta được } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1. \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài } x_1 = 2x_2, \text{ suy ra } 3x_2 = -2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-2}{3}.$$

Do đó $m - 1 = x_1 \cdot x_2 = 2x_2^2 = 2 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow m = \frac{17}{9}$ (thỏa mãn $m < 2$).

Vậy $m = \frac{17}{9}$.

□

Câu 3. Nhân ngày sách Việt Nam, 120 học sinh khối 8 và 100 học sinh khối 9 cùng tham gia phong trào xây dựng "Tủ sách nhân ái". Sau một thời gian phát động, tổng số sách cả hai khối đã quyên góp được là 540 quyển. Biết rằng mỗi học sinh khối 9 quyên góp nhiều hơn mỗi học sinh khối 8 một quyển. Hỏi mỗi khối đã quyên góp được bao nhiêu quyển sách? (Mỗi học sinh trong cùng một khối quyên góp số lượng sách như nhau).

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số quyển sách mà khối 8 và khối 9 quyên góp được (đơn vị: quyển sách; điều kiện: $x > 0; y > 0$).

Vì tổng số sách cả hai khối quyên góp được là 540 quyển nên ta có $x + y = 540$ (quyển sách).

Mỗi học sinh khối 8 quyên góp được $\frac{x}{120}$ (quyển sách).

Mỗi học sinh khối 9 quyên góp được $\frac{y}{100}$ (quyển sách).

Theo đề ra ta có $\frac{y}{100} - \frac{x}{120} = 1$ (quyển sách).

Vậy ta có hệ phương trình

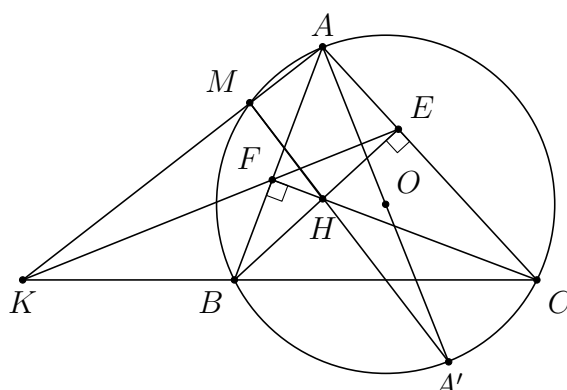
$$\begin{cases} x + y = 540 \\ \frac{y}{100} - \frac{x}{120} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 240 & (\text{TM}) \\ y = 300 & (\text{TM}). \end{cases}$$

Vậy khối 8 đã quyên góp được 240 quyển sách, khối 9 đã quyên góp được 300 quyển sách. □

Câu 4. Cho đường tròn (O) có dây BC cố định không đi qua tâm O . Điểm A di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Các đường cao BE và CF của tam giác ABC (E thuộc AC , F thuộc AB) cắt nhau tại H . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC , đoạn thẳng KA cắt (O) tại điểm M . Chứng minh rằng:

- $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.
- $KM.KA = KE.KF$.
- Đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Lời giải.



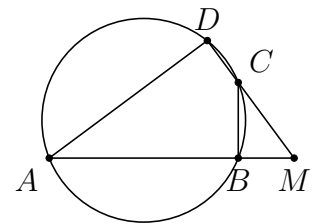
- a) Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên $BFEC$ là tứ giác nội tiếp.
 b) **Bổ đề:** Tứ giác $ABCD$ có tia AB cắt tia DC tại M . Khi đó $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

($\Rightarrow$) Nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp thì $\widehat{MCB} = \widehat{MAB}$, $\widehat{MBC} = \widehat{MDA}$.

Xét $\triangle MBC$ và $\triangle MDA$ có $\widehat{MCB} = \widehat{MAB}$ và $\widehat{MBC} = \widehat{MDA}$.

Suy ra $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ (g-g).

Do đó ta có $\frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD} \Leftrightarrow MC \cdot MD = MB \cdot MA$.



($\Leftarrow$) Nếu $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ thì $\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA}$.

Xét $\triangle MCB$ và $\triangle MAD$ có chung góc $\widehat{DMA}$ và $\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA}$.

Suy ra $\triangle MCB \sim \triangle MAD$ (c-g-c). Do đó $\widehat{MCB} = \widehat{MAD}$. Vì vậy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Áp dụng bổ đề cho tứ giác $BFEC$ ta có $KB \cdot KC = KF \cdot KE$.

Áp dụng bổ đề cho tứ giác $BCAM$ ta có $KB \cdot KC = KM \cdot KA$.

Suy ra $KA \cdot KM = KF \cdot KE$.

- c) Vì $KA \cdot KM = KF \cdot KE$ nên theo bổ đề trên, $AMFE$ nội tiếp.

Mặt khác, $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ nên $AFHE$ nội tiếp.

Do đó, A, M, F, H, E cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$.

Do đó MH đi qua điểm A' cố định, với A' đối xứng với A qua O .

□

Câu 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(2x - 2y + 1) = y \\ y + 2\sqrt{1 - x - 2x^2} = 2(1 + y^2) \end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $1 - x - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Phương trình đầu tiên tương đương với

$$2x^2 - 2xy + x - y = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = y. \end{cases}$$

Nếu $x = -\frac{1}{2}$, thay vào phương trình thứ hai ta có $y + 2 = 2(1 + y^2) \Leftrightarrow y = 2y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Nếu $x = y$, thay vào phương trình thứ hai ta có $y + 2\sqrt{1 - y - 2y^2} = 2 + 2y^2$. (*)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $2\sqrt{1 - y - 2y^2} \leq (1 - y - 2y^2) + 1 = 2 - y - 2y^2$.

Do đó $y + 2\sqrt{1 - y - 2y^2} \leq 2 - y - 2y^2 \leq 2 + 2y^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $y = 0$.

Vì vậy phương trình (*) có nghiệm $y = 0$, và khi đó $x = 0$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thuộc tập $S = \left\{ (0; 0), \left(-\frac{1}{2}; 0\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\}$. □

————— HẾT —————

110**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, NINH BÌNH****◇◇◇◇ NỘI DUNG ĐỀ ◇◇◇◇****Câu 1.** Rút gọn biểu thức: $P = 3\sqrt{5} + \sqrt{20}$.**Lời giải.**

$$P = 3\sqrt{5} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}.$$

Vậy $P = 5\sqrt{5}$. □**Câu 2.** Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2. \end{cases}$$
Lời giải.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (3; 1)$. □**Câu 3.** Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + m$ đi qua điểm $A(0; 3)$.**Lời giải.**Đồ thị hàm số $y = x + m$ đi qua điểm $A(0; 3)$ nên ta có $3 = 0 + m$.Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm. □**Câu 4.** Cho phương trình $x^2 - mx + m - 4 = 0$ (x là ẩn số và m là tham số) (11).a) Giải phương trình (20) khi $m = 8$.b) Chứng minh rằng phương trình (20) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 với mọi m . Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của m để $(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) < 0$.**Lời giải.**a) Với $m = 8$, phương trình (20) trở thành $x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ x = 4 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$ Vậy $m = 8$ thì phương trình có tập nghiệm là $S = \{4 + 2\sqrt{3}; 4 - 2\sqrt{3}\}$.b) Ta có $\Delta = (-m)^2 - 4(m - 4) = m^2 - 4m + 16 = (m - 2)^2 + 12 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (20) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .Theo định lý Vi - ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases} \text{ . Suy ra}$$

$$(5x_1 - 1)(5x_2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 25x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 25(m - 4) - 5m + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 20m - 99 < 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{99}{20}$$

$$\Leftrightarrow m < 4,95.$$

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

□

Câu 5. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2 .

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x, y (cm). Điều kiện $0 < y < x < 14$. Theo đề bài, chu vi của hình chữ nhật là 28 cm nên ta có phương trình

$$2(x + y) = 28. \quad (12)$$

Mặt khác, nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2 , nên ta có phương trình

$$(x + 1)(y + 2) = xy + 25. \quad (13)$$

Từ (12) và (13) ta có hệ phương trình

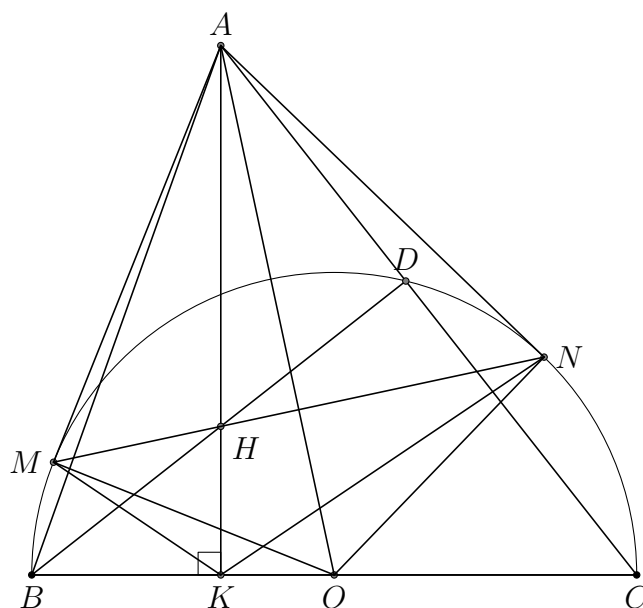
$$\begin{cases} 2(x + y) = 28 \\ (x + 1)(y + 2) = xy + 25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 14 \\ 2x + y = 23. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 5. \end{cases} \quad (\text{tmdk})$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 9 cm, chiều rộng của hình chữ nhật là 5 cm. □

Câu 6. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và đường cao AK . Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm; M và B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AO). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng MN và AK . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.
- KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.
- $AN^2 = AK \cdot AH$.
- H là trực tâm của tam giác ABC .

Lời giải.



a) Do AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$.

Vì AK là đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{AKO} = \widehat{AKC} = 90^\circ$.

Do ba điểm M, K, N cùng nhìn đoạn AO dưới một góc vuông nên năm điểm M, K, N, A, O thuộc đường tròn đường kính AO .

Vậy tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.

b) Vì AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AM = AN$. (14)

Theo chứng minh ở câu a) thì năm điểm M, K, N, O, A cùng thuộc một đường tròn nên ta có tứ giác $AMKN$ nội tiếp. (15)

Từ (14) và (15) suy ra $\widehat{AKM} = \widehat{AKN}$ (các góc nội tiếp cùng chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau).

Vậy KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.

c) Ta có
$$\begin{cases} \widehat{ANH} = \widehat{AKM} \\ \widehat{AKM} = \widehat{AKN} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ANH}.$$

Xét $\triangle AHN$ và $\triangle ANK$ có

- $\widehat{AKN} = \widehat{ANH}$
- $\widehat{HAN} = \widehat{KAN}$

nên $\triangle AHN \sim \triangle ANK$ (g - g).

Suy ra $\frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AN}$, hay $AN^2 = AH \cdot AK$. (16).

d) Gọi D là giao điểm của AC và đường tròn (O) .

Xét $\triangle AND$ và $\triangle ACN$ có $\widehat{NAD} = \widehat{NAC}$, $\widehat{AND} = \widehat{ACN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau) nên $\triangle AND \sim \triangle ACN$ (g-g).

Suy ra $\frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AN}$, hay $AN^2 = AD \cdot AC$. (17)

Từ (16) và (17) suy ra $AH \cdot AK = AD \cdot AC$, hay $\frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AK}$.

$\triangle AHD$ và $\triangle ACK$ có
$$\begin{cases} \widehat{HAD} = \widehat{KAC} \\ \frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AK} \end{cases} \text{ nên } \triangle AHD \sim \triangle ACK \text{ (c-g-c).}$$

Suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$. Dẫn đến $\widehat{HDC} = 90^\circ$. (18)

Điểm D thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BDC} = 90^\circ$. (19)

Từ (18) và (19) suy ra B, H, D thẳng hàng, nghĩa là $BH \perp AC$.

Lại có $AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC .

□

Câu 7. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a + b \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{25}{ab} + ab.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{25}{ab} + ab \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + ab + \frac{16}{ab} + \frac{17}{2ab}. \end{aligned}$$

Với $x; y$ là các số dương ta có bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Từ đó ta có $\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{4}$ (vì $a+b \leq 4$).

Áp dụng bất đẳng thức Co-si cho hai số không âm ta có: $ab + \frac{16}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{16}{ab}} = 8$.

Lại có $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow ab \leq 4 \Rightarrow \frac{17}{2ab} \geq \frac{17}{8}$.

Vậy $S \geq \frac{1}{4} + 8 + \frac{17}{8} = \frac{83}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ ab = \frac{16}{ab} \\ ab = \frac{(a+b)^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng $\frac{83}{8}$ khi $a = b = 2$. □

———— HẾT ————

111**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, PHÚ THỌ****◇◇◇◇ NỘI DUNG ĐỀ ◇◇◇◇****I. PHẦN TRẮC NGHIỆM****Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\sqrt{x-2}$ có nghĩa.

A $x \geq 2$.

B $x > 2$.

C $x \leq 2$.

D $x \geq 0$.

Lời giải.Điều kiện xác định $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.Chọn đáp án **A** □**Câu 2.** Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc nhất?

A $y = \sqrt{x+2}$.

B $y = \frac{2}{x} + 1$.

C $y = -2x + 1$.

D $y = x^2$.

Lời giải.Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).Chọn đáp án **C** □**Câu 3.** Tìm m biết điểm $A(1; -2)$ thuộc đường thẳng có phương trình $y = (2m-1)x + 3 + m$.

A $m = -\frac{5}{3}$.

B $m = \frac{5}{3}$.

C $m = \frac{4}{3}$.

D $m = -\frac{4}{3}$.

Lời giải.Thay $x = 1, y = -2$ vào phương trình $y = (2m-1)x + 3 + m$ ta được $m = -\frac{4}{3}$.Chọn đáp án **D** □**Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (2m-1)x + 2 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $m > 0$.

B $m < 0$.

C $m < \frac{1}{2}$.

D $m > \frac{1}{2}$.

Lời giải.Hàm số $y = (2m-1)x + 2 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.Chọn đáp án **D** □**Câu 5.** Hàm số nào dưới đây đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$?

A $y = -3x + 1$.

B $y = x - 3$.

C $y = x^2$.

D $y = -3x^2$.

Lời giải.

Ta có

- $y = -3x + 1$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì đây là hàm số bậc nhất có hệ số $a < 0$.
- $y = x - 3$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì đây là hàm số bậc nhất có hệ số $a > 0$.
- $y = x^2$ đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$ vì đây là hàm số bậc hai có hệ số $a > 0$.
- $y = -3x^2$ nghịch biến khi $x > 0$ và đồng biến khi $x < 0$ vì đây là hàm số bậc hai có hệ số $a < 0$.

Chọn đáp án **D** □**Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm.

A $m < -2$.

B $m \geq -2$.

C $m > -2$.

D $m \leq -2$.

Lời giải.Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow 2m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -2.$$

Chọn đáp án **A** □**Câu 7.** Phương trình nào dưới đây có tổng hai nghiệm bằng 3?

A $2x^2 + 6x + 1 = 0$.

B $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

C $x^2 + 3x - 2 = 0$.

D $x^2 - 3x + 4 = 0$.

Lời giải.

Xét các trường hợp:

- $2x^2 + 6x + 1 = 0$ có $\Delta' = 7$ và tổng hai nghiệm bằng -3 .
- $2x^2 - 6x + 1 = 0$ có $\Delta' = 7$ và tổng hai nghiệm bằng 3 .
- $x^2 - 3x + 4 = 0$ có $\Delta = -7$ (vô nghiệm).
- $x^2 + 3x - 2 = 0$ có $\Delta = 17$ và tổng hai nghiệm bằng -3 .

Chọn đáp án **B** □**Câu 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\cos B = \frac{AB}{BC}$.

B $\cos B = \frac{AC}{AB}$.

C $\cos B = \frac{AB}{AC}$.

D $\cos B = \frac{AC}{BC}$.

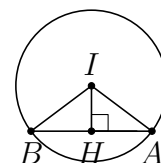
Lời giải.Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\cos B = \frac{AB}{BC}$.Chọn đáp án **A** □**Câu 9.** Khẳng định nào dưới đây **sai**?**A** Mọi hình thang cân đều là tứ giác nội tiếp.**B** Mọi hình thoi đều là tứ giác nội tiếp.**C** Mọi hình chữ nhật đều là tứ giác nội tiếp.**D** Mọi hình vuông đều là tứ giác nội tiếp.**Lời giải.**Một tứ giác là tứ giác nội tiếp nếu tổng hai góc đối bằng 180° , do vậy hình thoi không là tứ giác nội tiếp.Chọn đáp án **B** □**Câu 10.** Cho đường tròn tâm I , bán kính $R = 5$ cm và dây cung $AB = 6$ cm. Tính khoảng cách d từ I tới đường thẳng AB .

A $d = 4$ cm.

B $d = \sqrt{34}$ cm.

C $d = 2$ cm.

D $d = 1$ cm.

Lời giải.Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$ và $HA = 3$ cm.Xét tam giác vuông IHA có $d = IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = 4$ (cm).Chọn đáp án **A** □**II. PHẦN TỰ LUẬN**

Câu 1. Hai bạn Hòa và Bình có 100 quyển sách. Nếu Hòa cho Bình 10 quyển sách thì số quyển sách của Hòa bằng $\frac{3}{2}$ số quyển sách của Bình. Hỏi lúc đầu mỗi bạn có bao nhiêu quyển sách?

Lời giải.

Gọi số quyển sách ban đầu của Hòa là x (quyển) ($10 < x < 100, x \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ số quyển sách ban đầu của Bình là $100 - x$ (quyển).

Gọi số quyển sách của Hòa sau khi cho Bình 10 quyển là $x - 10$ (quyển)

$\Rightarrow$ số quyển sách của Bình sau khi nhận của Hòa 10 quyển là $100 - x + 10 = 110 - x$ (quyển).

Theo đề bài ta có phương trình:

$$x - 10 = \frac{3}{2}(110 - x) \Leftrightarrow 2x - 20 = 330 - 3x \Leftrightarrow 5x = 350 \Leftrightarrow x = 70 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy ban đầu Hòa có 70 quyển sách và Bình có 30 quyển sách. □

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng d đi qua $A(3; 7)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình $y = 3x + 1$.

a) Viết phương trình đường thẳng d .

b) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol $(P): y = x^2$.

Lời giải.

a) Giả sử phương trình đường thẳng d có dạng $y = kx + b$. Vì $d \parallel \Delta$ nên $k = 3$.

Do d đi qua điểm $A(3; 7)$ nên $3k + b = 7 \Leftrightarrow 3 \cdot 3 + b = 7 \Leftrightarrow b = -2$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y = 3x - 2$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) là

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

• Với $x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ ta có điểm $M(1; 1)$.

• Với $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow$ ta có điểm $N(2; 4)$.

Vậy đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm $M(1; 1)$ và $N(2; 4)$. □

Câu 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới $(O; R)$ (với A, B là các tiếp điểm). Đường thẳng d bất kỳ đi qua M và cắt $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt C, D (C nằm giữa M và D). Gọi N là giao điểm của AB và CD .

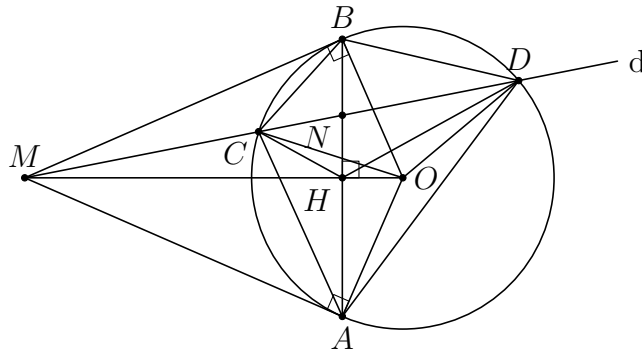
a) Chứng minh rằng tứ giác $OAMB$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\triangle ANC$ và $\triangle DNB$ đồng dạng, $\triangle AMC$ và $\triangle DMA$ đồng dạng.

c) Chứng minh rằng $\frac{MC}{MD} = \frac{NC}{ND}$.

d) Xác định vị trí của đường thẳng d để $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ND}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



- a) Vì MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$.
 Xét tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$ nên $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.
 b) Xét tam giác ANC và tam giác DNB có $\widehat{CAN} = \widehat{NDB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{CB}$) và $\widehat{ANC} = \widehat{DNB}$ (đối đỉnh), do đó $\triangle ANC \sim \triangle DNB$ (g-g).
 Xét tam giác AMC và tam giác DMA có $\widehat{AMD}$ chung và $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung $\widehat{AC}$), do đó $\triangle MAC \sim \triangle MDA$ (g-g).
 c) Vì $\triangle MAC \sim \triangle MDA$ nên $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC \cdot MD$.
 Gọi H là giao điểm của AB và $MO \Rightarrow AB \perp MO$ tại H .
 Xét tam giác MAO vuông tại A có AH là đường cao nên

$$MA^2 = MH \cdot MO \Rightarrow MC \cdot MD = MH \cdot MO \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}.$$

Xét tam giác MCH và tam giác MOD có

$$\frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD} \text{ và } \widehat{OMD} \text{ chung nên } \triangle MCH \sim \triangle MOD \text{ (g-g)} \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}.$$

Xét tứ giác $CHOD$ có $\widehat{MHC} = \widehat{CDO} \Rightarrow \widehat{OHC} + \widehat{CDO} = 180^\circ \Rightarrow CHOD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DHO} = \widehat{DCO}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{DO}$).

Lại có tam giác COD cân tại O nên $\widehat{ODC} = \widehat{OCD} \Rightarrow \widehat{DHO} = \widehat{CHM}$ (vì cùng bằng $\widehat{CDO}$).
 Mà $HM \perp HN$ (do $AB \perp MO$ tại H) $\Rightarrow \widehat{NHC} = \widehat{NHD} = 90^\circ - \widehat{CHM}$, do đó NH là tia phân giác trong của góc $\widehat{CHD}$.

Vì $HN \perp HM$ nên MH là tia phân giác ngoài của góc $\widehat{CHD} \Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{NC}{ND} = \frac{HC}{HD}$.

d) Xét

$$\begin{aligned} CD \left(\frac{1}{MD} + \frac{1}{ND} \right) &= \frac{CD}{MD} + \frac{CD}{ND} = \frac{MD - CM}{MD} + \frac{CN + ND}{ND} \\ &= 1 - \frac{CM}{MD} + 1 + \frac{CN}{ND} = 2 \left(\text{do } \frac{MC}{MD} = \frac{NC}{ND} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{MD} + \frac{1}{ND} = \frac{2}{CD}.$$

$$\text{Vì } CD \text{ là dây cung nên } CD \leq 2R \Rightarrow \frac{1}{MD} + \frac{1}{ND} \geq \frac{2}{2R} = \frac{1}{R}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $CD = 2R \Leftrightarrow d$ đi qua tâm O .

Vậy $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ND}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi d đi qua tâm O .

□

Câu 4. Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn $a^{2018} + b^{2018} = a^{2020} + b^{2020}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a + 1)^2 + (b + 1)^2$.

Lời giải.

Ta có $P \leq 2(a^2 + 1) + 2(b^2 + 1) = 2(a^2 + b^2) + 4$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\begin{aligned} a^{2020} + a^{2020} + \cdots + 1 + 1 &\geq 2020a^{2018} \text{ (có 2018 số } a^{2020}) \\ b^{2020} + b^{2020} + \cdots + 1 + 1 &\geq 2020b^{2018} \text{ (có 2018 số } b^{2020}). \end{aligned}$$

Suy ra

$$2018(a^{2020} + b^{2020}) + 4 \geq 2020(a^{2018} + b^{2018}).$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 2018(a^{2020} + b^{2020}) + 4 &\geq 2020(a^{2018} + b^{2018}) \\ \Leftrightarrow 2018(a^{2018} + b^{2018}) + 4 &\geq 2020(a^{2018} + b^{2018}) \\ \Leftrightarrow a^{2018} + b^{2018} &\leq 2. \end{aligned}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\begin{aligned} a^{2018} + 1 + 1 + \cdots + 1 &\geq 1009a^2 \text{ (có 1008 số 1)} \\ b^{2018} + 1 + 1 + \cdots + 1 &\geq 1009b^2 \text{ (có 1008 số 1)}. \end{aligned}$$

Do đó

$$1009(a^2 + b^2) \leq 2016 + a^{2018} + b^{2018} \leq 2018 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 2.$$

Từ đó ta có

$$P \leq 2(a^2 + b^2) + 4 \leq 2 \cdot 2 + 4 = 8.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 8 khi và chỉ khi $a = b = 1$. □

————— **HẾT** —————

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. D	5. D
6. A	7. B	8. A	9. B	10. A

112**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, PHÚ YÊN****✦✦✦ NỘI DUNG ĐỀ ✦✦✦****I. PHẦN TRẮC NGHIỆM**

Học sinh chọn một phương án đúng nhất ở mỗi câu và viết phương án chọn vào bài làm (Ví dụ: Câu 1: A, Câu 2: B; Câu 3: D; ...).

Câu 1. Tìm x để biểu thức $\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}}$ có nghĩa.

(A) $x \geq 2$.

(B) $x > 2$.

(C) $x \neq -2$.

(D) $x \neq 2$.

Lời giải.

Biểu thức có nghĩa khi $\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ \sqrt{(x-2)^2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc nhất?

(A) $y = ax + b$.

(B) $y = 1 - 2x$.

(C) $y = x^2 + 1$.

(D) $y = \frac{1}{x}$.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Theo khái niệm trên thì đáp án đúng là $y = 1 - 2x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Cặp số nào sau đây **không phải** là nghiệm của phương trình $x + 2y = -1$?

(A) $(1; -1)$.

(B) $(-1; 0)$.

(C) $(0; \frac{1}{2})$.

(D) $(3; -2)$.

Lời giải.

Thay tọa độ từng điểm vào phương trình trên ta thấy $(0; \frac{1}{2})$ không thỏa.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Hệ phương trình nào sau đây **vô nghiệm**?

(A) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 5 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2y = 4x - 6 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Xét trong các đáp án ta thấy hệ phương trình có dạng $\begin{cases} y = a_1x + b_1 & (d_1) \\ y = a_2x + b_2 & (d_2) \end{cases}$.

Nghiệm của hệ phương trình là số giao điểm của đường thẳng (d_1) và (d_2) .

Đề bài yêu cầu hệ phương trình vô nghiệm nên $(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$. Nhìn vào các đáp án,

chỉ có đáp án $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ thỏa.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a > 0$). Kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) Hàm số đồng biến với mọi x . (B) Hàm số nghịch biến với mọi x .
(C) Hàm số đồng biến khi $x > 0$. (D) Hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = ax^2$ có

- Với $a > 0$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.
- Với $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Phương trình nào sau đây có hai nghiệm phân biệt?

- (A) $x^2 + 3x - 4 = 0$. (B) $x^2 + 2x + 1 = 0$. (C) $x^2 + x + 1 = 0$. (D) $x^2 + 1 = 0$.

Lời giải.

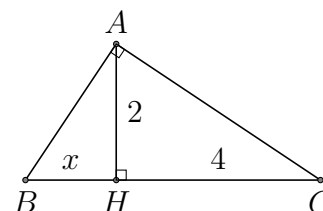
Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$.

Tính Δ từng đáp án, ta thấy đáp án $x^2 + 3x - 4 = 0$ thỏa.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7.

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AH = 2$, $HC = 4$. Đặt $BH = x$ (hình bên). Tính x .



- (A) $x = \frac{1}{2}$. (B) $x = 1$. (C) $x = \frac{16}{3}$. (D) $x = 4$.

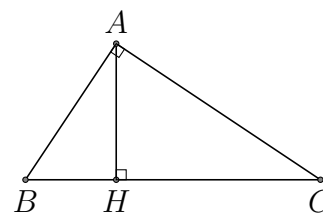
Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A với đường cao AH có $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow x = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8.

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (hình bên). Đẳng thức nào sau đây là **sai**?



- (A) $\sin B = \frac{AH}{AB}$. (B) $\tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH}$. (C) $\cos C = \frac{HC}{AC}$. (D) $\cot \widehat{HAC} = \frac{AH}{AC}$.

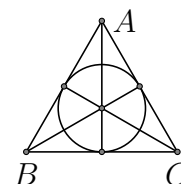
Lời giải.

$\triangle AHC$ vuông tại H có $\cot \widehat{HAC} = \frac{AH}{HC}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9.

Tính chu vi C của tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{3}$ cm (hình bên).



(A) $C = 9 \text{ cm.}$

(B) $C = 9\sqrt{3} \text{ cm.}$

(C) $C = 18 \text{ cm.}$

(D) $C = 18\sqrt{3} \text{ cm.}$

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$; AI cắt BC tại H .

Suy ra I là trọng tâm của $\triangle ABC$; AH là phân giác trong và cũng là đường cao, đường trung tuyến của $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow IH = \frac{1}{3}AH \text{ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác)}$$

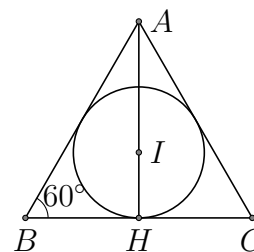
$$\Rightarrow AH = 3IH = 3\sqrt{3} \text{ (cm).}$$

$$\triangle ABH \text{ vuông tại } H \text{ có } \sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = 6 \text{ cm.}$$

Vậy chu vi tam giác đều ABC là $C = 3AB = 18 \text{ cm.}$

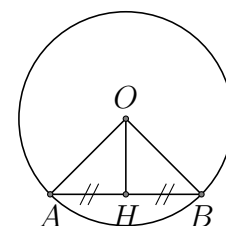
Chọn đáp án (C)

□



Câu 10.

Cho đường tròn tâm O đường kính 10 cm. Gọi H là trung điểm của dây AB (hình bên). Tính độ dài đoạn OH , biết $AB = 6 \text{ cm.}$



(A) $OH = 4 \text{ cm.}$

(B) $OH = 8 \text{ cm.}$

(C) $OH = 16 \text{ cm.}$

(D) $OH = 64 \text{ cm.}$

Lời giải.

Do (O) có đường kính 10 cm nên $OA = 5 \text{ cm.}$

Xét (O) ta có H là trung điểm của dây cung $AB \Rightarrow OH \perp AB$ tại H (quan hệ đường kính và dây cung).

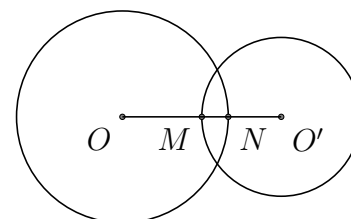
$$\text{Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác } OAH \text{ vuông tại } H \text{ có } OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow OH = 4 \text{ cm.}$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 11.

Cho đường tròn $(O, 6 \text{ cm})$ và đường tròn $(O', 5 \text{ cm})$ có đoạn nối tâm $OO' = 8 \text{ cm.}$ Biết đường tròn (O) và (O') cắt OO' lần lượt tại N, M (hình bên). Tính độ dài MN .



(A) $MN = 4 \text{ cm.}$

(B) $MN = 3 \text{ cm.}$

(C) $MN = 2 \text{ cm.}$

(D) $MN = 1 \text{ cm.}$

Lời giải.

$$\bullet OM + MN = ON \Rightarrow OM + MN = 6.$$

$$\bullet O'N + MN = O'M \Rightarrow O'N + MN = 5.$$

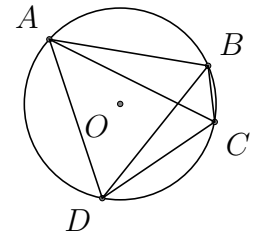
$$\text{Suy ra } OM + MN + O'N + MN = 11 \Rightarrow OO' + MN = 11 \Rightarrow MN = 3 \text{ cm.}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 12.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O (hình bên). Khẳng định nào sau đây **không đúng**?



A $\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$.

C $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$.

B $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

D $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{ADC} + \widehat{CBA} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$ sai.

Chọn đáp án **A**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1.

a) So sánh 5 và $2\sqrt{6}$.

b) Giải phương trình $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $5 = \sqrt{25}$ và $2\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{24}$.

Vì $25 > 24$ nên $\sqrt{25} > \sqrt{24}$. Suy ra $5 > 2\sqrt{6}$.

b) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình trở thành

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t - 5)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 5 \text{ (nhận) hay } t = -1 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Với } t = 5 \text{ thì } x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \text{ hay } x = \sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.$$

□

Câu 2. Cho phương trình $4x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (m là tham số).

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm kép?

b) Trong trường hợp phương trình có nghiệm, dùng hệ thức Vi-ét, hãy tính tổng các bình phương hai nghiệm của phương trình.

Lời giải.

a) $\Delta' = (m+1)^2 - 4m^2 = -3m^2 + 2m + 1$.

$$\text{Phương trình có nghiệm kép} \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{1}{3}.$$

b) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 \geq 0$.

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m^2}{4} \end{cases}.$$

Tổng bình phương các nghiệm của phương trình là

$$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{(m+1)^2}{4} - \frac{2m^2}{4} = \frac{-m^2 + 2m + 1}{4}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{-m^2 + 2m + 1}{4} \text{ với điều kiện } -3m^2 + 2m + 1 \geq 0.$$

□

Câu 3. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 3 giờ bể đầy nước. Nếu chỉ mở một vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ 30 phút. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

Lời giải.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ) ($x > 0$).

Gọi thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y (giờ) ($y > 0$).

Khi đó, mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể và vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Vì nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 3 giờ bể đầy nên mỗi giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{3}$ bể. Do đó ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ (1).

Vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ 30 phút = $\frac{5}{2}$ (giờ) nên ta có phương trình $x + \frac{5}{2} = y$ (2).

Thay (2) vào (1) ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{5}{2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 5$ (nhận) hay $x = -\frac{3}{2}$ (loại).

Suy ra $y = 5 + \frac{5}{2} = 7,5$ (nhận).

Vậy thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là 5 giờ, thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 7,5 giờ. $\square$

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn tại A . C là điểm chuyển động trên đường thẳng d . BC cắt (O) tại D ($D \neq B$). Gọi E là trung điểm của BD .

- Chứng minh rằng $OACE$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng $BE \cdot BC = 2R^2$.
- Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC .

Lời giải.

- Chứng minh rằng $OACE$ là tứ giác nội tiếp.

Vì E là trung điểm của BD nên $OE \perp BD$ (quan hệ đường kính và dây cung).

Xét tứ giác $OACE$ có $\widehat{OAC} + \widehat{OEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OACE$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

- Chứng minh rằng $BE \cdot BC = 2R^2$.

Xét $\triangle BOE$ và $\triangle BCA$ có $\begin{cases} \widehat{ABC} \text{ chung} \\ \widehat{BEO} = \widehat{BAC} = 90^\circ \end{cases}$.

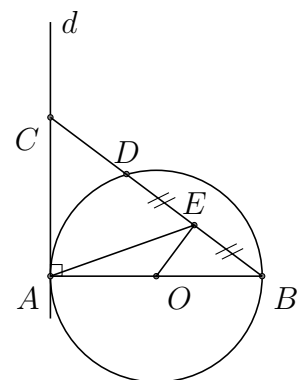
$\Rightarrow \triangle BOE \sim \triangle BCA$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BO}{BC} \Rightarrow BE \cdot BC = BA \cdot BO = 2R \cdot R = 2R^2$.

- Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC .

Ta có tứ giác $OACE$ nội tiếp $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OACE$.

$\Rightarrow$ Tâm I thuộc đường trung trực của OA .



Mà OA cố định nên trung trực của OA cố định.

Suy ra khi C di chuyển trên đường thẳng d thì tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE di chuyển trên trung trực của OA .

Vậy tập hợp các điểm I cần tìm là đường trung trực của OA .

□

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. C	4. B	5. C
6. A	7. B	8. D	9. C	10. A
11. B	12. A			

113**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, QUẢNG NGÃI****✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧**

Câu 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 2y = 8. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(1; 3)$. □

Câu 2. Giải phương trình $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x = -2, x = -3$. □

Câu 3. Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = -x + 2$.

- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
- Xác định m để (P) , (d) và đường thẳng $(d') : y = 5mx + 6$ cùng đi qua một điểm.

Lời giải.

- Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (1; 1) \\ (x; y) = (-2; 4). \end{cases}$$

Tọa độ các giao điểm là $(1; 1), (-2; 4)$.

- Để (P) , (d) và (d') đi qua cùng một điểm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 = 5m \cdot 1 + 6 \\ 4 = 5m \cdot (-2) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{-1; \frac{1}{5}\right\}$. □

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ với m là tham số.

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm các giá trị nguyên của m để biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta = 4m^2 - 4(2m - 3) = 4m^2 - 8m + 12 = 4(m^2 - 2m + 3) = 4[(m - 1)^2 + 2] > 0, \quad \forall m$.
 Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
- b) Theo định lí Vi-ét có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3. \end{cases}$$

Xét $m \in \mathbb{Z}$. Khi đó, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2m}{2m - 3} = \frac{2m - 3 + 3}{2m - 3} = 1 + \frac{3}{2m - 3}$.

Biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị là một số nguyên khi và chỉ khi $2m - 3 \in \{\pm 1; \pm 3\}$.

Xét các trường hợp sau

- $2m - 3 = 1 \Leftrightarrow m = 2$.
- $2m - 3 = -1 \Leftrightarrow m = 1$.
- $2m - 3 = 3 \Leftrightarrow m = 3$.
- $2m - 3 = -3 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

□

Câu 5. Một trường học A có tổng số giáo viên là 80. Hiện tại, tuổi trung bình của giáo viên là 35. Trong đó, tuổi trung bình của giáo viên nữ là 32 và tuổi trung bình của giáo viên nam là 38. Hỏi trường học đó có bao nhiêu giáo viên nữ và bao nhiêu giáo viên nam?

Lời giải.

- Gọi số giáo viên nam của trường là x (giáo viên), ($0 < x < 80, x \in \mathbb{N}$).
- Gọi số giáo viên nữ của trường là y (giáo viên), ($0 < y < 80, y \in \mathbb{N}$).

Khi đó, ta có $x + y = 80$. (1)

Tuổi trung bình của giáo viên nam là 38 nên tổng số tuổi của x giáo viên nam là $38x$ tuổi.

Tuổi trung bình của giáo viên nữ là 32 nên tổng số tuổi của y giáo viên nữ là $32y$ tuổi.

Tổng số tuổi của giáo viên toàn trường là $80 \cdot 35 = 2800$ (tuổi).

Theo đề bài ta có phương trình $38x + 32y = 2800 \Leftrightarrow 19x + 16y = 1400$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ 19x + 16y = 1400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 40. \end{cases}$$

Vậy trường đó có 40 giáo viên nam và 40 giáo viên nữ. □

Câu 6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O, R) . Các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh các tứ giác $BFHD, BFEC$ nội tiếp.
- b) Chứng minh $BD \cdot BC = BH \cdot BE$.
- c) Kẻ AD cắt cung BC tại M . Chứng minh D là trung điểm của MH .
- d) Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC theo R .

Lời giải.

a) Vì $BF \perp CF$ và $BD \perp AD$ nên

$$\widehat{HFB} + \widehat{BDH} = 180^\circ.$$

Do đó, tứ giác $BFHD$ nội tiếp đường tròn. Vì

$BF \perp CF$ và $BE \perp AC$ nên

$$\widehat{CFB} = \widehat{BEC} = 90^\circ.$$

Do đó, tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn.

Xét tam giác BHD và tam giác BEC có:

$$\widehat{EBC} \text{ chung; } \widehat{BDH} = \widehat{BEC} = 90^\circ.$$

Vậy $\triangle BHD \sim \triangle BCE$. Suy ra $\frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BE}$
hay $BD \cdot BC = BH \cdot BE$.

$$\text{b) Vì } \begin{cases} \widehat{EBC} + \widehat{ACB} = 90^\circ \\ \widehat{DAC} + \widehat{ACB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{DAC}.$$

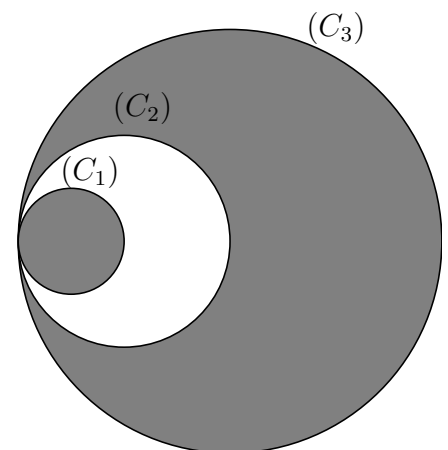
Mà $\widehat{DAC} = \widehat{MBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC). Suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{EBC}$.

Hay BC là phân giác của góc MBE . Xét tam giác MBH có DB là phân giác đồng thời là đường cao. Vậy tam giác BMH cân tại B . Đường cao BD đồng thời là đường trung tuyến nên D là trung điểm của MH .

c) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC là $(K; R')$. Theo câu b) ta có BC là đường trung trực của đoạn HM , do đó H đối xứng với M qua đường thẳng BC . Khi H di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC thì M di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Do đó, đường tròn $(K; R')$ đối xứng với đường tròn $(O; R)$ qua BC . Vậy $R' = R$, suy ra độ dài đường tròn $(K; R')$ là $2\pi R$. $\square$

Câu 7.

Cho ba đường tròn C_1, C_2 và C_3 . Biết đường tròn C_1 tiếp xúc với đường tròn C_2 và đi qua tâm của đường tròn C_2 ; đường tròn C_2 tiếp xúc với đường tròn C_3 và đi qua tâm của đường tròn C_3 ; cả ba đường tròn tiếp xúc nhau (như hình vẽ). Tính tỉ số diện tích giữa phần tô đậm và phần không tô đậm (bên trong đường tròn C_3).



Lời giải.

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính các đường tròn $(C_1), (C_2), (C_3)$. Giả sử bán kính $R_1 = 1$, suy ra $R_2 = 2, R_3 = 4$.

Diện tích của các hình tròn $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt là

$$S_1 = \pi R_1^2 = \pi; S_2 = \pi R_2^2 = 4\pi; S_3 = \pi R_3^2 = 16\pi.$$

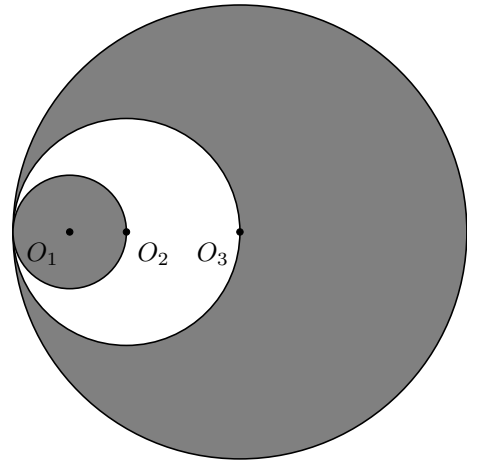
Gọi S, S' lần lượt là diện tích của phần tô đậm và diện tích của phần không tô đậm trong hình vẽ bên.

Diện tích phần tô đậm là

$$S = S_3 - S_2 + S_1 = 16\pi - 4\pi + \pi = 13\pi.$$

Vậy tỉ số diện tích phần tô đậm và phần không tô đậm là $\frac{S}{S'} = \frac{13\pi}{3\pi} = \frac{13}{3}$. □

———— HẾT ————



subsectionĐề thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2018-2019, Quảng Ninh

Câu 1. Thực hiện phép tính: $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$. □

Câu 2. Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} + \frac{9 + x}{9 - x} \right) \cdot (3\sqrt{x} - x)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 9$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} + \frac{9 + x}{9 - x} \right) \cdot (3\sqrt{x} - x) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(3 - \sqrt{x})}{(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})} + \frac{9 + x}{(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})} \right) \cdot (3\sqrt{x} - x) \\ &= \frac{9 + 3\sqrt{x}}{(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})} \cdot \sqrt{x} \cdot (3 - \sqrt{x}) \\ &= 3\sqrt{x}. \end{aligned}$$

□

Câu 3. Xác định các hệ số a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(2; -2)$ và $B(-3; 2)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(2; -2)$ và $B(-3; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = -4 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Vậy $a = -\frac{4}{5}$; $b = -\frac{2}{5}$. □

Câu 4. Giải phương trình: $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$. □

Câu 5. Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 10$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - (m^2 + 3) \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Khi đó, áp dụng định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 3 \end{cases}$.

Vì $x_1 \cdot x_2 = m^2 + 3 > 0$, $\forall m \geq 1$ nên $|x_1 \cdot x_2| = x_1 \cdot x_2 = m^2 + 3$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} |x_1| + |x_2| = 10 &\Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 + 2|x_1 \cdot x_2| + x_2^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 100. \end{aligned}$$

Mà $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ nên ta có

$$4(m+1)^2 = 100 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 & (\text{thỏa mãn}) \\ m = -6 & (\text{loại}). \end{cases}$$

Vậy $m = 4$ thỏa mãn đề bài. □

Câu 6. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một xe ô tô đi từ A đến B theo đường quốc lộ cũ dài 156 km với vận tốc không đổi. Khi từ B về A, xe đi đường cao tốc mới nên quãng đường giảm được 36 km so với lúc đi và vận tốc tăng so với lúc đi là 32 km/h. Tính vận tốc ô tô khi đi từ A đến B, biết thời gian đi nhiều hơn thời gian về là 1 giờ 45 phút.

Lời giải.

Đổi: 1 giờ 45 phút = $\frac{7}{4}$ giờ.

Gọi vận tốc của ô tô khi đi từ A đến B là x km/h ($x > 0$).

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{156}{x}$ giờ.

Quãng đường lúc về là 120 km và vận tốc của ô tô lúc về là $x + 32$ km/h nên thời gian ô tô đi từ B về A là $\frac{120}{x+32}$ giờ.

Theo bài ra ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{156}{x} - \frac{120}{x+32} &= \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{36x + 4992}{x(x+32)} = \frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow 4(36x + 4992) = 7x(x+32) \\ &\Leftrightarrow 7x^2 + 80x - 19968 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 & (\text{thỏa mãn}) \\ x = -\frac{416}{7} & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc của ô tô khi đi từ A đến B là 48 km/h. □

Câu 7. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C không trùng với A và B). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BC ở điểm D . Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng DO . Tia AH cắt đường tròn (O) tại điểm F (không trùng với A). Chứng minh:

a) $DA^2 = DC \cdot DB$.

- b) Tứ giác $AHCD$ nội tiếp.
 c) $CH \perp CF$.
 d) $\frac{BH \cdot BC}{BF} = 2R$.

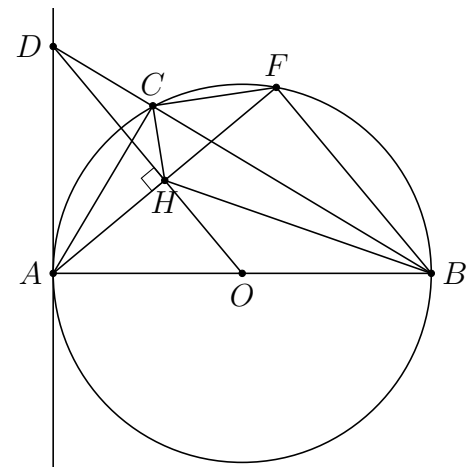
Lời giải.

- a) Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) nên $AC \perp CB$ hay $AC \perp BD$.

Vì AD là tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại A nên $\widehat{DAB} = 90^\circ$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABD ta có $DA^2 = DC \cdot DB$.

- b) Ta có $\widehat{AHD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ nên C, H cùng nhìn cạnh AD dưới một góc vuông nên tứ giác $AHCD$ nội tiếp.



- c) Tứ giác $ADCH$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{HCB} = \widehat{DAH}$.

Mà $\widehat{FCB} = \widehat{FAB}$ nên $\widehat{HCF} = \widehat{HCB} + \widehat{FCB} = \widehat{DAH} + \widehat{FAB} = 90^\circ$, hay $CH \perp CF$.

- d) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ADO ta có $OA^2 = OH \cdot OD$, mà $OA = OB$ nên $OB^2 = OH \cdot OD \Rightarrow \frac{OB}{OH} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow \triangle OBD \sim \triangle OHB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ODB} = \widehat{OBH}$.

Lại có $\widehat{ODB} = \widehat{CAH} = \widehat{CBF} \Rightarrow \widehat{OBH} = \widehat{CBF} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{HBF}$.

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{HFB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HBF \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow \frac{BH \cdot BC}{BF} = AB = 2R$.

□

Câu 8. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy + 1 \leq x$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{x+y}{\sqrt{3x^2 - xy + y^2}}$.

Lời giải.

Ta có $xy + 1 \leq x \Rightarrow y + \frac{1}{x} \leq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$1 \geq y + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{y}{x} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow x - 4y \geq 0.$$

$$\text{Khi đó } Q = \frac{x+y}{\sqrt{3x^2 - xy + y^2}} = \frac{x+y}{\sqrt{\frac{9}{5}(x+y)^2 + \frac{1}{5}(x-4y)(6x+y)}} \leq \frac{x+y}{\sqrt{\frac{9}{5}(x+y)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} xy + 1 = x \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

□

————— HẾT —————

114 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, QUẢNG TRỊ

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Bằng các phép biến đổi đại số hãy rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{45}$.
 b) Giải phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Lời giải.

- a) Ta có $A = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5 \cdot 3^2} = 2\sqrt{5} + 9\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$.
 b) Do $a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = 5$. □

Câu 2. Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = -x + 2$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một hệ trục tọa độ.
 b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị đó bằng phương pháp đại số.

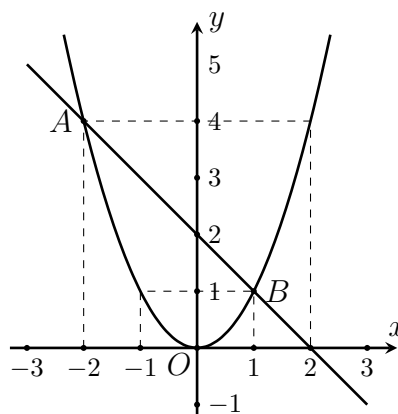
Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số $y = -x + 2$ là đường thẳng d đi qua các điểm $(0; 2)$ và $(2; 0)$.

Ta có bảng giá trị của hàm số $y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là Parabol (P) đi qua các điểm $(-2; 4), (-1; 1); (0; 0), (2; 4), (1; 1)$.



- b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$-x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vậy hai đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm $A(-2; 4)$ và $B(1; 1)$. □

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ (1) (với m là tham số).

- a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.
 b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 - 4 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta' = 1 - m - 3 = -m - 2$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$.

b) Với $m \leq -2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 3. \end{cases}$$

Theo bài ra ta có $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 5x_1 \cdot x_2 - 4 = 0$.

Từ đó suy ra $4 - 5(m + 3) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn điều kiện $m \leq -2$).

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 4. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 360 m^2 . Nếu tăng chiều rộng lên 2 m và giảm chiều dài đi 6 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chu vi của mảnh đất ban đầu.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của mảnh đất đã cho là $x \text{ (m)}$, ($0 < x < 360$).

Gọi chiều dài của mảnh đất đã cho là $y \text{ (m)}$, ($6 < y < 360, y > x$).

Khi đó diện tích của mảnh đất là $x \cdot y = 360 \text{ m}^2$. (1)

Tăng chiều rộng lên 2 m thì chiều rộng mới là $x + 2 \text{ (m)}$.

Giảm chiều dài lên 6 m thì chiều dài mới là $y - 6 \text{ (m)}$.

Theo giả thiết, diện tích của mảnh đất không đổi nên ta có phương trình

$(x + 2)(y - 6) = xy \Leftrightarrow 2y - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow y - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 6 = 0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} xy = 360 \\ y = 3x + 6 \end{cases} \quad (3).$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} xy(3x + 6) = 360 \\ y = 3x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 120 = 0 \\ y = 3x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -12 \text{ (không thỏa mãn)} \\ y = 3x + 6 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} x = 10 \\ y = 36 \end{cases}$ suy ra chu vi của mảnh vườn lúc đầu là $2 \cdot (10 + 36) = 92 \text{ m}$.

□

Câu 5. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 6 \text{ cm}$. Gọi H là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AH = 1 \text{ cm}$. Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB , đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại C và D . Hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại M . Gọi N là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng AB .

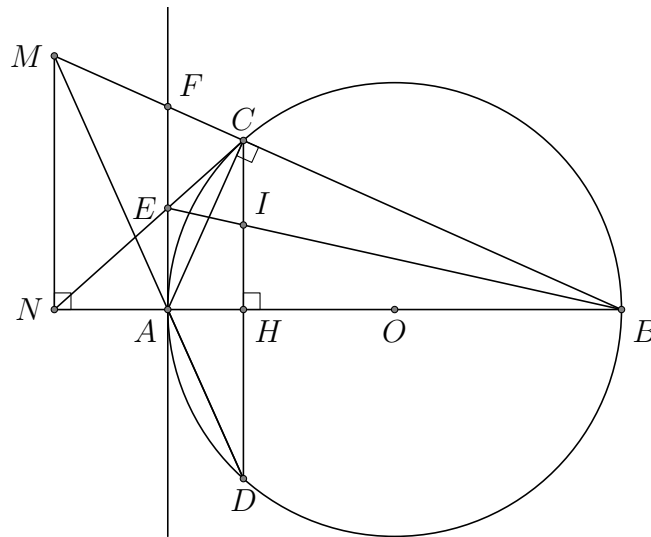
a) Chứng minh tứ giác $MNAC$ nội tiếp.

b) Tính độ dài CH và $\tan \widehat{ABC}$.

c) Chứng minh NC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

d) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt NC ở E . Chứng minh đường thẳng EB đi qua trung điểm của đoạn CH .

Lời giải.



- a) Theo giả thiết ta có $\widehat{ACM} = \widehat{ACB} = 90^\circ$.
 Tứ giác $MNAC$ có $\widehat{ACM} = \widehat{MNA} = 90^\circ$, suy ra $MNAC$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Ta có $BH = AB - AH = 5$ cm.
 Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB có
 $AH^2 = HA \cdot HB = 1 \cdot 5 = 5 \Rightarrow AH = \sqrt{5}$ (cm).
 Từ đó suy ra $\tan \widehat{ABC} = \frac{HA}{HB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
- c) Ta có $MN \perp AB$; $CH \perp AB \Rightarrow MN \parallel CH \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ADC}$.
 Mà $\widehat{AMN} = \widehat{ACN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN), suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{ADC}$.
 Mặt khác $\widehat{ADC}$ là góc nội tiếp chắn cung AC , $\widehat{ACN}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn cung AC nên ta suy ra CN là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm C .
- d) Ta có $EA = EC$. (1)
 Từ (1) ta có tam giác EAC cân tại E , suy ra $\widehat{EAC} = \widehat{ECA}$.
 $\Rightarrow 90^\circ - \widehat{EAC} = 90^\circ - \widehat{ECA} \Leftrightarrow \widehat{EFC} = \widehat{ECF} \Rightarrow \triangle EFC$ cân tại E , suy ra $EC = EF$. (2)
 Từ (1) và (2) ta có $EA = EC = EF$.
 Mặt khác do $AF \perp AB$ và $CH \perp AB$ nên $AF \parallel CH$.
 Gọi I là giao điểm của BE và AF , áp dụng định lý Ta-lét ta có
 $\frac{HI}{AE} = \frac{BI}{BE}$; $\frac{CI}{EF} = \frac{BI}{BE} \Rightarrow \frac{HI}{AE} = \frac{CI}{EF}$.
 Theo giả thiết ta có $AE = EF$, suy ra $HI = CI$. Từ đó ta có I là trung điểm HC .

□

———— HẾT ————

115**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, TÂY NINH****◇◇◇◇ NỘI DUNG ĐỀ ◇◇◇◇**

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $T = \sqrt{16} + 5$.

Lời giải.

Ta có $T = \sqrt{16} + 5 = 4 + 5 = 9$. □

Câu 2. Giải phương trình $2x - 3 = 1$.

Lời giải.

Phương trình $2x - 3 = 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S = \{2\}$. □

Câu 3. Tìm giá trị của m để đường thẳng $d: y = 3x + m - 2$ đi qua điểm $A(0; 1)$.

Lời giải.

Trong phương trình của d , thay $x = 0, y = 1$ ta được

$$1 = 3 \cdot 0 + m - 2 \Leftrightarrow m = 3.$$

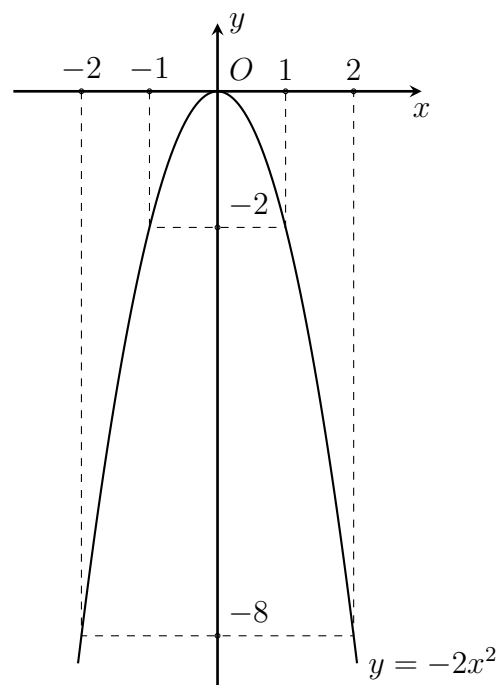
Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 4. Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x^2$.

Lời giải.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8



Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

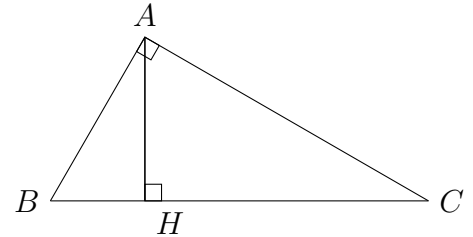
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 11y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 3y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases} \quad \square$$

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ($H \in BC$). Biết $AB = 3a$, $AH = \frac{12a}{5}$. Tính theo a độ dài của AC và BC .

Lời giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{12a}{5}\right)^2} &= \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{AC^2} \\ \Leftrightarrow \frac{25}{144a^2} &= \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{AC^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{16a^2} &= \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow AC^2 = 16a^2 \Rightarrow AC = 4a. \end{aligned}$$



Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A , ta được

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a.$$

$\square$

Câu 7. Tìm giá trị của m để phương trình $2x^2 - 5x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \neq 0 \\ (-5)^2 - 4 \cdot 2(2m - 1) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow 25 - 16m + 8 > 0 &\Leftrightarrow 33 - 16m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{33}{16}. \end{aligned} \quad (1)$$

Theo công thức Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{2m - 1}{2} \end{cases}.$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{2}}{\frac{2m - 1}{2}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{2m - 1} = 1.$$

Giải phương trình trên, ta được nghiệm $m = \frac{3}{2}$, nghiệm này không thỏa mãn điều kiện (1). Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

Câu 8. Một đội máy xúc được thuê đào 20000 m³ đất để mở rộng hồ Dầu Tiếng. Ban đầu đội dự định đào mỗi ngày đào một lượng đất nhất định để hoàn thành công việc, nhưng khi đào được

5000 m³ đất thì đội tăng cường thêm một số máy xúc nên mỗi ngày đào thêm được 100 m³, do đó hoàn thành công việc trong 35 ngày. Hỏi ban đầu đội dự định mỗi ngày đào bao nhiêu m³ đất?

Lời giải.

Gọi x (m³) là lượng đất đội dự định đào trong một ngày, ($x > 0$).

Thời gian đội đào 5000 m³ đất là $\frac{5000}{x}$ (ngày).

Thời gian đội đào phần đất còn lại sau khi tăng số máy là $\frac{20000 - 5000}{x + 100} = \frac{15000}{x + 100}$ (ngày).

Theo đề bài ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{5000}{x} + \frac{15000}{x + 100} &= 35 \\ \Leftrightarrow 5000(x + 100) + 15000x &= 35x(x + 100) \\ \Leftrightarrow 1000(x + 100) + 3000x &= 7x(x + 100) \\ \Leftrightarrow 7x^2 - 3300x - 100000 &= 0. \end{aligned}$$

Xét phương trình bậc hai $x^2 - 3300x - 100000 = 0$ có $a = 7$, $b = -3300$, $c = -100000$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3300)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-100000) = 13690000 > 0.$$

Suy ra phương trình trên có hai nghiệm phân biệt

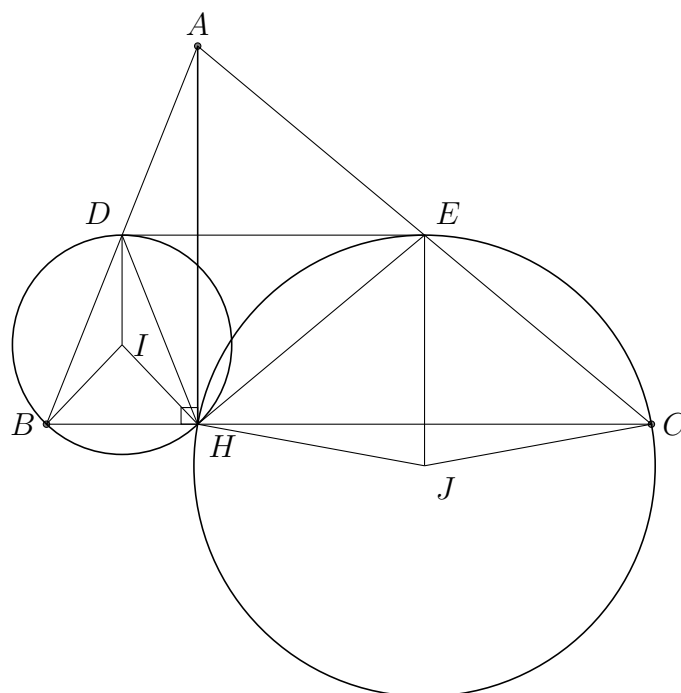
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 500, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{200}{7}.$$

Đối chiếu điều kiện, ta nhận nghiệm $x = 500$.

Vậy mỗi ngày đội đào được 500 m³ đất. □

Câu 9. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) và có đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC . Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn lần lượt ngoại tiếp tam giác DBH và tam giác ECH .

Lời giải.



Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDH$ và $\triangle HEC$.

$\triangle ABH$ vuông tại H có HD là trung tuyến nên $HD = \frac{1}{2}AB = BD$.

Ta có

$$\begin{cases} IB = IH & (I \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp } \triangle BDH) \\ HD = BD & (\text{Chứng minh trên}) \end{cases}$$

$\Rightarrow DI$ là đường trung trực của BH

$\Rightarrow DI \perp BH. \quad (1)$

Xét tam giác ABC có

$$\begin{cases} D \text{ là trung điểm } AB \\ E \text{ là trung điểm } AC \end{cases}$$

$\Rightarrow DE$ là đường trung bình $\triangle ABC$

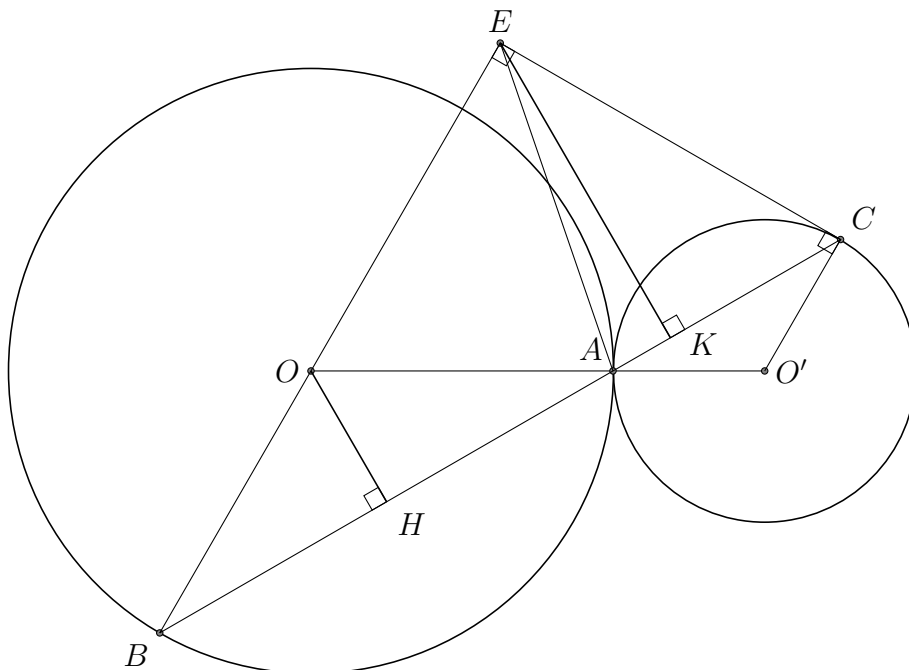
$\Rightarrow DE \parallel BH. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $DE \perp DI$.

Chứng minh tương tự ta cũng được $DE \perp EJ$, vậy DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn lần lượt ngoại tiếp tam giác DBH và tam giác HEC . $\square$

Câu 10. Cho đường tròn tâm O bán kính $2R$ (kí hiệu là $(O, 2R)$) và đường tròn tâm O' bán kính R (kí hiệu là (O', R)) tiếp xúc ngoài tại điểm A . Lấy điểm B trên đường tròn $(O, 2R)$ sao cho $\widehat{BAO} = 30^\circ$, tia BA cắt đường tròn (O', R) tại điểm C (khác điểm A). Tiếp tuyến của đường tròn (O', R) tại điểm C cắt đường thẳng BO tại điểm E . Tính theo R diện tích tam giác ABE .

Lời giải.



Ta có

$$\begin{cases} \widehat{O'AC} = \widehat{OAB} & (\text{hai góc đối đỉnh}) \\ \widehat{O'AC} = \widehat{ACO'} & (\Delta AO'C \text{ cân tại } O') \Rightarrow \widehat{ACO'} = \widehat{ABO} \Rightarrow O'C \parallel BE. \\ \widehat{OAB} = \widehat{OBA} & (\Delta AOB \text{ cân tại } O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{OA}{O'A} = \frac{2R}{R} = 2. \quad (\text{Định lý Ta-lét})$$

Dựng $OH \perp AB$ tại H , ta có

$$\begin{aligned} BH &= OB \cdot \cos B = 2R \cdot 30^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \\ \Rightarrow AB &= 2BH = 2R\sqrt{3} \\ \Rightarrow AC &= \frac{1}{2}AB = R\sqrt{3} \\ \Rightarrow BC &= AB + AC = 3R\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{cases} O'C \parallel BE & (\text{chứng minh trên}) \\ O'C \perp CE & (\text{tính chất tiếp tuyến}) \end{cases} \Rightarrow BE \perp EC.$$

Xét tam giác BEC vuông tại E

$$\begin{cases} EB = BC \cdot \cos B = 3R\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{9R}{2} \\ EC = BC \cdot \sin B = 3R\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}R}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{BEC} = \frac{1}{2}BE \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot \frac{9R}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}R}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{8}R^2.$$

Dựng $EK \perp AC$ tại K . Ta có

$$\frac{S_{AEB}}{S_{BEC}} = \frac{\frac{1}{2}EK \cdot AB}{\frac{1}{2}EK \cdot BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow S_{AEB} = \frac{2}{3}S_{BEC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{8}R^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}R^2.$$

□

———— HẾT ————

116**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, THÁI BÌNH****✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧****Bài 1.** Tìm x để biểu thức sau có nghĩa: $P = \sqrt{5x+3} + 2018\sqrt[3]{x}$.**Lời giải.**Biểu thức P có nghĩa khi $5x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}$.Vậy với $x \geq -\frac{3}{5}$ thì biểu thức P có nghĩa. □**Bài 2.** Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$. Điểm D có hoành độ $x = -2$ thuộc đồ thị hàm số. Tìm tọa độ điểm D .**Lời giải.**Với $x = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(-2)^2 = 2$. Vậy tọa độ điểm $D(-2; 2)$. □**Bài 3.** Tìm giá trị của a và b để đường thẳng $d: y = ax + b - 1$ đi qua hai điểm $A(1; 1)$ và $B(2; 3)$.**Lời giải.**Đường thẳng đi qua hai điểm A và B nên ta có hệ
$$\begin{cases} a + b - 1 = 1 \\ 2a + b - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}.$$
Vậy $a = 2; b = 0$ là giá trị cần tìm. □**Bài 4.** Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - y$ (với $x > 0; y > 0; x \neq y$)a) Rút gọn biểu thức P .b) Chứng minh rằng $P \leq 1$.**Lời giải.**

a) Với điều kiện xác định ta có

$$P = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - y$$

$$P = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} - \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - y$$

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - y$$

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y} - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) - y$$

$$P = 2\sqrt{y} - y.$$

b) Ta có $P \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{y} - y \leq 1 \Leftrightarrow y - 2\sqrt{y} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)^2$ (hiển nhiên). □**Bài 5.** Cho phương trình: $x^2 - 4mx + 4m^2 - 2 = 0$ (1). Giải phương trình (1) khi $m = 1$.**Lời giải.**

Thay $m = 1$, ta có phương trình $x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ và $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. $\square$

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 4mx + 4m^2 - 2 = 0$ (1). Chứng minh rằng với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Giả sử hai nghiệm là x_1, x_2 , khi đó tìm m để $x_1^2 + 4mx_2 + 4m^2 - 6 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (2m)^2 - (4m^2 - 2) = 2 > 0$ với mọi m .

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 4m$.

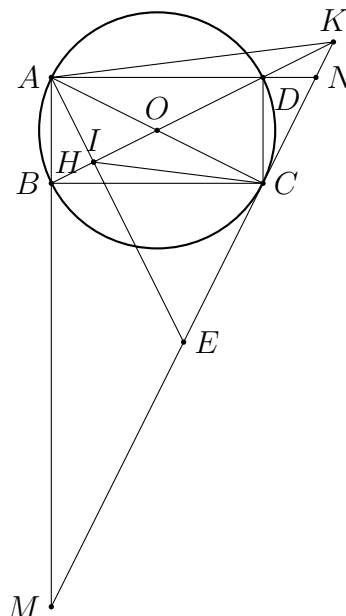
Ta có $x_1^2 + 4mx_2 + 4m^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x_1^2 - 4mx_1 + 4m^2 - 2) + 4m(x_1 + x_2) - 4 = 0$, thay $x_1 + x_2 = 4m$ vào ta được: $0 + 4m \cdot 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.

Vậy $m = \pm \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại điểm C cắt các đường thẳng AB và AD theo thứ tự tại M, N . Dựng AH vuông góc với BD tại điểm H ; K là giao điểm của hai đường thẳng MN và BD .

- Chứng minh tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng: $AD \cdot AN = AB \cdot AM$.
- Gọi E là trung điểm của MN . Chứng minh ba điểm A, H, E thẳng hàng.
- Cho $AB = 6$ cm và $AD = 8$ cm. Tính độ dài đoạn MN .

Lời giải.



- Xét tứ giác $AHCK$ ta có $\widehat{AHK} = 90^\circ$,
 CK là tiếp tuyến của đường tròn O và AC là đường kính nên $AC \perp CK \Rightarrow \widehat{ACK} = 90^\circ$.

Vậy H và C cùng nhìn AK dưới một góc vuông nên tứ giác $AHCK$ nội tiếp một đường tròn.

- b) Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$,
 đồng thời $\widehat{AMN} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AMN}$.
 Xét hai tam giác $\triangle AMN$ và $\triangle ADB$ có $\widehat{DAB} = \widehat{MAN} = 90^\circ$ và $\widehat{ADB} = \widehat{AMN}$,
 Nên hai tam giác $\triangle AMN$ và $\triangle ADB$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot AN = AB \cdot AM$.
- c) Giả sử AE cắt BD tại I , ta chứng minh H trùng với I . Thật vậy
 Ta có $\triangle AMN$ vuông tại A có E là trung điểm của cạnh $MN \Rightarrow \triangle AEN$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{ENA}$.
 Theo chứng minh trên ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AMN}$.
 Do đó $\widehat{EAN} + \widehat{ADB} = \widehat{AMN} + \widehat{ENA} = 90^\circ$ hay $\widehat{AID} = 90^\circ$.
 Suy ra $AI \perp BD$ tại I , do đó H và I trùng nhau hay A, H, E thẳng hàng.
- d) Đặt $AN = x > 0$ và $AM = y > 0$, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$.
 Ta có $\begin{cases} AD \cdot AN = AB \cdot AM \\ \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AC^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{2} \\ y = \frac{50}{3} \end{cases}$.
 Mặt khác $AM \cdot AN = AC \cdot MN \Rightarrow MN = \frac{125}{6} (cm)$.

□

Bài 8. Giải phương trình $3\sqrt{3}(x^2 + 4x + 2) - \sqrt{x+8} = 0$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq -8$, với điều kiện phương trình

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{3}(x^2 + 4x + 2) - \sqrt{x+8} = 0 \\ \Leftrightarrow & 9x^2 + 36x + 18 = \sqrt{3x+24} \\ \Leftrightarrow & 9x^2 + 39x + \frac{169}{4} = 3x + 24 + \sqrt{3x+24} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \left(3x + \frac{13}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+24} + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x + 6 = \sqrt{3x+24} & (1) \\ -3x - 7 = \sqrt{3x+24} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét (1)} \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -2 \\ (3x+6)^2 = 3x+24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x^2 + 11x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-11 + \sqrt{73}}{6}. \\ \text{Xét (2)} \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq -\frac{7}{3} \\ (-3x-7)^2 = 3x+24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{7}{3} \\ 9x^2 + 39x + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-13 + \sqrt{69}}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{-11 + \sqrt{73}}{6}; \frac{-13 + \sqrt{69}}{6} \right\}.$$

□

———— HẾT ————

117**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, THÁI NGUYÊN****✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧****Bài 1.** Không dùng máy tính cầm tay hãy giải phương trình

$$(x - 2018)(x - 2020) = 2018 - x.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}(x - 2018)(x - 2020) &= 2018 - x \Leftrightarrow (x - 2018)(x - 2020) + x - 2018 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2018)(x - 2019) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2018 \text{ (nhận)} \\ x = 2019 \text{ (nhận)}. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2018$ và $x = 2019$. □**Bài 2.** Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} - 2} - \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) = -2. \quad \square$$

Bài 3. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{x - \sqrt{x}}{x - 4} \right) : \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$ với $x > 0, x \neq 4$.**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}P &= \left[\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) - x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{3\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x + 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{3\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}.\end{aligned}$$

□

Bài 4. Cho hàm số bậc nhất $y = mx + 1$ với m là tham số. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 4)$. Với giá trị m vừa tìm được, hàm số đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$.**Lời giải.**Hàm số đi qua điểm $A(1; 4)$ nên $4 = m \cdot 1 + 1 \Rightarrow m = 3$.Vì $m = 3 > 0$ nên hàm số là đồng biến. □

Bài 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 8(x+1) - 2(x+2y) = 18 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 11(x+1) = 22 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy cặp nghiệm $(x; y)$ của phương trình là $(1; -1)$. $\square$

Bài 6. Cho phương trình $x^2 - 4x + 4m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 2^2 - (4m - 3) = 7 - 4m$. Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{4}$.

Với $m \leq \frac{7}{4}$. Theo định lí Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 4m - 3. \end{cases}$$

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = 14 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 14 \Leftrightarrow 4^2 - 2(4m - 3) = 14 \Leftrightarrow m = 1$. $\square$

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , biết $AC = 16$ cm và $\sin \widehat{CAH} = \frac{4}{5}$. Tính độ dài các cạnh BC, AB .

Lời giải.

Trong $\triangle AHC$ vuông tại H ta có

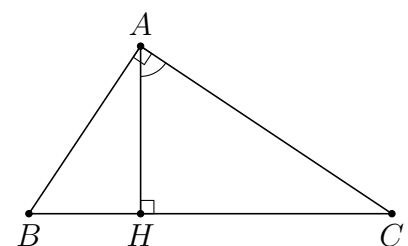
$$\sin \widehat{CAH} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = AC \cdot \sin \widehat{CAH} = 16 \cdot \frac{4}{5} = 12,8 \text{ cm.}$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A ta có

$$AC^2 = BC \cdot HC \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC} = 20 \text{ cm.}$$

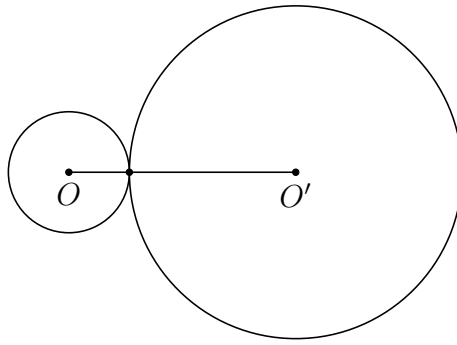
Trong $\triangle ABC$ ta có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 12 \text{ cm.}$

Vậy $AB = 12 \text{ cm, } BC = 20 \text{ cm.}$ $\square$

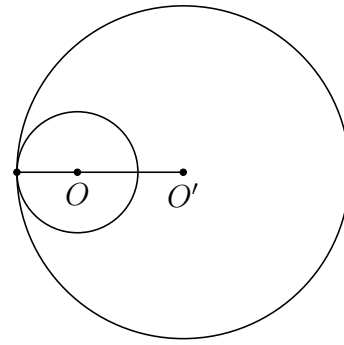


Bài 8. Cho hai đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và $(O'; 11 \text{ cm})$. Biết khoảng cách $OO' = 2a + 3 \text{ cm}$ với a là số thực dương. Tìm a để hai đường tròn tiếp xúc nhau.

Lời giải.



Hình 1



Hình 2

Các trường hợp có thể xảy ra là

- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài (xem hình 1), ta có

$$OO' = R + R' \Leftrightarrow 2a + 3 = 15 \Leftrightarrow a = 6 \text{ cm.}$$

- Hai đường tròn tiếp xúc trong (xem hình 2), ta có

$$OO' = |R - R'| \Leftrightarrow 2a + 3 = |4 - 11| \Leftrightarrow a = 2 \text{ cm.}$$

Vậy $a = 6 \text{ cm}$ và $a = 2 \text{ cm}$

□

Bài 9. Cho đường tròn (O) , dây cung AB không đi qua tâm O . Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$. Vẽ dây cung MC không đi qua O cắt đoạn thẳng AB tại D ($D \neq A$, $D \neq B$). Đường thẳng vuông góc với AB tại D cắt OC tại K . Chứng minh rằng tam giác KCD là tam giác cân.

Lời giải.

Vì M là điểm chính giữa cung AB nên $OM \perp AB$ (1)

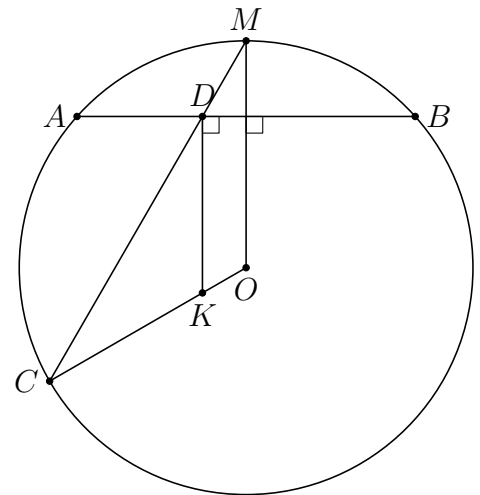
Theo giả thiết thì $DK \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DK \parallel OM$

Suy ra $\widehat{CDK} = \widehat{CMO}$ (đồng vị) (3)

Mà $\triangle OCM$ cân tại O nên $\widehat{CMO} = \widehat{OCM}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{KCD} \Rightarrow \triangle KCD$ cân tại K .



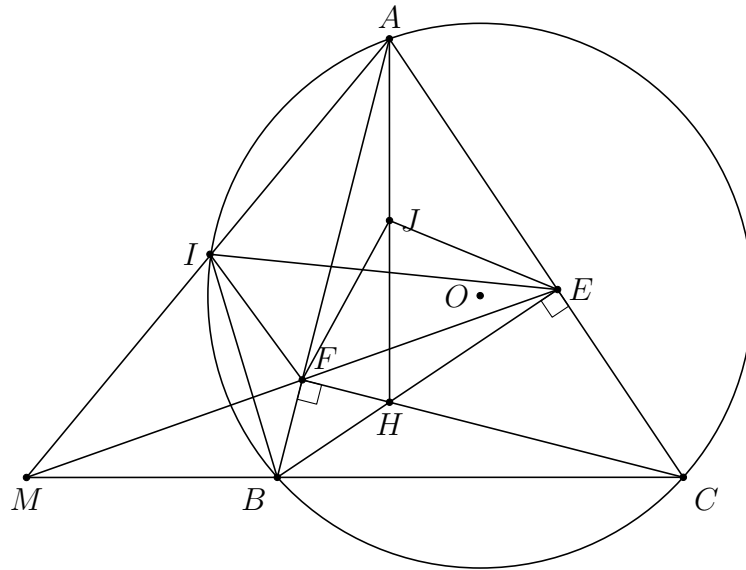
□

Bài 10. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$ nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao BE , CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

- Chứng minh tứ giác $AFHE$ nội tiếp được trong một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

- Gọi M là giao điểm của EF và BC , đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I khác A . Chứng minh tứ giác $AEFI$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Lời giải.



a) Gọi J là trung điểm của AH .

Vì $\triangle AEH$ và $\triangle AFH$ là các tam giác vuông tại E và F nên $EJ = \frac{1}{2}AH = JA = JH = FJ$.

Suy ra $AFHE$ nội tiếp đường tròn J bán kính $\frac{AH}{2}$.

b) Tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow BFEC$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{MFB} = \widehat{MCE}$.

Xét tam giác $\triangle MFB$ và $\triangle MCE$ có $\begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \widehat{MFB} = \widehat{MCE} \end{cases} \Rightarrow \triangle MFB \sim \triangle MCE \text{ (g.g.)}$.

Suy ra $\frac{MF}{MC} = \frac{MB}{ME} \Rightarrow MF \cdot ME = MB \cdot MC$. (1)

Tứ giác $BCAI$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{MCA} = \widehat{MIB}$.

Xét $\triangle MIB$ và $\triangle MCA$ có $\begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \widehat{MIB} = \widehat{MCA} \end{cases} \Rightarrow \triangle MIB \sim \triangle MCA \text{ (g.g.)}$.

Suy ra $\frac{MB}{MA} = \frac{MI}{MC} \Rightarrow MA \cdot MI = MB \cdot MC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ME \cdot MF = MI \cdot MA \Rightarrow \frac{MF}{MA} = \frac{MI}{ME}$.

Xét $\triangle MIF$ và $\triangle MEA$ có $\begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \frac{MF}{MA} = \frac{MI}{ME} \end{cases} \Rightarrow \triangle MIF \sim \triangle MEA \Rightarrow \widehat{MFA} = \widehat{MAE}$.

Từ đây suy ra tứ giác $AEFI$ nội tiếp được một đường tròn.

□

———— HẾT ————

118**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, THANH HÓA****✦✦✦ NỘI DUNG ĐỀ ✦✦✦****Bài 1.**

- a) Giải phương trình $x^2 + 8x + 7 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 5x + y = 20. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 + x) + (7x + 7) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) + 7(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -7. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-1; -7\}$.

- b) Từ phương trình thứ nhất ta có $y = 2x + 6$. Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$5x + (2x + 6) = 20 \Leftrightarrow 7x + 6 = 20 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2.$$

Suy ra $y = 2x + 6 = 2 \cdot 2 + 6 = 10$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 10)$. $\square$

Bài 2. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} : \left(\frac{x}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x} + 2} \right)$, với $x > 0$.

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} : \left(\frac{x}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x} + 2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 2)^2} : \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} + \frac{x}{\sqrt{x} + 2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 2)^2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x}{\sqrt{x} + 2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 2)^2} : \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 2)^2} : \frac{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 2)^2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}. \end{aligned}$$

- b) Ta có

$$\begin{aligned} A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{1}{3} \text{ (do } x > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Vậy để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$ thì $0 < x \leq 1$.

□

Bài 3.

- a) Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a, b để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d'): y = 2x + 3$ và đi qua điểm $A(1; -1)$.
- b) Cho phương trình $x^2 - (m - 2)x - 3 = 0$ (m là tham số). Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m . Tìm m để các nghiệm đó thỏa mãn hệ thức

$$\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2.$$

Lời giải.

- a) Để đường thẳng $(d): y = ax + b$ song song với đường thẳng $(d'): y = 2x + 3$ và đi qua điểm $A(1; -1)$ thì

$$\begin{cases} a = 2; b \neq 3 \\ -1 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2; b \neq 3 \\ b = -1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -3. \end{cases}$$

Vậy $a = 2$ và $b = -3$ là các giá trị cần tìm.

- b) Xét phương trình $x^2 - (m - 2)x - 3 = 0$ (m là tham số). (1)
- Ta có $\Delta = (m - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = (m - 2)^2 + 12 > 0$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m .
 - Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m - 2$ và $x_1 x_2 = -3$. Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x_1^2 + 2018} - \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_1 + x_2 \\ \Rightarrow & \left(\sqrt{x_1^2 + 2018} - \sqrt{x_2^2 + 2018} \right)^2 = (x_1 + x_2)^2 \\ \Leftrightarrow & x_1^2 + 2018 + x_2^2 + 2018 - 2\sqrt{x_1^2 + 2018} \cdot \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \\ \Leftrightarrow & 4036 - 2\sqrt{x_1^2 + 2018} \cdot \sqrt{x_2^2 + 2018} = 2x_1 x_2 \\ \Leftrightarrow & 2018 - \sqrt{x_1^2 + 2018} \cdot \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_1 x_2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x_1^2 + 2018} \cdot \sqrt{x_2^2 + 2018} = 2018 - x_1 x_2 \\ \Rightarrow & (x_1^2 + 2018)(x_2^2 + 2018) = (2018 - x_1 x_2)^2 \\ \Leftrightarrow & x_1^2 x_2^2 + 2018(x_1^2 + x_2^2) + 2018^2 = 2018^2 - 2 \cdot 2018 \cdot x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 \\ \Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 = -2x_1 x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ \Leftrightarrow & m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2. \end{aligned}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

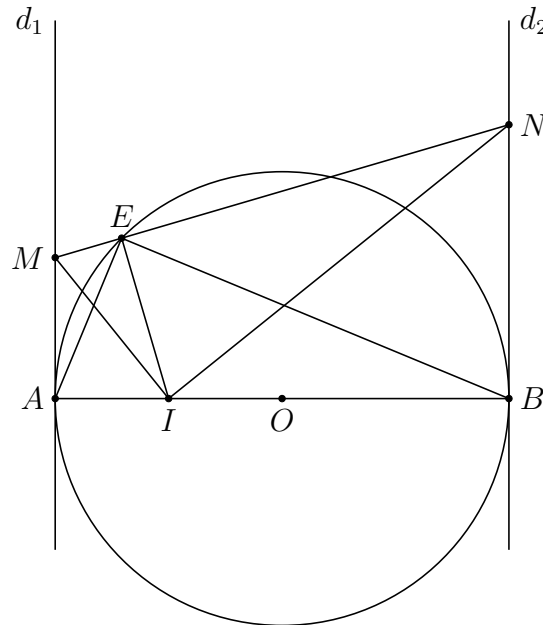
□

Bài 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B , I là trung điểm của đoạn OA , E là điểm thay đổi trên đường tròn (O) sao cho E không trùng với A và B . Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N .

- Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $IB \cdot NE = 3 \cdot IE \cdot NB$.
- Khi điểm E thay đổi, chứng minh tích $AM \cdot BN$ có giá trị không đổi và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MNI theo R .

Lời giải.

- Xét tứ giác $AMEI$ có $\widehat{MAI} = \widehat{MEI} = 90^\circ$, do đó tứ giác $AMEI$ nội tiếp đường tròn đường kính MI .



- Do tứ giác $AMEI$ nội tiếp nên $\widehat{EAI} = \widehat{EMI}$ (cùng chắn cung EI). Mặt khác, $\widehat{EMI} = \widehat{EIN}$ (cùng phụ với $\widehat{EIM}$). Hơn nữa, tứ giác ENB là tứ giác nội tiếp (do $\widehat{IEN} = \widehat{IBN} = 90^\circ$) nên $\widehat{EIN} = \widehat{EBN}$. Từ đó suy ra $\widehat{EAI} = \widehat{EBN}$. (1)

Vì tứ giác ENB là tứ giác nội tiếp đường tròn (do $\widehat{IEN} = \widehat{IBN} = 90^\circ$) nên $\widehat{AIE} = \widehat{BNE}$ (cùng bù với $\widehat{EIB}$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AIE \sim \triangle BNE$ (g.g). Do đó $AI \cdot NE = IE \cdot NB$. Mặt khác do I là trung điểm của AO nên $AI = \frac{1}{3}IB$. Từ đó suy ra $\frac{1}{3}IB \cdot NE = IE \cdot NB$ hay $IB \cdot NE = 3 \cdot IE \cdot NB$.

- Do $AMIE$ và ENB là hai tứ giác nội tiếp (chứng minh trên) nên $\widehat{AMI} = \widehat{AEI}$ (cùng chắn cung AI) và $\widehat{BIN} = \widehat{BEN}$ (cùng chắn cung BN).

Mặt khác, do $\triangle AIE \sim \triangle BNE$ (chứng minh trên) nên $\widehat{AEI} = \widehat{BEN}$. Suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{BIN}$. Do đó $\triangle AMI \sim \triangle BIN$ (g.g).

Từ đó suy ra $AM \cdot BN = AI \cdot BI = \frac{1}{2}R \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}R^2$ (không đổi).

Do $\triangle AMI \sim \triangle BIN$ nên $\widehat{AIM} + \widehat{BIN} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Do đó diện tích tam giác MNI là

$$\begin{aligned} S_{MNI} &= \frac{1}{2}IM \cdot IN = \frac{1}{2}\sqrt{AM^2 + AI^2} \cdot \sqrt{BN^2 + BI^2} \\ &\geq \frac{1}{2}(AM \cdot BN + AI \cdot BI) = AI \cdot BI = \frac{3}{4}R^2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AM \cdot BI = BN \cdot AI$, suy ra $BN = 3AM$. Mà $AM \cdot BN = \frac{3}{4}R^2$ nên $AM \cdot 3AM = \frac{3}{4}R^2$ hay $AM = \frac{R}{2} = AI$ và $BM = \frac{3}{2}R = BI$.
 Vậy diện tích tam giác MNI nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}R^2$ khi E là giao điểm của MN và (O) với $AM = AI$, $BM = BI$ (M và N cùng phía đối với đường thẳng AB).

□

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq 30.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và

$$ab + bc + ca \geq \sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{(abc)^2} = 9abc.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} &\geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} \\ &= \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \right) + \frac{7}{ab + bc + ca} \\ &\geq \frac{9}{(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + (ab + bc + ca)} + \frac{7 \cdot 3}{(a + b + c)^2} \\ &= \frac{9}{(a + b + c)^2} + \frac{21}{(a + b + c)^2} = 9 + 21 = 30. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

□

———— HẾT ————

119**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, THỪA THIÊN HUẾ****◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** (1,5 điểm)

- a) Tìm x để biểu thức $A = \sqrt{2x-1}$ có nghĩa.
- b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{3} (\sqrt{3^2 \cdot 3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{4^2 \cdot 3})$.
- c) Rút gọn biểu thức $C = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-1}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

Lời giải.

- a) $A = \sqrt{2x-1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.
- b) $B = \sqrt{3} (\sqrt{3^2 \cdot 3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{4^2 \cdot 3}) = \sqrt{3} (3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 9$.
- c) $C = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-1} = \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \sqrt{a}-1$.

□

Câu 2. (1,5 điểm)

- a) Giải phương trình $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.
- b) Cho đường thẳng $d: y = (m-1)x + n$. Tìm các giá trị của m và n để đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -1)$ và có hệ số góc bằng -3 .

Lời giải.

- a) Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \text{ (L)} \end{cases}$.

Với $t = 1$ ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- b) Vì đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 nên ta có $m-1 = -3 \Leftrightarrow m = -2$.

Khi đó $d: y = -3x + n$ qua $A(1; -1)$ nên ta có $-1 = -3 \cdot 1 + n \Leftrightarrow n = 2$.

Vậy $m = -2, n = 2$.

□

Câu 3. (1,0 điểm)

Để phục vụ cho Festival Huế 2018, một cơ sở sản xuất nón lá dự kiến làm ra 300 chiếc nón lá trong một thời gian đã dự định. Do được bổ sung thêm nhân công nên mỗi ngày cơ sở đó làm ra được nhiều hơn 5 chiếc nón lá so với dự kiến ban đầu, vì vậy cơ sở sản xuất đã hoàn thành 300 chiếc nón lá sớm hơn 3 ngày so với dự kiến đã định. Hỏi theo dự kiến ban đầu, mỗi ngày cơ sở đó làm ra bao nhiêu chiếc nón lá. Biết rằng số chiếc nón lá làm ra mỗi ngày là bằng nhau và nguyên chiếc.

Lời giải.

Gọi x là số nón lá mà cơ sở đó dự kiến làm ra trong 1 ngày, $x > 0$.

Thời gian làm xong là $\frac{300}{x}$ ngày.

Số nón làm trong thực tế là $x+5$ chiếc.

Thời gian làm trong thực tế là $\frac{300}{x+5}$ ngày.

Theo bài ra ta có $\frac{300}{x} - \frac{300}{x+5} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 15x - 1500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -25 \text{ (L)} \end{cases}$.

Vậy số nón dự định làm ban đầu là 20 chiếc. □

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 + 2mx + m^2 + m = 0$ (1) (với x là ẩn số).

- Giải phương trình (1) với $m = -1$.
- Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 - x_2^2) = 32$$

Lời giải.

- Với $m = -1$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 2x = 0$ (2).

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy khi $m = -1$ phương trình (1) có tập nghiệm là $S = \{0; 2\}$.

- Phương trình $x^2 + 2mx + m^2 + m = 0$ có: $\Delta = (2m)^2 - 4(m^2 + m) = -4m$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy $m < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

- Ta có

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)(x_1^2 - x_2^2) &= 32 \\ \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2) &= 32 \\ \Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2](x_1 + x_2) &= 32 \text{ (3)}. \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng định lý Viet: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = m^2 + m \end{cases}$$

Suy ra (3) trở thành:

$$\begin{aligned} [(-2m)^2 - 4(m^2 + m)](-2m) &= 32 \\ \Leftrightarrow 8m^2 &= 32 \\ \Leftrightarrow m &= \pm 2 \end{aligned}$$

Vậy $m = -2$ (vì $m < 0$). □

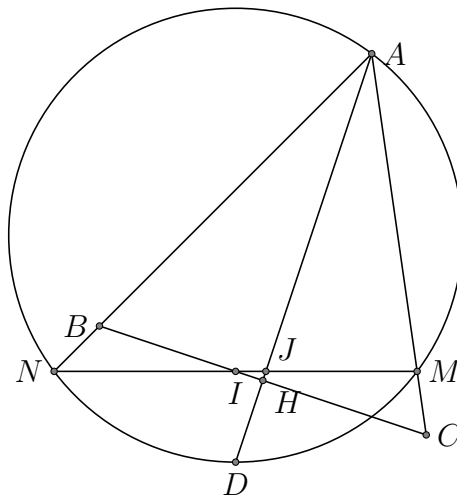
Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi M là điểm bất kỳ nằm trên cạnh AC (M không trùng A và C). Một đường thẳng đi qua điểm M cắt cạnh BC tại I và cắt đường thẳng AB tại N sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MN . Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm D (D không trùng A). Chứng minh rằng:

- $DN = DM$ và $DI \perp MN$.
- Tứ giác $BNDI$ nội tiếp.

- c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định (khác điểm A) khi M di chuyển trên cạnh AC .

Lời giải.



- a) Trong đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN , ta có $\widehat{NAD}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{ND}$, $\widehat{DAM}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{MD}$.
 Mà $\widehat{NAD} = \widehat{DAM}$ (do AD là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$).
 Nên số đo $\widehat{ND} = \widehat{MD} \Rightarrow \widehat{ND} = \widehat{MD} \Rightarrow ND = MD$.
 Trong đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMD$, I là trung điểm của dây $MN \Rightarrow IN = IM$ mà $DN = DM$.

Suy ra I, D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng MN .

Do đó $DI \perp MN$.

- b) Gọi H là giao điểm của BC và AD , J là giao điểm của MN và AD .

Ta có $\triangle ABC$ cân tại A có đường phân giác AD đồng thời là đường cao nên $AD \perp BC$.

Hai tam giác vuông $\triangle DIJ$ và $\triangle IHJ$ ($\widehat{I} = \widehat{H} = 90^\circ$) có $\widehat{J}$ chung nên $\triangle DIJ \sim \triangle IHJ$

Suy ra $\widehat{IDJ} = \widehat{JIH}$ mà $\widehat{JIH} = \widehat{BIN}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{IDJ} = \widehat{BIN}$ (1).

Mặt khác

$\widehat{ANM} = \widehat{ADM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AM}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{IDJ} + \widehat{ADM} = \widehat{BIN} + \widehat{ANH} \Rightarrow \widehat{IDM} = 180^\circ - \widehat{NBI} \Rightarrow \widehat{IDM} + \widehat{NBI} = 180^\circ$$

Như đã chứng minh ở câu (a), $\triangle NDM$ cân tại D nên đường cao DI đồng thời là đường phân giác $\Rightarrow \widehat{NDI} = \widehat{IDM}$.

Do đó $\widehat{NDI} + \widehat{NBI} = 180^\circ$. Vậy, tứ giác $NBID$ nội tiếp.

- c) Vì tứ giác $NBID$ nội tiếp mà $\widehat{NID} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NID}$ chắn cung có số đo 180° tức ND là đường kính của đường tròn đó.

$\Rightarrow \widehat{NBD} = 90^\circ$ hay $BD \perp AB$.

$\triangle ABC$ cố định. $\Rightarrow$ đường phân giác trong AD cố định và đường thẳng vuông góc với AB

tại B cố định và D là giao điểm của hai đường thẳng cố định này nên D cố định.
 Vậy, đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua điểm D cố định.

□

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a, BC = a$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có thể tích V_1 và khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có thể tích V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải.

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h = AB = 2a$, bán kính đáy $R = BC = a$ nên có thể tích

$$V_1 = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h' = BC = a$, bán kính đáy $R' = CD = 2a$ nên có thể tích

$$V_2 = \pi R'^2 h' = \pi (2a)^2 \cdot a = 4\pi a^3 \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi a^3}{4\pi a^3} = \frac{1}{2}.$$

□

———— **HẾT** ————

120**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, TIỀN GI-ANG****◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Bài 1.** Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{12}$.**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \\ &= |\sqrt{3} - 1| - \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = -1. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Giải phương trình $x^4 + x^2 - 20 = 0$.**Lời giải.**Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, phương trình được viết lại là

$$t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \text{ (L)} \\ t = 4 \text{ (N)} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$, $x = -2$.

□

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 11 \\ 2x + y = 9. \end{cases}$ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3x - y = 11 \\ 2x + y = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 20 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 - 2x = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(4; 1)$.

□

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - 2x - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị các biểu thức $B = x_1^2 + x_2^2$ và $C = x_1^3 + x_2^3$.**Lời giải.**

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -5. \end{cases}$$

- $B = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2^2 - 2(-5) = 4 + 10 = 14$.
- $C = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 2^3 - 3(-5)(2) = 38$.

□

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = x + m$.

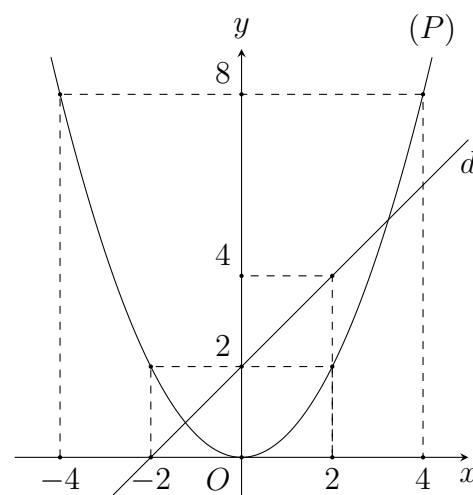
- Vẽ (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ khi $m = 2$.
- Định các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B .
- Tìm các giá trị của m để độ dài đoạn thẳng $AB = 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

a)

Khi $m = 2$ thì $d: y = x + 2$. Ta có

x	-2	0	2		
$y = x + 2$	0	2	4		
x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\frac{1}{2}x^2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2m = 0. \quad (*)$$

Để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt A và B thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1^2 - (-2m) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

c) Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -2m \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + m \\ y_2 = x_2 + m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{2[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2]} = \sqrt{2[2^2 - 4(-2m)]} = \sqrt{2(4 + 8m)}. \end{aligned}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán là } AB = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(4 + 8m)} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow 8 + 16m = 72 \Leftrightarrow m = 4.$$

So điều kiện tồn tại hai nghiệm, ta suy ra $m = 4$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 6. Hai bến sông A và B cách nhau 60 km. Một ca-nô đi xuôi dòng từ A đến B rồi ngược dòng từ B về A. Thời gian đi xuôi dòng ít hơn thời gian đi ngược dòng là 20 phút. Tính vận tốc ngược dòng của ca-nô, biết vận tốc xuôi dòng lớn hơn vận tốc ngược dòng của ca-nô là 6 km/h.

Lời giải.

Gọi x km/h là vận tốc ngược dòng của ca-nô.

Suy ra vận tốc ca-nô khi xuôi dòng là $(x + 6)$ km/h.

Thời gian ca-nô chạy xuôi dòng từ A đến B là $\frac{60}{x+6}$ giờ.

Thời gian ca-nô chạy ngược dòng từ B về A là $\frac{60}{x}$ giờ.

Do thời gian đi xuôi dòng ít hơn đi ngược dòng là 20 phút nên

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + 6x - 1080 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \text{ (N)} \\ x = -36 \text{ (L)}. \end{cases}$$

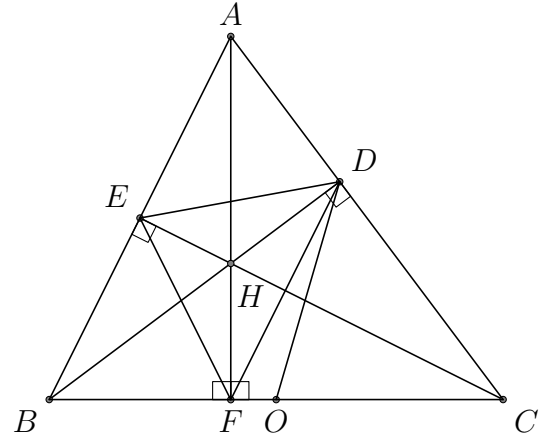
Vậy vận tốc ca-nô khi ngược dòng là 30 km/h.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), các đường cao AF , BD và CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh tứ giác $BEDC$ nội tiếp trong một đường tròn.
- Chứng minh $AE \cdot AB = AD \cdot AC$.
- Chứng minh FH là phân giác của góc $\widehat{EFD}$.
- Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng $\widehat{DOC} = \widehat{FED}$.

Lời giải.



- Theo giả thiết ta có $BD \perp AC$, $CE \perp AB$, suy ra hai điểm D , E cùng nhìn BC dưới một góc vuông, từ đó suy ra tứ giác $BEDC$ nội tiếp một đường tròn.

- Xét hai tam giác ABC và ADE có
 $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ (do tứ giác $BCDE$ nội tiếp),
 $\widehat{ACB} = \widehat{AED}$ (do tứ giác $BCDE$ nội tiếp),
suy ra $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (g-g).
Từ đó suy ra $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Leftrightarrow AB \cdot AE = AD \cdot AC$.

- Do tứ giác $BCDE$ nội tiếp, suy ra $\widehat{DBE} = \widehat{DCE}$ (cùng chắn cung $\widehat{DE}$). (1)

Theo giả thiết ta có $\widehat{BEH} + \widehat{BFH} = 180^\circ$ (do AF và CE là đường cao), suy ra tứ giác $BEHF$ nội tiếp, từ đó suy ra $\widehat{DBE} = \widehat{EFH}$ (cùng chắn cung $\widehat{EH}$). (2)

Tương tự, ta chứng minh được tứ giác $CDHF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{DFH} = \widehat{DCE}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{DBE} = \widehat{EFH} = \widehat{DFH} = \widehat{DCE}$, từ đó suy ra AF là phân giác góc $\widehat{EFD}$.

- Tương tự ý c) ta chứng minh được CE là phân giác góc $\widehat{DEF}$, suy ra $\widehat{DEF} = 2\widehat{HEF}$. (4)
Theo chứng minh trên, tứ giác $BEHF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HEF} = \widehat{HBF}$ (cùng chắn cung $\widehat{HF}$). (5)

Mặt khác, do tam giác BCD vuông tại D và O là trung điểm cạnh huyền BC nên ta có $OB = OC = OD$, suy ra tam giác OBD cân tại O , suy ra $\widehat{DOC} = 2\widehat{DBO} = 2\widehat{HBF}$. (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $\widehat{DOC} = \widehat{FED}$. □

Bài 8. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $256\pi \text{ cm}^2$ và bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}$ đường cao. Tính bán kính đáy và thể tích của hình trụ.

Lời giải.

Giả sử bán kính đáy hình trụ là R ($R > 0$), suy ra chiều cao của hình trụ là $h = 2R$.

Theo bài ra ta có diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 4\pi R^2 = 256\pi \Rightarrow R = 8 \text{ cm}.$$

Từ đó suy ra thể tích của hình trụ là $V = h\pi R^2 = 2 \cdot 8 \cdot \pi \cdot 8^2 = 1024 \text{ cm}^3$. □

————— HẾT —————

121**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, TRÀ VINH****◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** [9D4B4][9D4B3](3,0 điểm)a) Rút gọn biểu thức $2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 4\sqrt{27}$.b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$
c) Giải phương trình $3x^2 - 7x + 2 = 0$.**(9D1B8)****Lời giải.**a) Ta có $\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 4\sqrt{27} = 2 \cdot 5\sqrt{3} + 3 \cdot 4\sqrt{3} - 4 \cdot 3\sqrt{3} = 10\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$.b) Ta có
$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 16 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2. \end{cases}$$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\mathcal{S} = \{(3; -2)\}$.c) $3x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) - (x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}; 2\right\}$.

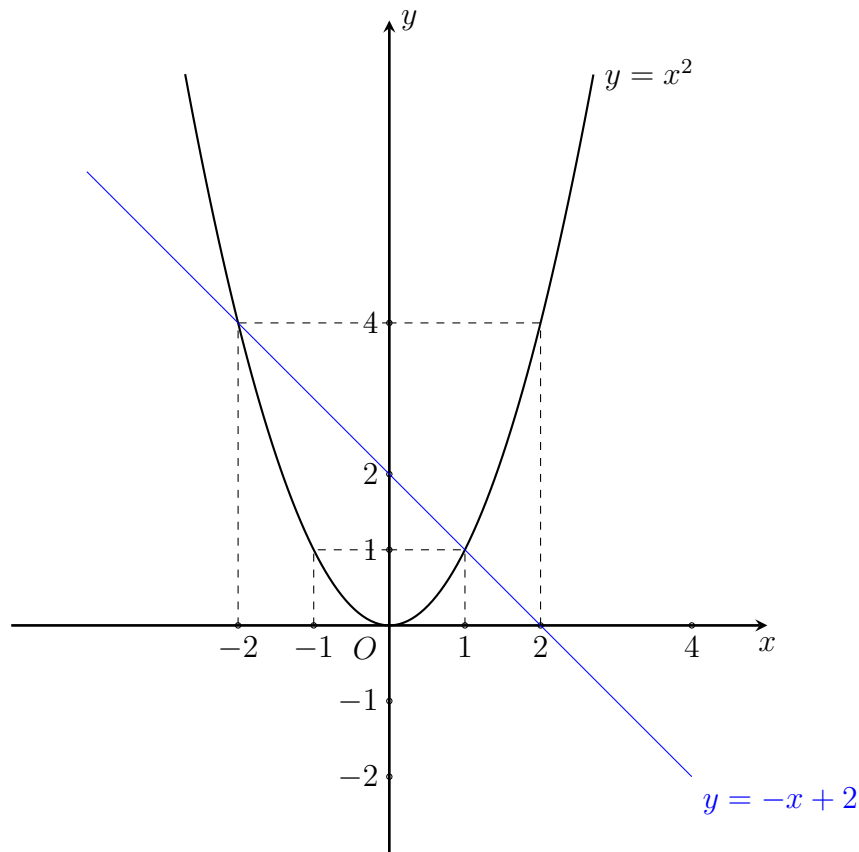
□

Câu 2. Cho hai hàm số $y = -x + 2$ và $y = x^2$ có đồ thị lần lượt là (d) và (P) .a) Vẽ (d) và P trên cùng hệ trục tọa độ.b) Bằng phép toán tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) .**Lời giải.**Vẽ parabol và đường thẳng (d) như sau:Vẽ parabol $(P) : y = x^2$.

- Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.
- Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vẽ đường thẳng $(d) : y = -x + 2$.Đồ thị của hàm số $y = -x + 2$ là đường thẳng đi qua điểm $(2; 0)$ và $(0; 2)$.



Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) + 2(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 4. \end{cases}$$

Vậy $A(1; 1)$, $B(-2; 4)$ là hai giao điểm của (d) và (P) . □

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0$ (với m là tham số).

- Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- Tìm các số nguyên m để phương trình có nghiệm nguyên.

Lời giải.

- Ta có $\Delta = (m + 1)^2 - 4(m - 2) = m^2 + 2m + 1 - 4m + 8 = m^2 - 2m + 9 = (m - 1)^2 + 8 > 0$.
Vì $\Delta > 0$ với mọi m nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- Phương trình có nghiệm nguyên khi và chỉ khi Δ là số chính phương, tức là $m^2 - 2m + 9$ là số chính phương.

Đặt $m^2 - 2m + 9 = a^2 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 8 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - (m - 1)^2 = 8 \Leftrightarrow (a - m + 1)(a + m - 1) = 8$.
Vì $a - m + 1$ và $a + m - 1$ là các số nguyên nên chúng là ước của 8, suy ra xảy ra các trường hợp sau.

- $a - m + 1 = 8$ và $a + m - 1 = 1$. Suy ra $a = \frac{9}{2}$ và $m = -\frac{5}{2}$ (loại) (Vì m nguyên).
- $a - m + 1 = -8$ và $a + m - 1 = -1$. Suy ra $a = -\frac{9}{2}$ và $m = -\frac{9}{2}$ (loại) (Vì m nguyên).
- $a - m + 1 = -1$ và $a + m - 1 = -8$. Suy ra $a = -\frac{9}{2}$ và $m = -\frac{5}{2}$ (loại) (Vì m nguyên).
- $a - m + 1 = 1$ và $a + m - 1 = 8$. Suy ra $a = \frac{9}{2}$ và $m = -\frac{9}{2}$ (loại) (Vì m nguyên).

- $a - m + 1 = 2$ và $a + m - 1 = 4$. Suy ra $a = 3$ và $m = 2$ (nhận) (Vì m nguyên).
- $a - m + 1 = 4$ và $a + m - 1 = 2$. Suy ra $a = 0$ và $m = 3$ (loại) (Vì $a \neq 0$).
- $a - m + 1 = -2$ và $a + m - 1 = -4$. Suy ra $a = -3$ và $m = 0$ (nhận) (Vì m nguyên).
- $a - m + 1 = -4$ và $a + m - 1 = -2$. Suy ra $a = -3$ và $m = 2$ (nhận) (Vì m nguyên).

Vậy $m \in \{0; 2; 3\}$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$). Biết $BH = 3,6\text{cm}$ và $HC = 6,4\text{cm}$. Tính độ dài BC, AH, AB, AC .

Lời giải.

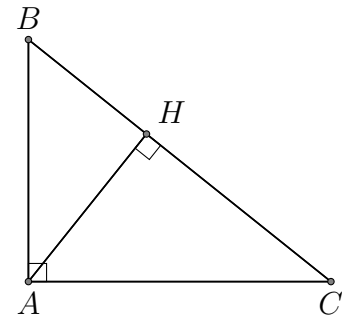
Ta có $BC = BH + HC = 3,6 + 6,4 = 10$ (cm).

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$AH^2 = BH \cdot CH = 3,6 \cdot 6,4 = 23,04 \Rightarrow AH = 4,8(\text{cm}).$$

$$AB^2 = BH \cdot BC = 3,6 \cdot 10 = 36 \Rightarrow AB = 6 \text{ (cm)}.$$

$$AC^2 = CH \cdot BC = 6,4 \cdot 10 = 64 \Rightarrow AC = 8 \text{ (cm)}.$$



□

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), M là trung điểm của cạnh AC . Đường tròn đường kính MC cắt BC tại N . Đường thẳng BM cắt đường tròn đường kính MC tại D .

- Chứng minh tứ giác $BADC$ nội tiếp.
- Chứng minh DB là phân giác của góc ADN .
- BA và CD kéo dài cắt nhau tại P . Chứng minh ba điểm P, M, N thẳng hàng.

Lời giải.

122**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, VINH LONG****◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆****Câu 1.**a) Tính giá trị biểu thức $A = 3\sqrt{27} - 2\sqrt{12} + 4\sqrt{48}$.b) Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.**Lời giải.**a) $A = 3 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 4 \cdot 4\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$.b) $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \frac{1 \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$
 $= |2 - \sqrt{3}| + 2 + \sqrt{3} = 4.$

□

Câu 2. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ c) $x^4 - 9x^2 = 0$ d) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ **Lời giải.**a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ Ta có $\Delta = 1 > 0$.Phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 2$.b) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ Ta có $\Delta = 0$.Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \sqrt{3}$.c) $x^4 - 9x^2 = 0$ Đặt $t = x^2, t \geq 0$, phương trình trở thành $t^2 - 9t = 0$.Giải ra được $t = 0$ (nhận); $t = 9$ (nhận)Khi $t = 9$, ta có $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.Khi $t = 0$, ta có $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.d) Ta có $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3(y + 3) - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = (2; -1)$.

□

Câu 3.a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = x^2$. Vẽ đồ thị Parabol (P) .b) Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - m = 0$ (1) (với x là ẩn số, m là tham số). Xác định

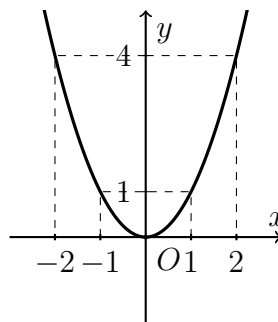
các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:
 $x_1(3 - x_2) + 20 \geq 3(3 - x_2)$.

Lời giải.

a) Bảng giá trị giữa x và y

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Đồ thị



b) Ta có $\Delta = (m - 1)^2 + 4m = (m + 1)^2$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$$

Theo đề bài ta có

$$x_1(3 - x_2) + 20 \geq 3(3 - x_2) \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) - x_1x_2 \geq -11$$

$$\Leftrightarrow 3(m - 1) + m \geq -11 \Leftrightarrow 4m \geq -8 \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Vậy $m \geq -2$; $m \neq -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 4. Quãng đường dài 160 km. Hai xe khởi hành cùng một lúc từ A để đi đến B . Vận tốc của xe thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe thứ hai là 10 km/h nên xe thứ nhất đến sớm hơn xe thứ hai là 48 phút. Tính vận tốc của xe thứ hai.

Lời giải.

Gọi vận tốc của xe thứ hai là x (km/h). Điều kiện: $x > 0$. Vận tốc của xe thứ nhất là $x + 10$ (km/h). Thời gian đi quãng đường AB của xe thứ nhất là $\frac{160}{x + 10}$ (h) và thời gian của xe thứ hai là $\frac{160}{x}$ (h). Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{160}{x} - \frac{160}{x + 10} = \frac{48}{60}.$$

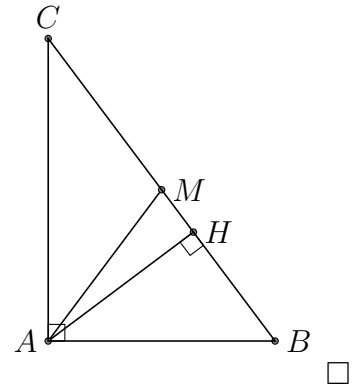
Giải phương trình ta được: $x = 40$ (nhận), $x = -50$ (loại). Vậy vận tốc của xe thứ hai là 40 km/h.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M là trung điểm của BC . Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Tính độ dài đường cao AH và diện tích tam giác ABM .

Lời giải.

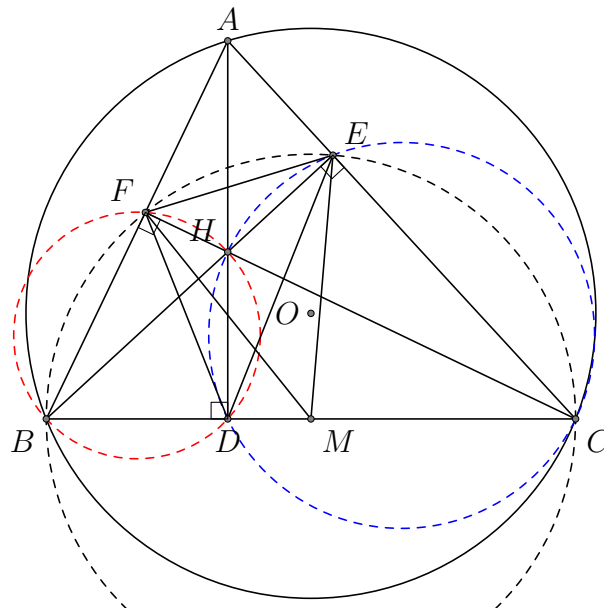
Ta có $BC = 5$ cm. Suy ra $AH = \frac{12}{5} = 2,4$ cm, $BM = \frac{5}{2} = 2,5$ cm.
 Nên diện tích tam giác ABM bằng $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}AH \cdot BM = 3$ (cm²).



Câu 6. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD , BE , CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC .

- Chứng minh tứ giác $BFHD$ nội tiếp được đường tròn.
- Biết $\widehat{EBC} = 30^\circ$. Tính số đo $\widehat{EMC}$.
- Chứng minh $\widehat{FDE} = \widehat{FME}$.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $BFHD$ nội tiếp được đường tròn.
- Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC , tâm M . Suy ra $\widehat{EMC} = 2\widehat{EBC} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.
- Xét tứ giác $DMEF$ có $\widehat{FME} = 2\widehat{FCE} = 2\widehat{HDE}$.
 Mà $\widehat{FDH} = \widehat{FBH} = \widehat{FCE} = \widehat{HDE}$. Suy ra $\widehat{FME} = \widehat{FDE}$.

□

Câu 7. Cho $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$; $b = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $a + b = \sqrt{2}$ và $ab = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 a^7 + b^7 &= (a^4 + b^4)(a^3 + b^3) - a^3b^3(a + b) \\
 &= \left\{ [(a + b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 \right\} [(a + b)^3 - 3ab(a + b)] - a^3b^3(a + b) \\
 &= \left[\left(2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left(2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{64} \\
 &= \frac{169\sqrt{2}}{64}.
 \end{aligned}$$

□

———— HẾT ————

123**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, VINH PHÚC****❖❖❖ NỘI DUNG ĐỀ ❖❖❖****I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2.0 điểm)****Câu 1.** Cho biểu thức $P = a\sqrt{2}$ với $a < 0$. Khi đó biểu thức P bằng

(A) $\sqrt{-2a}$.

(B) $-\sqrt{-2a}$.

(C) $\sqrt{2a^2}$.

(D) $-\sqrt{2a^2}$.

Lời giải.Vì $a < 0$ nên $-a > 0$ do đó $P = a\sqrt{2} = -(-a)\sqrt{2} = -\sqrt{2(-a)^2} = -\sqrt{2a^2}$.Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 2. Hàm số $y = (m - 4)x + 7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, với

(A) $m \leq 4$.

(B) $m > 4$.

(C) $m < 4$.

(D) $m \neq 4$.

Lời giải.Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 4$.Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 3. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) vô số.

(D) 0.

Lời giải.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{hệ phương trình có một nghiệm.}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2\sqrt{3}\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$. Độ dài đường kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ bằng

(A) 2cm.

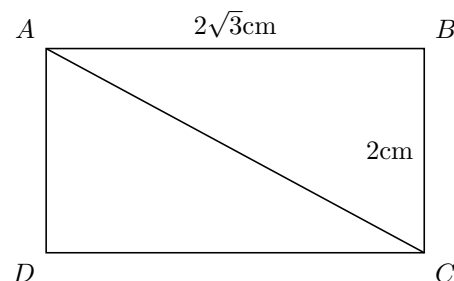
(B) $2\sqrt{3}\text{cm}$.

(C) 4cm.

(D) 8cm.

Lời giải.Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ có đường kính là AC .

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4$.

Vậy độ dài đường kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ là 4 cm.Chọn đáp án **(C)**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN (8.0 điểm)**Bài 1.** Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 3 = 0$ (1), với m là tham số và x là ẩn số.a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

- b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

- a) Khi $m = 3$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy với $m = 3$ thì tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 6\}$.

- b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow 2m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy $m > 1$ thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

□

Bài 2.

- a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = \frac{1}{4}x^2$ và A, B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ tương ứng bằng -2 và 4 . Tìm tọa độ hai điểm A, B và viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm A, B .
- b) Cho một mảnh vườn hình chữ nhật. Biết rằng nếu giảm chiều rộng đi 3 m và tăng chiều dài thêm 8 m thì diện tích mảnh vườn đó giảm 54 m^2 so với diện tích ban đầu, nếu tăng chiều rộng thêm 2 m và giảm chiều dài đi 4 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng 32 m^2 so với diện tích ban đầu. Tính chiều rộng và chiều dài ban đầu của mảnh vườn đó.

Lời giải.

- a) A, B thuộc (P) có hoành độ tương ứng bằng -2 và 4 nên $A(-2; 1), B(4; 4)$.

Đường thẳng d cần tìm có dạng $y = ax + b$.

Vì d đi qua hai điểm A, B nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng d có phương trình $y = \frac{1}{2}x + 2$.

- b) Gọi chiều rộng và chiều dài ban đầu của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là x, y (điều kiện $y > x > 3, y > 4$).

Diện tích ban đầu của mảnh vườn là $xy \text{ (m}^2\text{)}$.

Sau khi giảm chiều rộng 3 m, tăng chiều dài 8 m thì diện tích mảnh vườn đó giảm 54 m^2 so với diện tích ban đầu nên ta có phương trình $xy - (x - 3)(y + 8) = 54$ (1).

Sau khi tăng chiều rộng thêm 2 m và giảm chiều dài đi 4 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng 32 m^2 so với diện tích ban đầu nên ta có phương trình $(x + 2)(y - 4) - xy = 32$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - (x - 3)(y + 8) = 54 \\ (x + 2)(y - 4) - xy = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 3y = 30 \\ 2x - y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 50 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 15 m và chiều dài của mảnh vườn là 50 m.

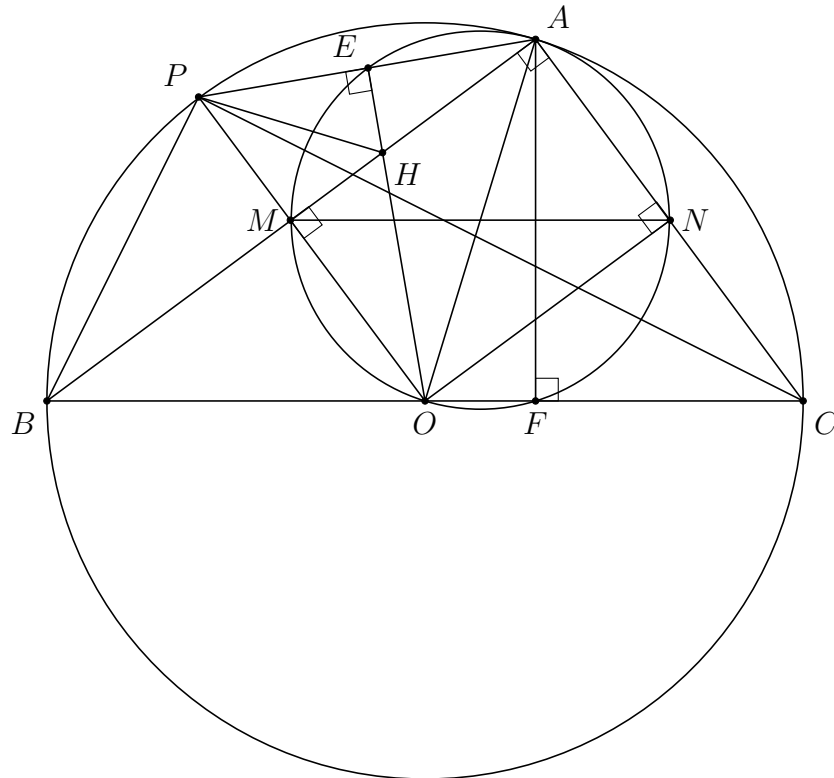
□

Bài 3. Cho đường tròn (O, R) (đường tròn tâm O bán kính R) và điểm A cố định nằm trên (O, R) . BC là một đường kính thay đổi của đường tròn (O, R) và không đi qua điểm A . Đường tròn đường kính AO cắt các đoạn AB, AC tại các điểm thứ hai tương ứng là M, N . Tia OM cắt

(O, R) tại điểm P . Gọi H là trực tâm của tam giác AOP . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AMON$ là hình chữ nhật.
- Tứ giác $PHOB$ nội tiếp được trong một đường tròn và $\frac{OH \cdot PC}{AC}$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm B, C .
- Xác định vị trí của các điểm B, C sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (do A thuộc đường tròn đường kính BC).
Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$ (do M, N thuộc đường tròn đường kính AO).
Tứ giác $AMON$ có $\widehat{BAC} = \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$ nên $AMON$ là hình chữ nhật.
- Tam giác AOP cân tại O có OH là đường cao nên OH đồng thời cũng là đường phân giác của $\widehat{AOP} \Rightarrow \widehat{POH} = \widehat{AOH} = \frac{1}{2}\widehat{AOP}$.
Mà $\widehat{ABP} = \frac{1}{2}\widehat{AOP}$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AP của đường tròn (O)).
Nên ta có $\widehat{ABP} = \widehat{POH}$ hay $\widehat{HBP} = \widehat{POH}$.
Mặt khác B, O là hai đỉnh kề nhau của tứ giác $PHOB$ nên suy ra tứ giác $PHOB$ nội tiếp đường tròn.
Ta có:
 $\widehat{ACP} = \widehat{ABP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AP của đường tròn (O))
 $\widehat{ABP} = \widehat{HOP}$ (chứng minh trên)
 $\Rightarrow \widehat{ACP} = \widehat{HOP}$ (1).
Ta lại có:
 $\widehat{APC} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của đường tròn (O))

$\widehat{ABC} = \widehat{HPO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OH của đường tròn ngoại tiếp $PHOB$)
 $\Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{HPO}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle APC \sim \triangle HPO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{OH} = \frac{PC}{PO} \Rightarrow \frac{OH \cdot PC}{AC} = PO = R$.

Vậy $\frac{OH \cdot PC}{AC} = R$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm B, C .

- c) Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ \Rightarrow OM \perp AB$ và $ON \perp AC \Rightarrow M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8} AB \cdot AC$.

Cách 1:

Theo bất đẳng thức Cauchy $AB \cdot AC \leq \frac{AB^2 + AC^2}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{4R^2}{2} = 2R^2$.

Do đó $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{8} AB \cdot AC \leq \frac{1}{8} \cdot 2R^2 = \frac{R^2}{4}$.

Vậy $S_{\triangle AMN}$ lớn nhất bằng $\frac{R^2}{4}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow AB = AC \Rightarrow A$ là điểm chính giữa của cung BC .

Cách 2:

Kẻ đường cao AF của tam giác ABC ta có $AF \leq AO = R$.

Do đó $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{8} AB \cdot AC = \frac{1}{8} AF \cdot BC = \frac{1}{8} \cdot 2R \cdot AF \leq \frac{1}{8} \cdot 2R \cdot AO = \frac{1}{8} \cdot 2R^2 = \frac{R^2}{4}$.

Vậy $S_{\triangle AMN}$ lớn nhất bằng $\frac{R^2}{4}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow AF = AO \Leftrightarrow F \equiv O \Rightarrow A$ là điểm chính giữa của cung BC .

□

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{2(x^4 + 4)} = 3x^2 - 10x + 6$.

Lời giải.

Điều kiện $3x^2 - 10x + 6 \geq 0$.

Hai vế của phương trình đều không âm, bình phương hai vế ta được:

$$\left(\sqrt{2(x^4 + 4)}\right)^2 = (3x^2 - 10x + 6)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 8 = 9x^4 + 100x^2 + 36 - 60x^3 + 36x^2 - 120x \Leftrightarrow 7x^4 - 60x^3 + 136x^2 - 120x + 28 = 0 \quad (*)$$

TH1: Với $x = 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2: Với $x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình $(*)$ cho x^2 ta được:

$$7x^2 - 60x + 136 - \frac{120}{x} + \frac{28}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(7x^2 + \frac{28}{x^2}\right) - \left(60x + \frac{120}{x}\right) + 136 = 0 \Leftrightarrow 7\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 60\left(x + \frac{2}{x}\right) + 136 = 0 \quad (**)$$

Đặt $t = x + \frac{2}{x}$ (điều kiện $t \geq 2\sqrt{2}$ hoặc $t \leq -2\sqrt{2}$)

$$\text{Ta có } t^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 4$$

Khi đó $(**)$ trở thành: $7(t^2 - 4) - 60t + 136 = 0$

$$\Leftrightarrow 7t^2 - 60t + 108 = 0 \Leftrightarrow (t - 6)(7t - 18) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 & (\text{nhận}) \\ t = \frac{18}{7} & (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 6 \text{ ta có } x + \frac{2}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{7} \\ x = 3 + \sqrt{7} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta có tập nghiệm của phương trình là $S = \{3 - \sqrt{7}; 3 + \sqrt{7}\}$ □

———— **HẾT** ————

ĐÁP ÁN

1.	D	2.	B	3.	A	4.	C

124 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, YÊN BÁI, MÃ ĐỀ 009

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC đều có chu vi 24cm, tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC , tỷ số đồng dạng bằng $\frac{1}{2}$. Tính độ dài cạnh MN .

(A) $MN = 12\text{cm}$.

(B) $MN = 8\text{cm}$.

(C) $MN = 4\text{cm}$.

(D) $MN = 16\text{cm}$.

Lời giải.

Tam giác ABC đều có chu vi bằng 24cm, suy ra cạnh $AB = \frac{24}{3} = 8\text{cm}$. Do $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ với tỷ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$. Suy ra $MN = \frac{1}{2}AB = 4\text{cm}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2.

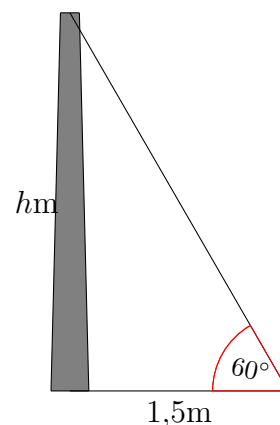
Tại thời điểm tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc 60° người ta đo được bóng của một cột đèn là 1,5m. Hỏi chiều cao h của cột đèn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

(A) $h \approx 3,60\text{m}$.

(B) $h \approx 2,76\text{m}$.

(C) $h \approx 2,67\text{m}$.

(D) $h \approx 2,60\text{m}$.



Lời giải.

Cạnh huyền của tam giác là $a = 1,5 \cdot \cos 60^\circ = 3\text{m}$.

Chiều cao h của cột đèn là: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,60\text{m}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Xác định giá trị của m để các đường thẳng $y = 2x + 4$, $y = 3x + 5$, $y = -mx$ cùng đi qua một điểm.

(A) $m = \frac{1}{2}$.

(B) $m = -\frac{1}{2}$.

(C) $m = 2$.

(D) $m = -2$.

Lời giải.

Gọi $M(x_M; y_M)$ là giao điểm của 2 đường thẳng $y = 2x + 4$, $y = 3x + 5$. Tọa độ M thỏa hệ phương trình $\begin{cases} 2x_M - y_M = -4 \\ 3x_M - y_M = -5 \end{cases}$. Vậy $M(-1; 2)$.

Theo yêu cầu bài toán thì $M(-1; 2)$ phải thuộc đường thẳng $y = -mx$.

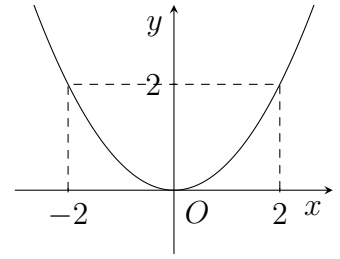
Do đó $2 = -m(-1) \Rightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4.

Đồ thị ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

- A** $y = \frac{1}{2}x^2$. **B** $y = \frac{1}{4}x^2$. **C** $y = 2x^2$. **D** $y = 4x^2$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy với $x = \pm 2$ thì $y = 2$. Vậy thay $x = \pm 2; y = 2$ vào đáp án. Nhận thấy hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 5. Rút gọn biểu thức $Q = \sqrt{4(1 + 6x + 9x^2)}$ với $x \leq -\frac{1}{3}$.

- A** $Q = -2(1 - 3x)$. **B** $Q = -2(1 + 3x)$. **C** $Q = 2(1 - 3x)$. **D** $Q = 2(1 + 3x)$.

Lời giải.

Ta có: $Q = \sqrt{4(1 + 6x + 9x^2)} = 2\sqrt{(1 + 2.3x + (3x)^2)}$
 $= 2\sqrt{(1 + 3x)^2} = 2|1 + 3x| = -2(1 + 3x)$ với mọi $x \leq -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 6. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x - 3$ và $y = -x + 1,5$.

- A** $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. **B** $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. **C** $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. **D** $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là: $2x + 3 = -x + 1,5 \Leftrightarrow 3x = 4,5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 0$.

Vậy tọa độ giao điểm là $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 7. Đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực x ?

- A** $\sqrt{16x^2} = -4|x|$. **B** $\sqrt{16x^2} = 4|x|$. **C** $\sqrt{16x^2} = -16x$. **D** $\sqrt{16x^2} = 16x$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{16x^2} = |4x| = 4.|x| = 4|x|$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 8. Tìm x biết $3^{3x-2} = 81$.

- A** $x = 1$. **B** $x = 2$. **C** $x = 0$. **D** $x = 3$.

Lời giải.

Ta có: $3^{3x-2} = 81 \Leftrightarrow 3^{3x-2} = 3^4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 9. Phân tích đa thức $T = 4x^2 - 4x + 1 - (2x + 3)(2x - 1)$ thành nhân tử.

- A** $T = -4(2x + 1)$. **B** $T = 4(1 - 2x)$. **C** $T = 4(2x + 1)$. **D** $T = 4(2x - 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$T = 4x^2 - 4x + 1 - (2x + 3)(2x - 1)$$

$$T = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 - 4x + 3$$

$$T = -8x + 4 = 4(-2x + 1) = 4(1 - 2x).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 10. Biết $144 = 2^4 \cdot 3^2$ và $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Tìm ước chung lớn nhất của hai số 144 và 84.

(A) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

(B) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$.

(C) $2^2 \cdot 3$.

(D) $2 \cdot 3 \cdot 7$.

Lời giải.

Ta có $\text{ƯCLN}(144, 84) = 2^2 \cdot 3$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích 16cm^2 . Tính chu vi của đường tròn ngoại tiếp hình vuông đã cho.

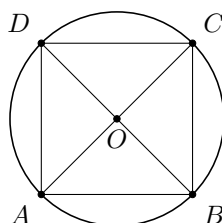
(A) $4\sqrt{2}\pi\text{cm}$.

(B) $2\pi\text{cm}$.

(C) $2\sqrt{2}\pi\text{cm}$.

(D) $4\pi\text{cm}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là $R = OA$.

Ta có cạnh hình vuông $a = \sqrt{16} = 4\text{cm}$.

$$R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\text{cm}.$$

Chu vi đường tròn đó là $C = 2\pi R = 4\sqrt{2}\pi\text{cm}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 12. Tìm tất cả các số tự nhiên n để số $10^n - 1$ chia hết cho 9 và 11.

(A) Không có giá trị nào của n thỏa mãn.

(B) n là số tự nhiên lẻ.

(C) n là số tự nhiên khác 0.

(D) n là số tự nhiên chẵn.

Lời giải.

Ta có $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Do đó $10^n - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ với mọi n chẵn.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 13. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{4x^2} = 1$.

(A) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(B) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

(C) $S = \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right\}$.

(D) $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{4x^2} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 14. Thầy giáo thống kê thời gian giải xong một bài toán (tính bằng phút) của 40 học sinh và lập được bảng tần số sau:

Thời gian (x)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Tần số (n)	6	3	4	2	7	2	9	6	1	$N = 40$

Tìm Mốt (M_0) của dấu hiệu điều tra trong bảng trên?

A $M_0 = 10$.

B $M_0 = 11$.

C $M_0 = 12$.

D $M_0 = 9$.

Lời giải.

Mốt của dấu hiệu là $M_0 = 10$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 15. Giải phương trình $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

A $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -3$.

B $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 3$.

C $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -3$.

D $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 3$.

Lời giải.

Ta có $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Lập $\Delta' = (-5)^2 - 3 \cdot 3 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 4$.

Do đó 2 nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x_1 = \frac{5+4}{3} = 3 \\ x_2 = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$.

A $(x; y) = (3; 2)$.

B $(x; y) = (-2; -3)$.

C $(x; y) = (3; -2)$.

D $(x; y) = (2; -3)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -6x - 2y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -5x = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Cho hình nón có chiều cao $h = 6\text{cm}$ và bán kính đường tròn đáy $r = 8\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

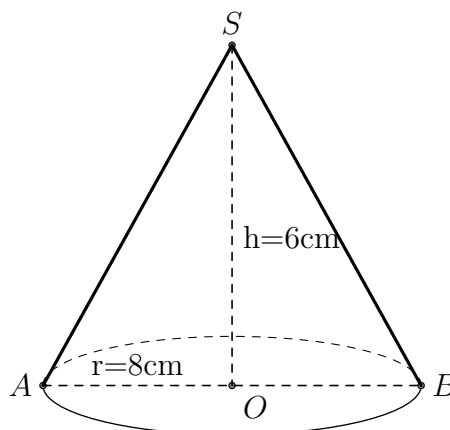
A $S_{xq} = 48\pi\text{cm}^2$.

B $S_{xq} = 160\pi\text{cm}^2$.

C $S_{xq} = 40\pi\text{cm}^2$.

D $S_{xq} = 80\pi\text{cm}^2$.

Lời giải.



Ta có $S_{xq} = \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{6^2 + 8^2} = 80\pi \text{cm}^2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 18. Cho tam giác đều ABC có cạnh 2cm quay xung quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón tạo thành.

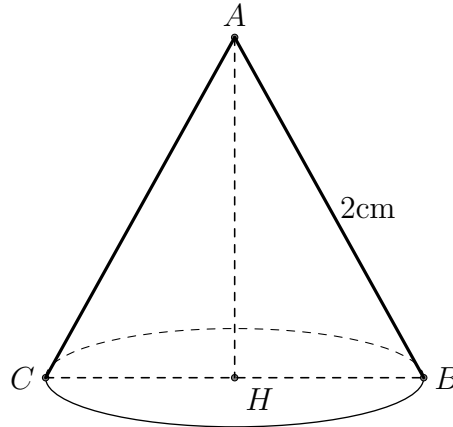
(A) $S_{xq} = 8\pi \text{cm}^2$.

(B) $S_{xq} = 3\pi \text{cm}^2$.

(C) $S_{xq} = 2\pi \text{cm}^2$.

(D) $S_{xq} = 4\pi \text{cm}^2$.

Lời giải.



Ta có diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi \text{cm}^2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 19. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Phương trình có nghiệm kép.

(B) Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

(C) Phương trình vô nghiệm.

(D) Phương trình có vô số nghiệm.

Lời giải.

Biệt thức $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 20. Tính $M = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4}$.

(A) $M = 6$.

(B) $M = 5$.

(C) $M = 13$.

(D) $M = 36$.

Lời giải.

Ta có: $M = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 21. Xác định hệ số góc a của đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M(3; 2)$ và điểm $N(-2; 3)$.

(A) $a = \frac{11}{5}$.

(B) $a = -\frac{11}{5}$.

(C) $a = \frac{1}{5}$.

(D) $a = -\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Do đường thẳng đã cho đi qua hai điểm $M(3; 2)$, $N(-2; 3)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ -2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{13}{5} \end{cases} \text{ . Vậy hệ số góc } a = -\frac{1}{5}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 22. Tìm điều kiện của x để biểu thức $\frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ xác định.

- A** $x \geq 0$ và $x \neq 1$. **B** $x \geq 0$. **C** $x \geq 1$. **D** $x > 1$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định của biểu thức là: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ \sqrt{x+1} \neq 0 \text{ hiển nhiên} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 23. Cho $A = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3$, với $a \leq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** $A = -3a^3$. **B** $A = 0$. **C** $A = 3a^3$. **D** $A = -15a^3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{9a^6} - 6a^3 \\ &= 3|3a^3| - 6a^3 = 3.3|a^3| - 6a^3 \\ &= 3.3(-a^3) - 6a^3, \text{ với } a \leq 0 \\ &= -15a^3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 24. Bộ ba độ dài nào sau đây có thể là độ dài ba cạnh của một tam giác?

- A** 17cm; 18cm; 35cm. **B** 26cm; 60cm; 32cm.
C 24cm; 32cm; 40cm. **D** 12cm; 20cm; 34cm.

Lời giải.

Vì $24 + 32 > 40$, $24 = 40 > 32$ và $32 + 40 > 24$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 25. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-1}{\sqrt{a}}$ khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

- A** $P = \sqrt{2}$. **B** $P = -2$. **C** $P = -\sqrt{2}$. **D** $P = 2$.

Lời giải.

Thay $a = 3 + 2\sqrt{2}$ vào biểu thức ta được:

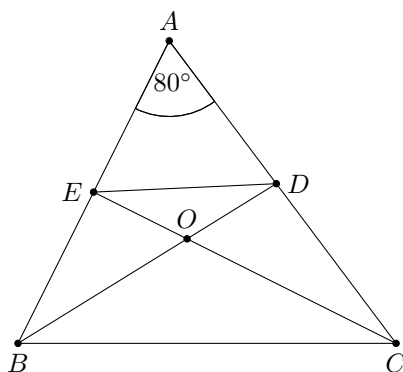
$$P = \frac{3 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1^2}} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2}} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} = 2.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 26. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 80^\circ$. Hai đường phân giác trong BD và CE cắt nhau tại O . Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

- A** $\widehat{BOC} = 100^\circ$. **B** $\widehat{BOC} = 130^\circ$. **C** $\widehat{BOC} = 80^\circ$. **D** $\widehat{BOC} = 120^\circ$.

Lời giải.



Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Do đó $\widehat{OBC} + \widehat{OCB} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$.

Vậy $\widehat{BOC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2$.

(A) $y_{\max} = 2$.

(B) $y_{\max} = 0$.

(C) $y_{\max} = 1$.

(D) $y_{\max} = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}x^2 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$. Vậy $y_{\max} = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 28. Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm duy nhất?

(A) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Nhận thấy $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$ thỏa mãn $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 29. Cho tam giác ABC , G là trọng tâm. Đường thẳng qua G và song song với BC cắt AB tại M . Tính tỷ số $\frac{AM}{AB}$.

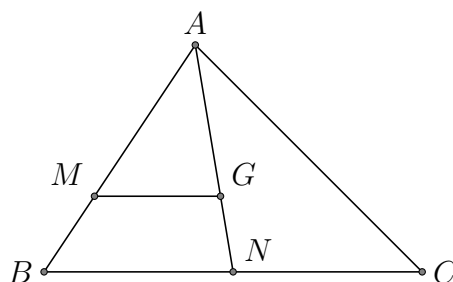
(A) $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.

(B) $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{2}$.

(C) $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$.

(D) $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$.

Lời giải.



Ta có $GM \parallel BC$ suy ra $\frac{AG}{AN} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ với N là trung điểm cạnh BC .

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Tìm chiều dài a và chiều rộng b của một hình chữ nhật có diện tích 40m^2 , biết rằng nếu tăng mỗi kích thước thêm $3(\text{m})$ thì diện tích tăng thêm 48m^2 .

- (A) $a = 10\text{m}, b = 4\text{m}$. (B) $a = 5\text{m}, b = 8\text{m}$. (C) $a = 8\text{m}, b = 5\text{m}$. (D) $a = 4\text{m}, b = 10\text{m}$.

Lời giải.

Diện tích hình chữ nhật lúc đầu $S_{\text{ld}} = a.b = 40\text{m}^2$.

Diện tích hình chữ nhật lúc sau $S_{\text{ls}} = (a + 3)(b + 3) = 40 + 48 = 88\text{m}^2$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a.b = 40 \\ (a + 3)(b + 3) = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b = 40 \\ ab + 3a + 3b - 79 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Giải bất phương trình $8x + 3(x + 1) > 5x - (x + 1)$.

- (A) $x < \frac{4}{7}$. (B) $x > -\frac{4}{7}$. (C) $x < -\frac{7}{4}$. (D) $x > -\frac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có $8x + 3(x + 1) > 5x - (x + 1)$

$$\Leftrightarrow 8x + 3x + 3 > 5x - x - 1$$

$$\Leftrightarrow 11x + 3 > 4x - 1$$

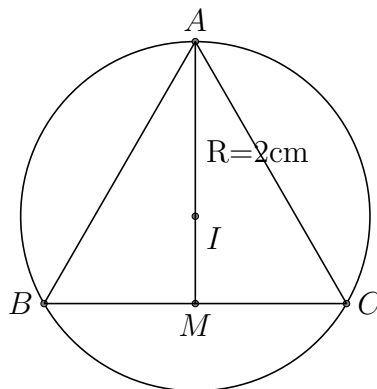
$$\Leftrightarrow 7x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{7}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có bán kính $R = 2\text{cm}$. Tính độ dài cạnh của tam giác ABC .

- (A) $4\sqrt{3}\text{cm}$. (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}$. (C) $\sqrt{3}\text{cm}$. (D) $2\sqrt{3}\text{cm}$.

Lời giải.



Tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC trùng với trọng tâm G của tam giác đó. Do đó bán kính $R = IA = GA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2$ với a cm là độ dài 1 cạnh của tam giác và M là

trung tuyến BC .

Ta có $\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\text{cm}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 33. Tìm điều kiện của x để biểu thức $\frac{6}{6-3x}$ xác định.

(A) $x \neq 2$.

(B) $x \neq 3$.

(C) $x \neq 6$.

(D) $x \neq 0$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của biểu thức là: $6 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 34. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Hệ thức nào đây **sai**?

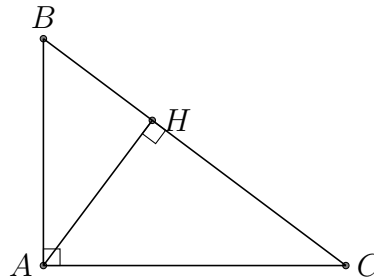
(A) $AC^2 = BC \cdot HC$.

(B) $AH^2 = AB \cdot AC$.

(C) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

(D) $AH^2 = HB \cdot HC$.

Lời giải.



Hệ thức $AH^2 = AB \cdot AC$ sai.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Xác định hệ số góc a của đường thẳng $y = 2x - 3$.

(A) $a = -\frac{1}{3}$.

(B) $a = -3$.

(C) $a = 2$.

(D) $a = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Hệ số góc a của đường thẳng $y = 2x - 3$ là 2.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 36. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

(A) $S = 1$.

(B) $S = -1$.

(C) $S = \frac{3}{10}$.

(D) $S = \frac{10}{3}$.

Lời giải.

Lập $\Delta' = (-5)^2 - 3 \cdot 3 = 16 > 0$. Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Áp dụng định lí Vi-ét ta có $S = -\frac{-10}{3} = \frac{10}{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 37. Cho đường tròn $(O; 2\text{cm})$, hai điểm A, B thuộc đường tròn và số đo $\widehat{AB} = 60^\circ$. Độ dài d của dây cung AB là bao nhiêu?

(A) $d = 2\text{cm}$.

(B) $d = 4\text{cm}$.

(C) $d = 5\text{cm}$.

(D) $d = 3\text{cm}$.

Lời giải.

Số đo cung $\widehat{AB}$ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó. Vậy $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Mặt khác $\triangle AOB$ cân tại O.

Suy ra $\triangle AOB$ đều $\Rightarrow AB = 2\text{cm}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 38. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, biết $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, $BC = 15\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB.

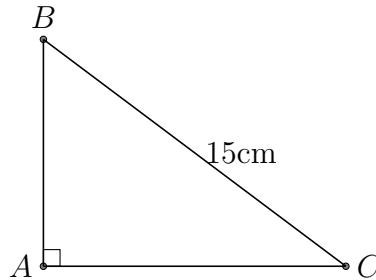
(A) $AB = 4\text{cm}$.

(B) $AB = 12\text{cm}$.

(C) $AB = 3\text{cm}$.

(D) $AB = 9\text{cm}$.

Lời giải.



Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC$.

Vì tam giác ABC vuông tại A, áp dụng định lý Pytago ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}AC\right)^2 + AC^2 = 15^2 \Leftrightarrow \frac{25}{16}AC^2 = 225 \Leftrightarrow AC^2 = 144 \Leftrightarrow AC = 12$. Vậy $AB = \frac{3}{4}.12 = 9\text{cm}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 39. Cho đường tròn $(O; 9\text{cm})$. Vẽ 6 đường tròn bằng nhau bán kính R đều tiếp xúc trong với (O) và mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai đường tròn khác bên cạnh nó. Tính R .

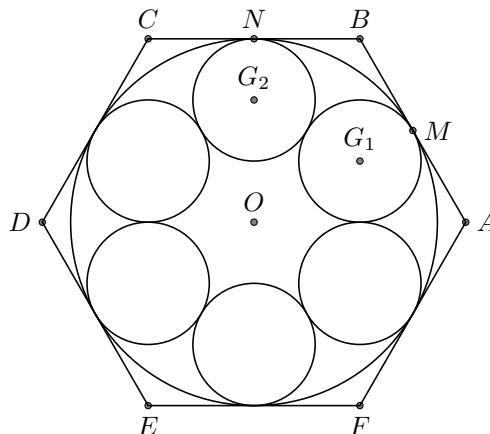
(A) $R = 6\text{ cm}$.

(B) $R = 2\sqrt{3}\text{ cm}$.

(C) $R = 3\sqrt{2}\text{ cm}$.

(D) $R = 3\text{ cm}$.

Lời giải.



Vẽ lục giác đều $ABCDEF$ ngoại tiếp đường tròn tâm $(O, 9\text{cm})$.

Vẽ các đường tròn nội tiếp $\triangle ABO, \triangle BCO, \triangle CDO, \triangle DEO, \triangle EFO, \triangle FAO$.

Gọi M là trung điểm AB suy ra đường tròn tâm G_1 tiếp xúc lục giác tại M .

Do đó $R = G_1M = \frac{1}{3}OM = \frac{1}{3}.9 = 3\text{cm}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 40. Tìm tổng T tất cả các giá trị của x để biểu thức $M = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $T = -5$.

B $T = 5$.

C $T = -6$.

D $T = 6$.

Lời giải.

Ta có $M = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3)$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

Vậy tổng $T = 0 + (-5) = -5$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 41. Quảng đường từ A đến B dài 180km. Một người đi xe máy từ A đến B và một người đi ô tô theo chiều ngược lại từ B đến A , nếu hai người khởi hành cùng một lúc thì họ gặp nhau tại C cách A 80km, nếu người đi xe máy khởi hành sau người đi ô tô 54 phút thì họ gặp nhau tại D cách A 60km. Tính vận tốc của xe máy.

A 35 km/h.

B 50 km/h.

C 45 km/h.

D 40 km/h.

Lời giải.

Gọi x, y km/h lần lượt là vận tốc của xe máy và ô tô ($x, y > 0$).

Hai người khởi hành cùng một lúc thì họ gặp nhau tại C cách A 80km: $\frac{80}{x} = \frac{100}{y}$.

Người đi xe máy khởi hành sau người đi ô tô 54 phút thì họ gặp nhau tại D cách A 60km: $\frac{60}{x} + \frac{9}{10} = \frac{120}{y}$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{80}{x} = \frac{100}{y} \\ \frac{60}{x} + \frac{9}{10} = \frac{120}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 50 \end{cases}$. Vậy vận tốc xe máy 40km/h.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 42. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

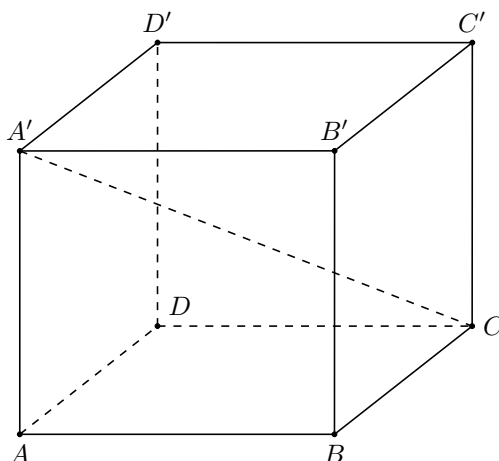
A $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.

B $S_{xq} = \pi a^2$.

C $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{2}$.

D $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{3}$.

Lời giải.



Chiều cao hình trụ bằng cạnh hình lập phương $h = a$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq} = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \pi a^2 \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 43. Cho hai đường tròn $(O; 4\text{cm})$ và $(O'; 3\text{cm})$ có $OO' = 5\text{cm}$. Hai đường tròn trên cắt nhau tại A và B . Tính độ dài AB .

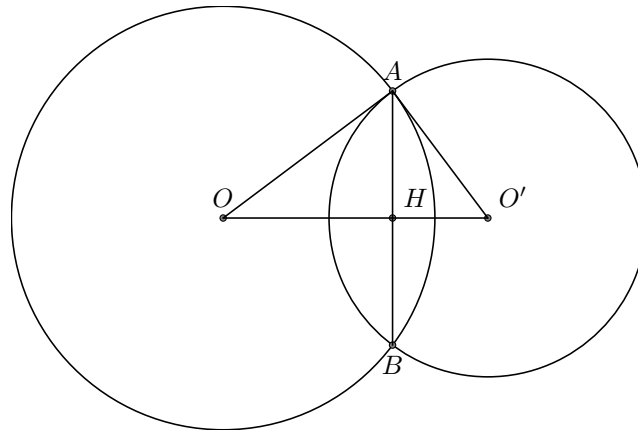
(A) $AB = 3,2\text{cm}$.

(B) $AB = 4,8\text{cm}$.

(C) $AB = 2,4\text{cm}$.

(D) $AB = 3,6\text{cm}$.

Lời giải.



Áp dụng định lý Pytago đảo cho $\triangle OAO'$ ta có $OO'^2 = OA^2 + O'A^2 \Leftrightarrow 5^2 = 4^2 + 3^2$.

Suy ra $\triangle OAO'$ vuông tại A .

Gọi H là giao của AB và OO' . Dựa vào hai tam giác đồng dạng $\triangle OAO'$ và $\triangle OBO'$ dễ dàng chứng minh AH là đường cao của $\triangle OAO'$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow AH = \frac{12}{5} = 2,4\text{cm}$.

Do đó $AB = 2AH = 2 \cdot 2,4 = 4,8\text{cm}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 44. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, biết $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OB .

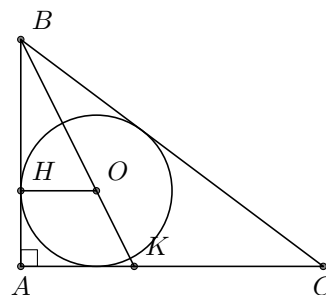
(A) $OB = \sqrt{10}\text{cm}$.

(B) $OB = \sqrt{3}\text{cm}$.

(C) $OB = \sqrt{5}\text{cm}$.

(D) $OB = \sqrt{2}\text{cm}$.

Lời giải.



Kẻ BO cắt AC tại K .

Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{CK} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AK}{3} = \frac{CK}{5} = \frac{AK + CK}{3 + 5} = \frac{AC}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $AK = \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{3^2 + (1,5)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow OH \parallel AC$ ta có

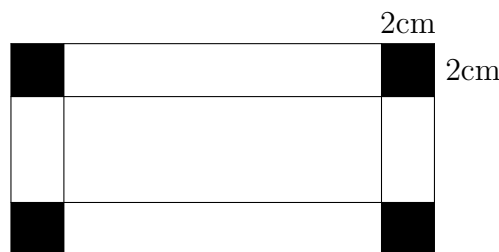
$$\frac{BH}{BA} = \frac{BO}{BK} = \frac{2}{3} \Rightarrow BO = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\text{cm}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 45.

Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi là 48cm. Người ta cắt bỏ mỗi góc của tấm tôn một hình vuông có cạnh 2cm rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích 96cm³. Giả sử tấm tôn có chiều dài là a , chiều rộng là b . Tính giá trị biểu thức $P = a^2 + b^2$.



A $P = 300$.

B $P = 320$.

C $P = 280$.

D $P = 340$.

Lời giải.

Chu vi miếng tôn hình chữ nhật $C = 2(a + b) = 48 \Leftrightarrow a + b = 24 \Leftrightarrow b = 24 - a$.

Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V = (a - 4)(b - 4) \cdot 2 = 96 \Leftrightarrow (a - 4)(24 - a - 4) \cdot 2 = 96$

$\Leftrightarrow a^2 - 24a + 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16 \\ a = 8 \end{cases}$. Vậy $a = 16; b = 8$ do đó $P = 16^2 + 8^2 = 320$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 46. Kết quả rút gọn biểu thức $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$) có dạng $\frac{\sqrt{x}-m}{\sqrt{x}+n}$. Tính giá trị của $m^2 + n^2$.

A $m^2 + n^2 = 4$.

B $m^2 + n^2 = 9$.

C $m^2 + n^2 = 5$.

D $m^2 + n^2 = 1$.

Lời giải.

Ta có: $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x}{x-4} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} + \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
 $= \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{x-4} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

Giá trị $m^2 + n^2 = 0^2 + (-2)^2 = 4$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 47. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\frac{12x-15y}{7} = \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11}$ và $x + y + z = -48$. Tìm y .

A $y = -16$.

B $y = -12$.

C $y = -10$.

D $y = -20$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{12x-15y}{7} = \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11} = \frac{12x-15y+20z-12x+15y-20z}{7+9+11} = 0$

Do đó $\frac{12x}{7} - \frac{15y}{7} = 0; \frac{20z}{9} - \frac{12x}{9} = 0; \frac{15y}{11} - \frac{20z}{11} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{12x}{7} = \frac{15y}{7}; \frac{20z}{9} = \frac{12x}{9}; \frac{15y}{11} = \frac{20z}{11}$

$\Leftrightarrow 12x = 15y; 20z = 12x; 15y = 20z$

$\Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{12}; \frac{z}{12} = \frac{x}{20}; \frac{y}{20} = \frac{z}{15}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{5 \cdot 15} = \frac{y}{60} = \frac{z}{3 \cdot 15} = \frac{x+y+z}{75+60+45} = \frac{-48}{180} = \frac{-4}{15} \Rightarrow y = -16$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 48. Cho tổng $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 6972$, biết n là một số tự nhiên. Tìm n .

A 97.

B 89.

C 83.

D 73.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 6972 \Leftrightarrow \frac{S}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 3486$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 6972 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 83 \\ n = -84 \end{cases}.$$

Vì n là số tự nhiên nên $n = 83$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 49. Cho đường tròn $(O; 10\text{cm})$, đường kính AB . Gọi T là trung điểm của OA . Tính bán kính R của đường tròn tiếp xúc với AB tại T và tiếp xúc với (O) .

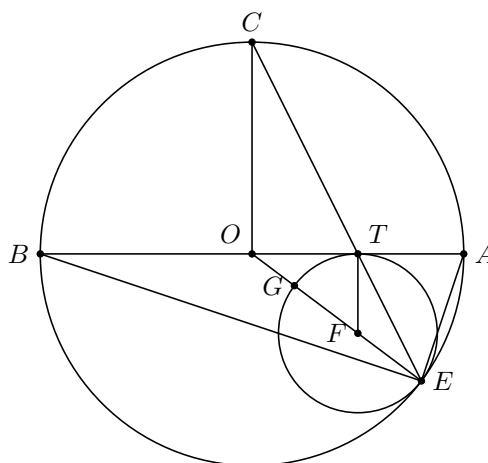
A $R = \frac{13}{8}\text{cm}$.

B $R = \frac{15}{4}\text{cm}$.

C $R = \frac{13}{4}\text{cm}$.

D $R = \frac{15}{8}\text{cm}$.

Lời giải.



Gọi C là điểm chính giữa cung AB , CT cắt O tại điểm thứ 2 E , OE cắt đường trung trực OA tại F . Đường tròn (F, FT) là đường tròn cần tìm. Gọi G là giao điểm thứ 2 của OE và (F) . Khi đó $OE \cdot OG = OT^2 = 25$, suy ra $OG = 2,5 \Rightarrow FG = \frac{10 - 2,5}{2} = \frac{15}{4}\text{cm}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 50. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị dương của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

A $m = 3$.

B $m = 4$.

C $m = 2$.

D $m = 1$.

Lời giải.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow [-(m-1)]^2 - 1(m^2 - 3m - 1) > 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

$$\text{Áp dụng định lí Vi-ét ta có } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m-2)^2 - 2(m^2 - 3m - 1)$$

$$= 2m^2 - 2m + 6 = 10 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Vì m dương nên chọn $m = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

———— **HẾT** ————

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. A	5. B
6. A	7. B	8. B	9. B	10. C
11. A	12. D	13. D	14. A	15. D
16. C	17. D	18. C	19. B	20. A
21. D	22. A	23. D	24. C	25. D
26. B	27. B	28. D	29. A	30. C
31. B	32. D	33. A	34. B	35. C
36. D	37. A	38. D	39. D	40. A
41. D	42. C	43. B	44. C	45. B
46. A	47. A	48. C	49. D	50. C

125 ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2018-2019, TỈNH YÊN BÁI, MÃ 022

❖❖❖ NỘI DUNG ĐỀ ❖❖❖

Câu 1.

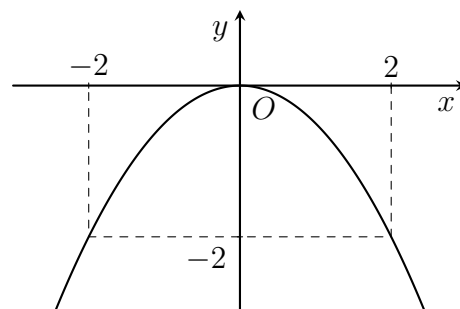
Đồ thị ở hình bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau

(A) $y = -2x^2$.

(B) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

(C) $y = -4x^2$.

(D) $y = -\frac{1}{2}x^2$.



Lời giải.

Dựa theo dáng đồ thị thì đồ thị trên có dạng $y = ax^2$.

Vì đồ thị đi qua điểm có tọa độ là $(2; -2)$ nên $-2 = 4a \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 2. Tìm điều kiện của x để đẳng thức $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$ đúng.

(A) $x > 2$.

(B) $x \geq -2$.

(C) $x \geq -3$.

(D) $x > 3$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 3. Độ dài hai cạnh của một tam giác là 2 (cm) và 21 (cm). Số đo nào dưới đây có thể là độ dài cạnh thứ ba của tam giác đã cho?

(A) 19 (cm).

(B) 22 (cm).

(C) 23 (cm).

(D) 24 (cm).

Lời giải.

Theo bất đẳng thức tam giác ABC ta có:

$$AC - BC < AB < AC + BC$$

Gọi $BC = 2$ và $AC = 21$ ta có $21 - 2 < AB < 21 + 2 \Leftrightarrow 19 < AB < 23$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 4. Tìm các giá trị của a sao cho $\frac{a-1}{\sqrt{a}} < 0$.

(A) $a \geq 0$.

(B) $0 \leq a < 1$.

(C) $a < 1$.

(D) $0 < a < 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a > 0 \\ a-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 5. Cho số tự nhiên $\overline{10203x}$. Tìm tất cả các chữ số x thích hợp để số đã cho chia hết cho 3 mà **không** chia hết cho 9?

A $x \in \{0; 6; 9\}$.

B $x \in \{0; 3; 6\}$.

C $x \in \{3; 6; 9\}$.

D $x \in \{0; 3; 9\}$.

Lời giải.

- $x = 0$ thì số 102030 có tổng $1 + 0 + 2 + 0 + 3 + 0 = 6$ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9.
- $x = 6$ thì số 102036 có tổng $1 + 0 + 2 + 0 + 3 + 6 = 12$ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9.
- $x = 9$ thì số 102039 có tổng $1 + 0 + 2 + 0 + 3 + 9 = 15$ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9.

Chọn đáp án **A** □

Câu 6. Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có một nghiệm $x = 1$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A $a - b - c = 0$.

B $a + b - c = 0$.

C $a + b + c = 0$.

D $a - b + c = 0$.

Lời giải.

Phương trình có một nghiệm $x = 1$ khi $a + b + c = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 7. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết đồ thị của hàm số đi qua hai điểm $A(-2; 5)$ và $B(1; -4)$.

A $y = x - 3$.

B $y = -x - 3$.

C $y = -3x - 1$.

D $y = 3x - 1$.

Lời giải.

Vì đồ thị đi qua hai điểm $A(-2; 5)$ và $B(1; -4)$ nên ta có:

$$\begin{cases} y(-2) = 5 \\ y(1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 5 \\ a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy đồ thị có dạng $y = -3x - 1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 8. Trong các phân số sau, phân số nào viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn?

A $\frac{17}{20}$.

B $\frac{7}{55}$.

C $\frac{19}{128}$.

D $\frac{67}{625}$.

Lời giải.

$$\frac{7}{55} = 0,1(27)$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (2m + 1)x^2$ nằm phía dưới trục hoành.

A $m < -\frac{1}{2}$.

B $m > -\frac{1}{2}$.

C $m \geq -\frac{1}{2}$.

D $m \leq -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị nằm phía dưới trục hoành khi và chỉ khi hệ số $a < 0 \Leftrightarrow 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 10. Phương trình $\frac{3}{1-4x} = \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2 .

(B) 0 .

(C) 1 .

(D) 3 .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-4x} &= \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1} \\ \Leftrightarrow \frac{-3}{4x-1} &= \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1} \\ \Leftrightarrow \frac{8+6x}{16x^2-1} &= \frac{2}{4x+1} + \frac{3}{4x-1} \\ \Leftrightarrow \frac{8+6x}{16x^2-1} &= \frac{8x-2+12x+3}{16x^2-1} \\ \Leftrightarrow 8+6x &= 20x+1 \\ \Leftrightarrow 14x &= 7 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Dạng thức nào sau đây đúng với mọi $x \leq 0$?

(A) $\sqrt{9x^2} = 3x$.

(B) $\sqrt{9x^2} = -3x$.

(C) $\sqrt{9x^2} = 9x$.

(D) $\sqrt{9x^2} = -9x$.

Lời giải.

$$\sqrt{9x^2} = \sqrt{9}\sqrt{x^2} = 3|x| = -3x \text{ (vì } x \leq 0\text{)}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tìm số tự nhiên n có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 9 và nếu cộng thêm vào số đó 63 đơn vị thì được một số mới cũng viết bằng hai chữ số đó nhưng theo thứ tự ngược lại.

(A) $n = 36$.

(B) $n = 18$.

(C) $n = 45$.

(D) $n = 27$.

Lời giải.

Gọi chữ số hàng chục là a và chữ số hàng đơn vị là b , điều kiện ($0 < a < 9$ và $0 < b < 9$).

Số ban đầu có dạng $n = 10a + b$.

Biết tổng các chữ số ở hàng đơn vị và hàng chục là 9 nên ta có phương trình

$$a + b = 9 \quad (20)$$

Vì cộng thêm vào số đó 63 đơn vị thì được một số mới cũng viết bằng hai chữ số đó nhưng theo thứ tự ngược lại nên ta có phương trình

$$10a + b + 63 = 10b + a \quad (21)$$

Từ (20) và (21) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ 10a + b + 63 = 10b + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 9 \\ 9b - 9a = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 9 \\ b - a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8. \end{cases}$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 18.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho $Q = 4a - \sqrt{a^2 - 4a + 4}$, với $a \geq 2$. Khẳng định nào sau đây?

(A) $Q = 5a + 2$.

(B) $Q = 3a - 2$.

(C) $Q = 3a + 2$.

(D) $Q = 5a - 2$.

Lời giải.

$$Q = 4a - \sqrt{a^2 - 4a + 4} = 4a - \sqrt{(a-2)^2} = 4a - |a-2| = 4a - (a-2) = 3a + 2 \text{ (vì } a \geq 2\text{)}.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 14. Biểu thức $M = x^2 - 1$ bằng biểu thức nào sau đây đúng?

(A) $M = (1-x)(x+1)$.

(B) $M = (x-1)(1-x)$.

(C) $M = (x-1)(x-1)$.

(D) $M = (x-1)(x+1)$.

Lời giải.

$$M = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 15. Cho tam giác ABC , M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh BC , biết $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{2}{5}$, $MN = 15$ (cm). Tính độ dài cạnh AC .

(A) $AC = 21$ cm.

(B) $AC = 37,5$ cm.

(C) $AC = 52,5$ cm.

(D) $AC = 25$ cm.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{NB}{NC} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{NB}{NB+NC} = \frac{5}{2+5} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{NB}{BC} = \frac{5}{7}.$$

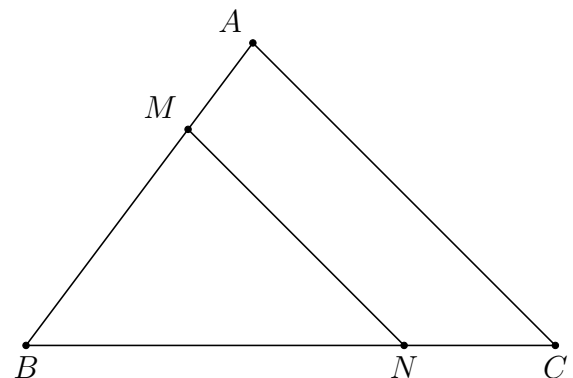
(Theo tỉ lệ thức)

Vì $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow MN \parallel AC.$

Áp dụng định lý Ta - lét ta có:

$$\frac{MN}{AC} = \frac{NB}{BC} \Leftrightarrow AC = \frac{7 \cdot 15}{5} = 21.$$

Vậy độ dài cạnh AC là 21 (cm).



Chọn đáp án (A)

□

Câu 16. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt (O) tại C và của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại D . Tính $\widehat{ABD}$.

(A) $\widehat{ABD} = 90^\circ$.

(B) $\widehat{ABD} = 150^\circ$.

(C) $\widehat{ABD} = 50^\circ$.

(D) $\widehat{ABD} = 75^\circ$.

Lời giải.

Xét đường tròn (O) , có $\widehat{DAB}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung AB ,
 $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn cung AB nên ta có $\widehat{DAB} = \widehat{ACB}$.

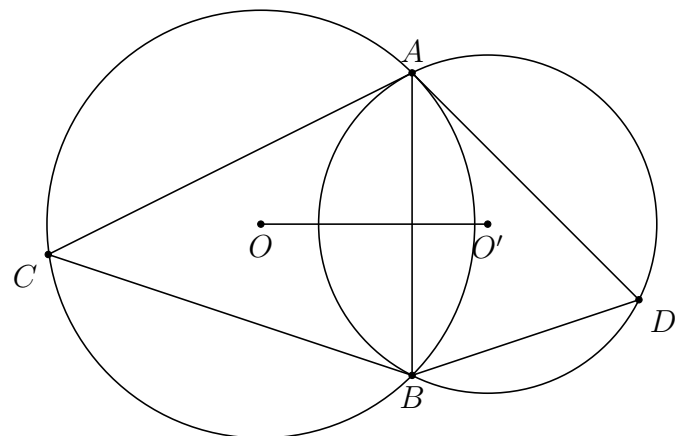
Tương tự ta có $\widehat{CBA} = \widehat{ADB}$.

Suy ra

$$\triangle CAB \sim \triangle ADB (g.g) \text{ suy ra } \widehat{ABD} = \widehat{ABC} = 75^\circ.$$

Chọn đáp án (D)

□



Câu 17. Số đo của ba góc của một tam giác tỉ lệ với $2 : 3 : 5$. Tìm số đo góc nhỏ nhất của tam giác.

A 36° .

B 18° .

C 24° .

D 54° .

Lời giải.

Gọi x, y, z lần lượt là số đo của ba góc trong tam giác tỉ lệ với $2 : 3 : 5$ suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

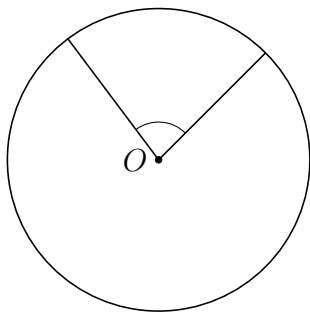
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ.$$

Từ đó dễ dàng tính được góc nhỏ nhất của tam giác là $x = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$.

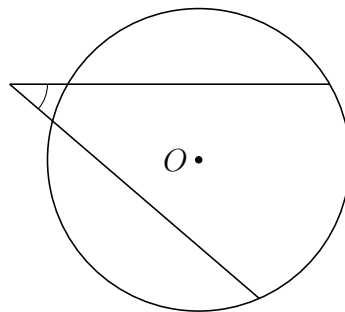
Chọn đáp án **A**

□

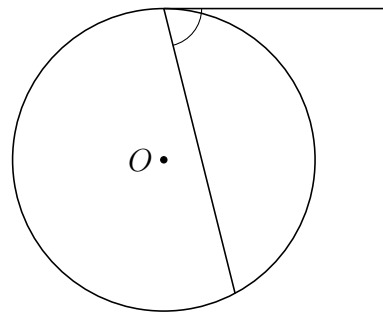
Câu 18. Góc nào dưới đây là góc ở tâm?



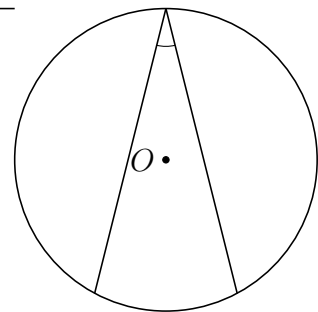
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A Hình 3 và 4.

B Hình 1.

C Hình 2.

D Hình 1 và 4.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 19. Tính $M = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$.

A $M = 4$.

B $M = 3$.

C $M = 1$.

D $M = 2$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 20. Cho $P = \sqrt{4a^2} - 6a$. Khẳng định nào dưới đây đúng.

A $P = -4a$.

B $P = -4|a|$.

C $P = 2a - 6|a|$.

D $P = 2|a| - 6a$.

Lời giải.

Áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ta có $P = \sqrt{4a^2} - 6a = 2|a| - 6a$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 21. Tính thể tích V của hình cầu có bán kính $R = 3$ cm.

A $V = 180\pi$ (cm³).

B $V = 9\pi$ (cm³).

C $V = 72\pi$ (cm³).

D $V = 36\pi$ (cm³).

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 22. Cho biểu thức $P = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

(A) $P = 2$.

(B) $P = 2 + 2\sqrt{3}$.

(C) $P = 2 - \sqrt{3}$.

(D) $P = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 23. Khẳng định nào sau đây sai?

(A) $\cos 35^\circ > \sin 40^\circ$.

(B) $\sin 35^\circ > \cos 40^\circ$.

(C) $\sin 35^\circ < \sin 40^\circ$.

(D) $\cos 35^\circ > \cos 40^\circ$.

Lời giải.

Nhận xét: Góc nhọn $90^\circ > \alpha > \beta > 0^\circ$ thì $\sin \alpha > \sin \beta \Rightarrow \sin 35^\circ < \sin 50^\circ$.

Ta có $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$ suy ra $\sin 35^\circ < \cos 40^\circ$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 24.

Bạn An chơi thả diều. Tại thời điểm dây diều dài 80 m và tạo với phương thẳng đứng một góc 50° . Tính khoảng cách d từ diều đến mặt đất tại thời điểm đó (giả sử dây diều căng và không giãn; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

(A) $d \approx 51,42 \text{ m}$.

(B) $d \approx 57,14 \text{ m}$.

(C) $d \approx 54,36 \text{ m}$.

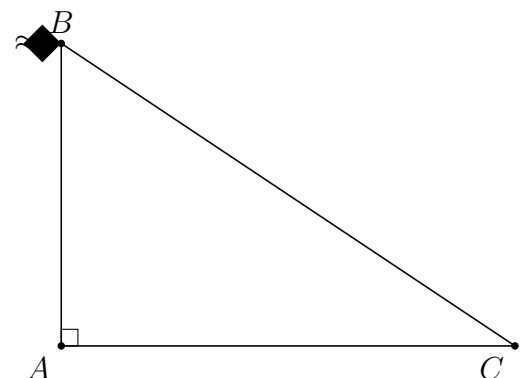
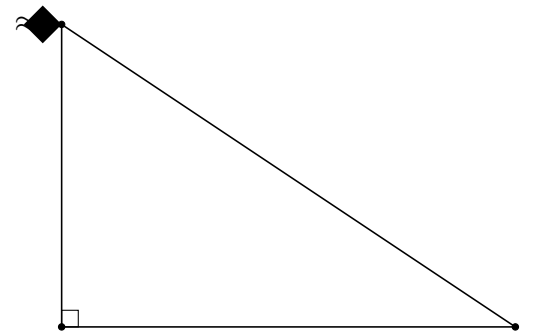
(D) $d \approx 61,28 \text{ m}$.

Lời giải.

Giả sử B là vị trí con diều, BC là sợi dây, BA là khoảng cách từ con diều đến mặt đất. Khi đó ta có $BC = 80 \text{ m}$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được:

$AB = \cos \widehat{ABC} \cdot BC = \cos 50^\circ \cdot 80 \approx 51,42 \text{ m}$.



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 25. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (2m - 1)x + m + 2$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{2}{3}$.

(A) $m = -\frac{1}{2}$.

(B) $m = \frac{1}{2}$.

(C) $m = -8$.

(D) $m = 8$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có đồ thị hàm số đi qua $(-\frac{2}{3}; 0)$. Khi đó ta có phương trình

$$(2m - 1) \cdot \frac{-2}{3} + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 8.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 26. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Phương trình vô nghiệm.

(B) Phương trình có nghiệm kép.

(C) Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

(D) Phương trình có vô số nghiệm.

Câu 27. Tìm tất cả giá trị a, b để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y) = (1; -2)$.

(A) $a = 2; b = 2$.

(B) $a = -4; b = 3$.

(C) $a = -3; b = 4$.

(D) $a = -4; b = -5$.

Lời giải.

Thay $x = 1; y = -2$ vào hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ b + 2a = -5 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $b = 3, a = -4$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

(A) $(x; y) = (-1; -1)$.

(B) $(x; y) = (-1; 1)$.

(C) $(x; y) = (1; 1)$.

(D) $(x; y) = (1; -1)$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 29. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a .

(A) $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

(B) $r = a\sqrt{3}$.

(C) $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

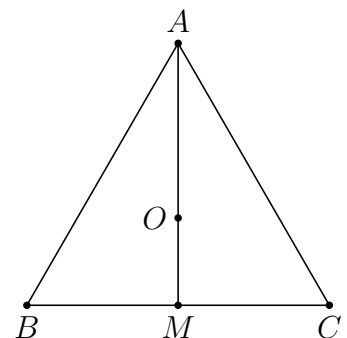
(D) $r = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất của tam giác đều ta được bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều bằng $\frac{1}{3}$ độ dài đường trung tuyến.

Mặt khác độ dài đường trung tuyến của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 30. Số nào sau đây là số nguyên tố?

(A) 29.

(B) 35.

(C) 49.

(D) 93.

Lời giải.

Sử dụng định nghĩa số nguyên tố là số tự nhiên có hai ước là 1 và chính nó. Ta được 29 là số nguyên tố vì $U_{(29)} = \{1; 29\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 31. Cho một hình cầu có đường kính bằng 4 cm. Tính diện tích S của hình cầu đó.

(A) $S = \frac{16\pi}{3} \text{ cm}^2$. **(B)** $S = 16\pi \text{ cm}^2$. **(C)** $S = 64\pi \text{ cm}^2$. **(D)** $S = 32\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải.

$$R = 2 \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 16\pi \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 32. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến với mọi $x \in \mathbb{R}$?

(A) $y = -2x + 4$. **(B)** $y = \sqrt{3}x - 2$. **(C)** $y = -\frac{7}{2} - 2x$. **(D)** $y = \frac{1-x}{3}$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax + b$ có $a > 0$ thì là hàm đồng biến.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 33. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = (2m - 1)x + 2$ luôn đồng biến.

(A) $m \geq \frac{1}{2}$. **(B)** $m < \frac{1}{2}$. **(C)** $m > \frac{1}{2}$. **(D)** $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số đồng biến} \Leftrightarrow 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = CD = DA$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. **(B)** Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.
(C) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi. **(D)** Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải.

Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau thì là hình thoi.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 35. Rút gọn biểu thức $M = (x - y)^2 - (x + y)^2$.

(A) $M = -2xy$. **(B)** $M = -4xy$. **(C)** $M = -2x^2$. **(D)** $M = -2y^2$.

Lời giải.

$$M = x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 = -4xy.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 36. Tính chu vi của tam giác cân ABC . Biết $AB = 6 \text{ cm}$; $AC = 12 \text{ cm}$.

(A) 25 cm. **(B)** 24 cm. **(C)** 30 cm. **(D)** 15 cm.

Lời giải.

- Nếu tam giác cân ở B thì $BA = BC = 6$ khi đó $AC = AB + BC$ (vô lí).
- Nếu tam giác cân ở C thì $CA = CB = 12$ khi đó chu vi tam giác là $12 + 12 + 6 = 30$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 37. Giải phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.

A $x_1 = 2; x_2 = 3$.

B $x_1 = -1; x_2 = -6$.

C $x_1 = 1; x_2 = 6$.

D $x_1 = -2; x_2 = -3$.

Lời giải.

$$x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x_1 = 2; x_2 = 3.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 38. Cho $P = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2019}$. Tìm số dư khi chia P cho 20.

A 8.

B 16.

C 4.

D 12.

Lời giải.

$$\text{Vì } P = 4(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2018}).$$

Ta cần tìm số dư của $S = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2018}$ cho 5.

Ta có $3S = 4^{2019} - 1$. Ta có

$$\begin{aligned} 4 &\equiv -1 \pmod{5} \\ \Rightarrow 4^{2019} &\equiv -1 \pmod{5} \\ \Rightarrow 3S &\equiv 3 \pmod{5} \\ \Rightarrow S &\equiv 1 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Từ đó $S = 5k + 1$ hay $P = 20k + 4$. Vậy P chia 20 dư 4.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 39. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH và đường trung tuyến AM ($H, M \in BC$). Biết chu vi của tam giác là 72 cm và $AM - AH = 7$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

A $S = 48 \text{ cm}^2$.

B $S = 108 \text{ cm}^2$.

C $S = 148 \text{ cm}^2$.

D $S = 144 \text{ cm}^2$.

Lời giải.

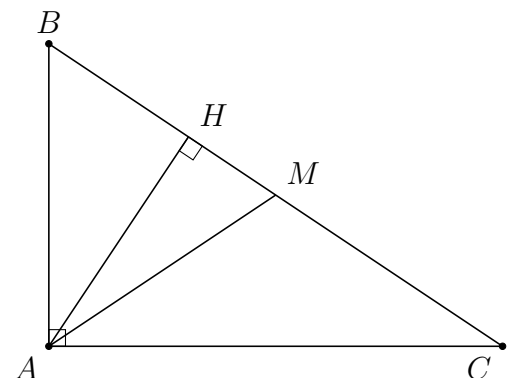
$$\text{Ta gọi } AM = x \Rightarrow BC = 2x, AH = x - 7.$$

$$\text{Ta có } AB^2 + AC^2 = BC^2; AB \cdot AC = BC \cdot AH \Rightarrow (AB + AC)^2 = BC^2 + 2BC \cdot AH$$

$$\text{mà chu vi tam giác bằng 72 nên } AB + AC = 72 - BC = 72 - 2x.$$

Vậy ta có phương trình

$$\begin{aligned} (72 - 2x)^2 &= 4x^2 + 4x(x - 7) \\ \Leftrightarrow x^2 + 65x - 1296 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -81 (\text{Loại}) \\ x = 16 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\text{Vậy } BC = 32; AH = 9 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = 144 \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 40. Cho các số a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 2(a + 2b + c)$. Tính tổng $T = a + b + c$.

(A) $T = 6$.

(B) $T = 2$.

(C) $T = 4$.

(D) $T = 8$.

Lời giải.

$$a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 2(a + 2b + c) \Rightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1; b = 2; c = 1.$$

Từ đó $a + b + c = 4$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 41. Cho tam giác ABC có $AB = 20$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 16$ cm. Tính chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho

(A) 16π cm.

(B) 20π cm.

(C) 13π cm.

(D) 8π cm.

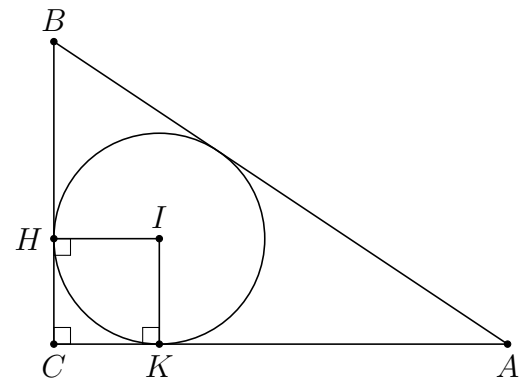
Lời giải.

Vì $AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .

Từ đó dựa vào hình vuông $CHIK$ với I là tâm đường tròn nội tiếp. Ta có

$$r = CH = \frac{CA + CB - AB}{2} = 4.$$

Vậy chu vi đường tròn nội tiếp $= 2\pi \cdot 4 = 8\pi$.



Chọn đáp án (D)

□

Câu 42. Biết các cạnh của một tứ giác tỉ lệ với 2; 3; 4; 5 và độ dài cạnh lớn nhất hơn độ dài cạnh nhỏ nhất là 6 cm. Tính chu vi của tứ giác đó.

(A) 28 cm.

(B) 42 cm.

(C) 14 cm.

(D) 56 cm.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh nhỏ nhất là x , vậy độ dài cạnh lớn nhất là $x + 6$. Theo đề bài ta có

$$\frac{x}{2} = \frac{x + 6}{5} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vì các cạnh tỉ lệ theo 2 : 3 : 4 : 5 nên các cạnh sẽ là 4, 6, 8, 10. Chu vi tứ giác đó là $4 + 6 + 8 + 10 = 28$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 43. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - m + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

(A) $m = 1$.

(B) $m = 4$.

(C) $m = -1$.

(D) $m = -4$.

Lời giải.

Điều kiện có 2 nghiệm là

$$\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 - m + 3) = 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}.$$

Theo Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m + 1) \\ x_1 x_2 = m^2 - m + 3 \end{cases}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= 10 \\ \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(m^2 - m + 3) &= 10 \\ \Leftrightarrow 2m^2 + 10m - 12 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(TM) \\ m = -6(KTM) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Cho tam giác ABC , biết $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm. Tính độ dài cạnh AC .

(A) $AC = 2\sqrt{7}$ cm. (B) $AC = \sqrt{52}$ cm. (C) $AC = 4\sqrt{5}$ cm. (D) $AC = 2\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.

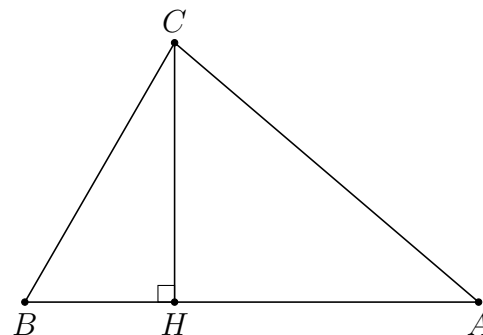
Kẻ $CH \perp AB (H \in AB)$.

Xét tam giác BHC ta có

$$CH = BC \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}; BH = BC \cdot \cos 60^\circ = 2.$$

Từ đó

$$AH = AB - BH = 4 \Rightarrow AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = 2\sqrt{7}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Mặt cầu (S) được gọi là ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ nếu các đỉnh của hình lập phương đều thuộc mặt cầu (S). Biết hình lập phương có độ dài cạnh $2a$. Tính thể tích V của hình cầu ngoại tiếp hình lập phương đó.

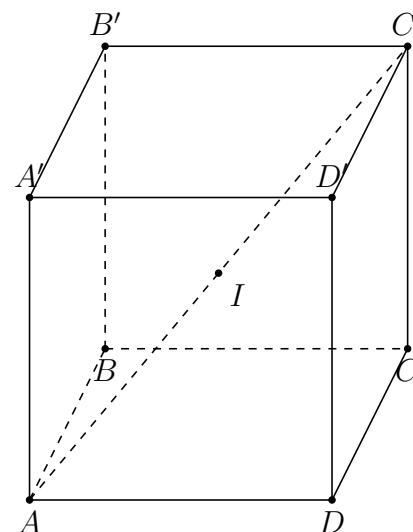
(A) $V = 2\pi a^3$. (B) $V = 4\sqrt{3}\pi a^3$. (C) $V = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. (D) $V = 3\pi a^3$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu là trung điểm của đường chéo. // Độ dài đường chéo của hình lập phương là $\sqrt{3} \cdot 2a$, từ đó bán kính

hình cầu ngoại tiếp là $R = \frac{\sqrt{3} \cdot 2a}{2} = \sqrt{3}a$.

Từ đó $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi a^3$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 46. Cho $\widehat{xOy} = 45^\circ$. Trên tia Oy lấy hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$ cm. Tính độ dài hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên Ox .

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm.

(C) 1 cm.

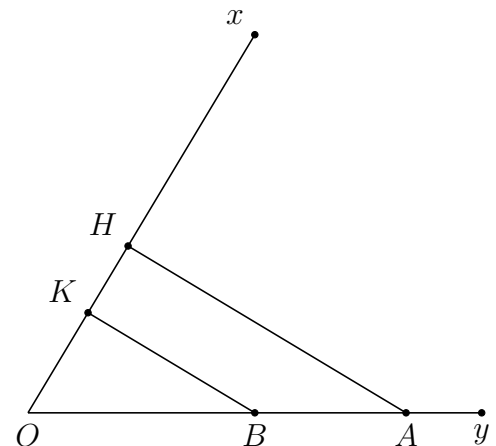
(D) $\frac{1}{2}$ cm.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp Ox, BK \perp Ox (H, K \in Ox)$.

Ta có $OH = OA \cdot \cos \widehat{xOy}, OK = OB \cdot \cos \widehat{xOy}$

$$\Rightarrow HK = OK - OH = AB \cdot \cos \widehat{xOy} = \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 1 \text{ cm.}$$

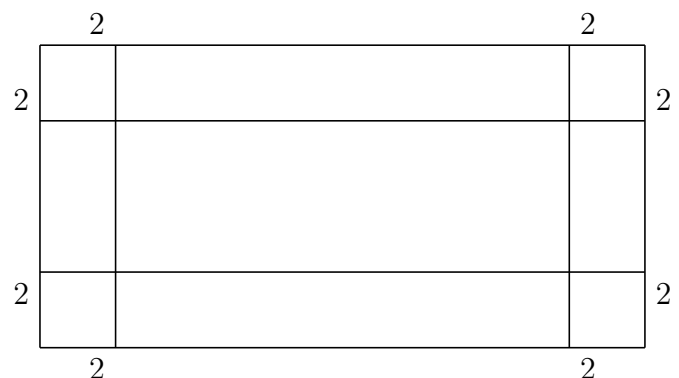


Chọn đáp án (C)

□

Câu 47.

Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi là 48 cm. Người ta cắt bỏ mỗi góc của tấm tôn một hình vuông có cạnh 2 cm rồi gấp lên thành một hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích 96 cm^3 . Giả sử tấm tôn có chiều dài a , chiều rộng là b . Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 - b^2$.



(A) $P = 80$.

(B) $P = 112$.

(C) $P = 192$.

(D) $P = 256$.

Lời giải.

Gọi chiều rộng là x ($2x < 24 \Leftrightarrow x < 12$), chiều dài là $24 - x$ (vì chu vi bằng 24).

Từ đó kích thước hình hộp chữ nhật là $x - 4; 24 - x - 4; 2$.

Ta có

$$V = 96$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(20 - x)2 = 96$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 24x + 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 (\text{Thỏa mãn}) \\ x = 16 (\text{Không thỏa mãn}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } b = 8; a = 16 \Rightarrow a^2 - b^2 = 192.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 48. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước. Nếu cho vòi một chảy trong 3 giờ rồi khóa lại, sau đó cho vòi hai chảy tiếp trong 8 giờ nữa thì đầy bể. Nếu cho vòi một chảy trong 1 giờ, rồi cho cả hai vòi chảy tiếp trong 4 giờ nữa thì số nước chảy vào bằng $\frac{8}{9}$ bể. Hỏi nếu chảy một mình thì vòi một sẽ chảy trong thời gian t bằng bao nhiêu thì đầy bể?

(A) $t = 10$ giờ.

(B) $t = 12$ giờ.

(C) $t = 11$ giờ.

(D) $t = 9$ giờ.

Lời giải.

Gọi x, y giờ là thời gian chảy đầy bể của vòi 1 và vòi 2.

Nếu cho vòi một chảy trong 3 giờ rồi khóa lại, sau đó cho vòi hai chảy tiếp trong 8 giờ nữa thì đầy bể

$$\Rightarrow \frac{3}{x} + 8\frac{1}{y} = 1.$$

Nếu cho vòi một chảy trong 1 giờ, rồi cho cả hai vòi chảy tiếp trong 4 giờ nữa thì số nước chảy vào bằng $\frac{8}{9}$ bể

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{8}{9}.$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases}.$$

Từ đó $x = 9$ hay $t = 9$ giờ.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Kết quả rút gọn biểu thức $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$ có dạng $\frac{\sqrt{x}-m}{\sqrt{x}+n}$. Tính giá trị của $m-n$.

(A) $m-n = -2$.

(B) $m-n = -4$.

(C) $m-n = 4$.

(D) $m-n = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

Vậy $m = 0; n = -2 \Rightarrow m - n = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính độ dài dây cung chung CF của đường tròn đường kính BE và đường tròn đường kính CD .

(A) $CF = a$.

(B) $CF = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

(C) $CF = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

(D) $CF = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi CF cắt BE tại H .

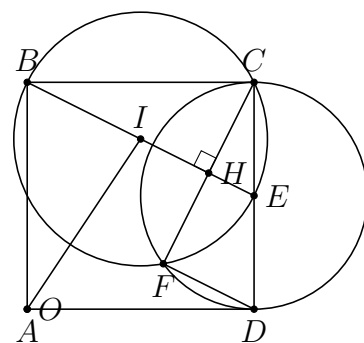
Tam giác BCE vuông tại C nên ta có

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CB^2}.$$

$$\text{Ta có } CE = \frac{a}{2}; BC = a \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{5}a}{5} \Rightarrow CF = 2CH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án **B**

———— HẾT ————

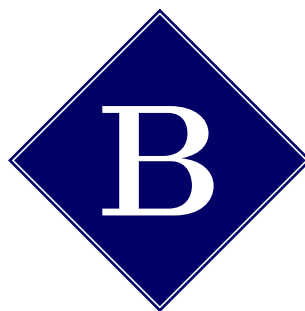


□

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. D	5. A
6. C	7. C	8. B	9. A	10. C
11. B	12. B	13. C	14. D	15. A
16. D	17. A	18. B	19. D	20. D
21. D	22. D	23. B	24. A	25. D
26. A	27. B	28. C	29. A	30. A
31. B	32. B	33. B	34. C	35. B
36. C	37. A	38. C	39. D	40. C
41. D	42. A	43. A	44. A	45. B
46. C	47. C	48. D	49. D	50. B

PHẦN



ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN

1 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho các số thực a, b với $a \neq b$. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{\frac{(a-b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Lời giải.

Đặt $\sqrt{a} = x; \sqrt{b} = y (x, y > 0)$. Khi đó $a = x^2; b = y^2 (x^2, y^2 > 0)$ và $x^2 + xy + y^2 > 0; x + y > 0; x - y \neq 0$.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{(x^2-y^2)^3}{(x-y)^3} - y^3 + 2x^3}{x^3 - y^3} + \frac{3x^2 + 3xy}{y^2 - x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x+y)^3 - y^3 + 2x^3}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)} + \frac{3x^2 + 3xy}{y^2 - x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)(x^2 + xy + y^2)} + \frac{3x(x+y)}{(y-x)(y+x)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x}{x-y} + \frac{3x}{-(x-y)} = 0 \\ \Leftrightarrow & 0 = 0 \text{ (luôn đúng).} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã cho được chứng minh. □

Câu 2. Cho quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng, một xe máy đi từ A đến B . Đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường xe bị hỏng phải dừng lại sửa mất 10 phút rồi đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đầu 10 km/h. Biết xe máy đến B lúc 11 giờ 40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu không thay đổi và vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không thay đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ.

Lời giải.

Gọi v_1 (km/h) là vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu.

Khi đó $(v_1 - 10)$ (km/h) là vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại.

Điều kiện : $v_1 - 10 > 0$ hay $v_1 > 10$

Thời gian để xe máy đi hết $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu là $\frac{90}{v_1}$ (h)

Thời gian để xe máy đi hết $\frac{1}{4}$ quãng đường đầu là $\frac{30}{v_1 - 10}$ (h)

Thời gian xe máy dừng lại để sửa là : $\frac{1}{6}$ (h)

Theo đề bài, tổng thời gian xe máy đi từ A đến B , tính cả thời gian dừng lại để sửa là : $\frac{14}{3}$ (h)

Ta có phương trình :

$$\frac{90}{v_1} + \frac{30}{v_1 - 10} + \frac{1}{6} = \frac{14}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{90v_1 - 900 + 30v_1}{v_1(v_1 - 10)} = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9v_1^2 - 330v_1 + 1800 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 30 \\ v_1 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Do điều kiện $v_1 > 10$ nên chỉ nhận nghiệm $v_1 = 30$

Vậy $v_1 = 30(\text{km/h})$

Thời gian để xe máy đi hết $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu là : $\frac{90}{v_1} = \frac{90}{30} = 3(\text{h})$

Vì thời điểm xe máy bị hỏng cũng là thời điểm xe máy đi hết $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu nên xe máy bị hỏng lúc $7h + 3h = 10 \text{ h}$

Vậy xe máy bị hỏng lúc 10 h cùng ngày. □

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = -\frac{2}{3}(m + 1)x + \frac{1}{3}$ (với m là tham số)

- Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m đường thẳng d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
- Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của d và (P) , đặt $f(x) = x^3 + (m + 1)x^2 - x$. Chứng minh đẳng thức $f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^3$.

Lời giải.

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = -\frac{2}{3}(m + 1)x + \frac{1}{3}(1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}(m + 1)x - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2(m + 1)x - 1 = 0$$

$$\text{Xét } \Delta' = (m + 1)^2 - 3(-1) = (m + 1)^2 + 3 > 0 \text{ với mọi } m$$

$\Rightarrow$ pt(1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

$\Rightarrow$ Đường thẳng (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt với mọi m (đccm).

- Xét

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 7x_1^3 + (m + 1)x_1^2 - x_1 - x_2^3 - (m + 1)x_2^2 + x_2 \\ &= (x_1^3 - x_2^3) - (x_1 - x_2) + (m + 1)(x_1^2 - x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 + (m + 1)(x_1 + x_2)) \\ &= (x_1 - x_2)[x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 + (m + 1)(x_1 + x_2)] \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Vi-ét cho pt(1) với 2 nghiệm x_1, x_2 , ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m + 1)}{3} \\ x_1x_2 = \frac{-1}{3} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } m + 1 = \frac{-3}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 + (m + 1)(x_1 + x_2)$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 1 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2)^2$$

$$= -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2] - \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x_1 - x_2)^2 - \frac{4}{3} \right] - \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2$$

Do đó

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_2)$$

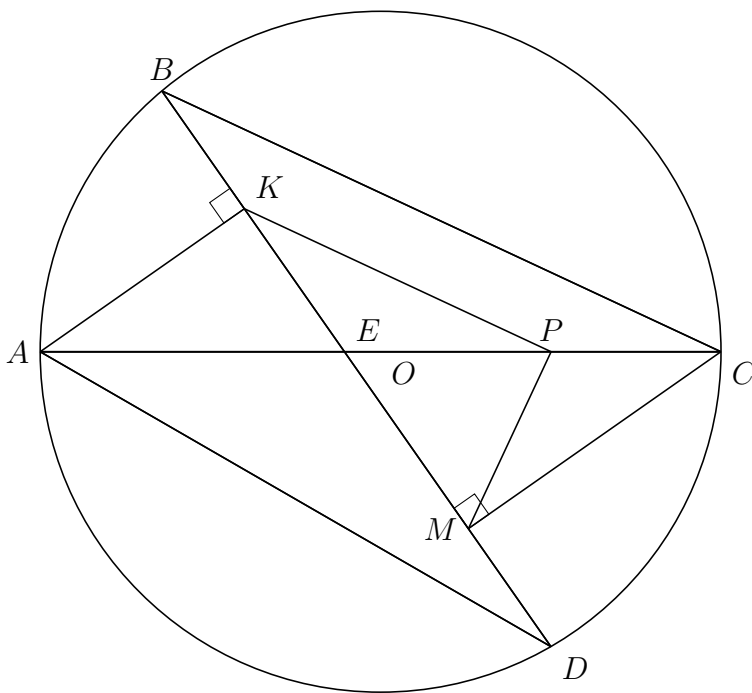
$$= -\frac{1}{2} (x_1 - x_2)^3 (\text{đccm})$$

□

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC = 2R$. Gọi K và M lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C xuống BD , E là giao điểm của AC và BD , biết K thuộc đoạn BE ($K \neq B, K \neq E$). Đường thẳng qua K song song với BC cắt AC tại P .

- Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.
- Chứng minh $KP \perp PM$.
- Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x .

Lời giải.



- Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AKPD$ có $\widehat{APK} = \widehat{ACB}$ (2 góc ở vị trí đồng vị)

Mặt khác: $\widehat{ACB} = \widehat{ADK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$$\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{APK}$$

$\Rightarrow ADPK$ là tứ giác nội tiếp.

- Chứng minh $KP \perp PM$.

Theo câu a), tứ giác $AKPD$ nội tiếp nên $\widehat{APD} = \widehat{AKD} = 90^\circ$ và $\widehat{DKP} = \widehat{DAP}$

Xét tứ giác $DMPC$ có $\widehat{DMC} = \widehat{DPC} = 90^\circ$

$\Rightarrow DMPC$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{DCA}$$

$$\text{mà } \widehat{DCA} + \widehat{DAC} = 90^\circ \text{ và } \widehat{PMK} + \widehat{PKM} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow KP \perp PM \text{ (đpcm)}$$

c) Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x .

Xét tam giác ADC vuông tại D có $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 60^\circ$ nên:

$$AD = 2R \cdot \sin 60 = R\sqrt{3} \text{ và } CD = 2R \cdot \cos 60 = R$$

$$\text{Xét tam giác vuông } AKB \text{ có } AB = \frac{AK}{\sin 60} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$$

$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ vuông tại } C \text{ có } BC = \sqrt{4R^2 - \frac{4x^2}{3}}$$

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, ta có:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$$

$$\Leftrightarrow 2R \cdot BD = R\sqrt{3} \sqrt{4R^2 - \frac{4x^2}{3}} + \frac{2\sqrt{3}x}{3} \cdot R$$

$$\Leftrightarrow BD = \sqrt{3R^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{3}}$$

□

Câu 5. Giải phương trình:

$$\frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} = 4.$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x \neq \frac{4}{7} \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$pt \Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - 5 - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 56x - 20 + 35x}{4 - 7x} - \frac{21x + 22 - x^3 - 2}{x^3 + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 21x - 20) \left(\frac{1}{4 - 7x} + \frac{1}{x^3 + 2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 5)(x + 4) \frac{(x - 1)(x - 2)(x + 3)}{(4 - 7x)(x^3 + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \\ x = -4 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

□

———— HẾT ————

2 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HƯNG YÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{1}{x - 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right] \cdot (x - 1) \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (x - 1) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot (x - 1) = (\sqrt{x} + 1)^2 \end{aligned}$$

- Vì $(\sqrt{x} + 1)^2 \geq 1$ với mọi $x \geq 0$ suy ra $0 < \frac{1}{A} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} \leq 1$.

Mặt khác $\frac{1}{A} \in \mathbb{N}$ nên $\frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn).

□

Câu 2.

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2$. Xác định tọa độ các điểm A, B trên (P) để tam giác OAB đều.
- Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(x + 2)^2(y - 2) + xy^2 + 26 = 0$.

Lời giải.

- Vì $A, B \in (P) : y = x^2$ và $OA = OB$ nên A, B đối xứng nhau qua Oy .

Gọi $A(a; a^2), B(-a; a^2), a \neq 0$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} OA = AB &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + a^4} = 2|a| \Leftrightarrow a^2 + a^4 = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow a^4 = 3a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Từ đó ta được $A(\sqrt{3}; 3), B(-\sqrt{3}; 3)$ hoặc $A(-\sqrt{3}; 3), B(\sqrt{3}; 3)$.

- Đặt $z = y - 2$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 z + (z + 2)^2 x + 26 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4)z + (z^2 + 4z + 4)x + 26 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + z + 8)(xz + 4) &= 6 \end{aligned}$$

Do $x + z + 8$ và $xz + 4$ là các số nguyên nên chỉ có các trường hợp $(x + z + 8; xz + 4)$ bằng

$$(6; 1), (1; 6), (-6; -1), (-1; -6), (3; 2), (2; 3), (-3; -2), (-2; -3)$$

Sử dụng định lí Viet đảo ta được x, z , từ đó ta có các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình đã cho là

$$(1; -1), (-3; 3), (-10; 3), (1; -8).$$

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình với $x^2 + \frac{8x^3}{\sqrt{9-x^2}} = 9$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3y = y^3 + 3x \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Với điều kiện $-3 < x < 3$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{8x^3}{\sqrt{9-x^2}} = 9 - x^2 &\Leftrightarrow 8x^3 = (\sqrt{9-x^2})^3 \\ \Leftrightarrow 2x = \sqrt{9-x^2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

- b) Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 3(x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 3. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ phương trình $x^2 + 2y^2 = 1$ suy ra $x^2 \leq 1, y^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow xy < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + xy < 3$. Bởi vậy, phương trình (2) vô nghiệm.

Với $x = y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ và $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và $AB > AC$. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D (D khác A) và cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) tại điểm E . Gọi F là giao điểm của BD và AC .

- a) Chứng minh $EF \parallel BC$.
- b) Gọi M là giao điểm của AD và BC . Các tiếp tuyến tại B, D của đường tròn (O) cắt nhau tại N . Chứng minh rằng $\frac{1}{BN} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{BM}$.

Lời giải.

- a)

Do AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên D là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$, suy ra $\widehat{BD} = \widehat{CD}$.

Theo tính chất của góc có đỉnh ở ngoài đường tròn ta có: $\widehat{AFB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{DC})$ và $\widehat{AEB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{BD})$, suy ra $\widehat{AFB} = \widehat{AEB}$, do đó tứ giác $ABEF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BFE}$.

Lại có $\widehat{BAE} = \widehat{CBD}$ (tính chất nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{CBF} = \widehat{BFE}$.

Vậy $BC \parallel EF$.

b) Do $\widehat{CBD} = \frac{1}{2}\widehat{CD} = \frac{1}{2}\widehat{BD} = \widehat{BDN} = \widehat{DBE}$ nên $DN \parallel BC$ và BD là phân giác của $\widehat{MBE}$, suy ra $\frac{DE}{DM} = \frac{NE}{NB}$ và $\frac{DE}{DM} = \frac{BE}{BM}$. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{NE}{NB} = \frac{BE}{BM} &\Leftrightarrow \frac{NE + NB}{NB} = \frac{BE + BM}{BM} \Leftrightarrow \frac{BE}{BN} = \frac{BE + BM}{BM} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{BN} = \frac{BE + BM}{BE \cdot BM} \Leftrightarrow \frac{1}{BN} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{BM}. \end{aligned}$$

□

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AH . Gọi M là giao điểm của AO và BC . Chứng minh rằng $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} \geq 2\frac{AB}{AC}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Gọi AD là đường kính của đường tròn (O) , ta có $\widehat{HBA} = \widehat{CDA}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$) và $\widehat{AHB} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Suy ra $\triangle HBA \sim \triangle CDA$ (g-g) và $\triangle HCA \sim \triangle BDA$ (g-g). Do đó

$$\frac{HB}{CD} = \frac{BA}{DA}; \frac{HC}{BD} = \frac{CA}{DA} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{DC}{DB}. \quad (1)$$

Lại có $\triangle AMB \sim \triangle CMD$ (g-g); $\triangle AMC \sim \triangle BMD$ (g-g) suy ra

$$\frac{MB}{MD} = \frac{AB}{CD}; \frac{MC}{BD} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{DB}{DC}. \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1), (2) và áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta được

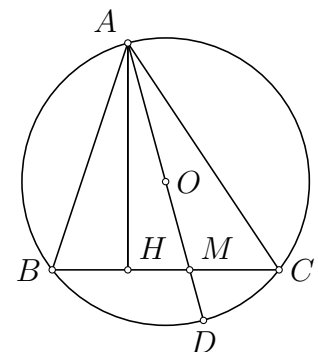
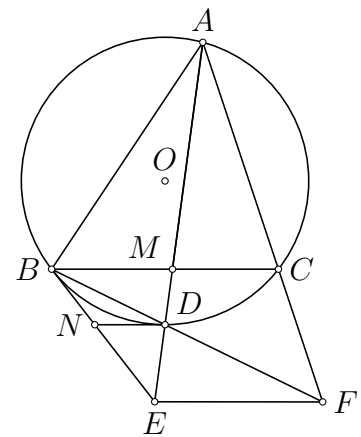
$$\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} = \left(\frac{DC}{DB} + \frac{DB}{DC} \right) \cdot \frac{AB}{AC} \geq 2\frac{AB}{AC}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $DB = DC \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \triangle ABC$ cân tại A . □

Câu 6. Trong hình vuông cạnh 5cm, đặt 2015 đường tròn có đường kính $\frac{1}{20}$ cm. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất 20 đường tròn trong 2015 đường tròn trên.

Lời giải.

Dựng 106 đường thẳng cùng song song với một cạnh của hình vuông, chia hình vuông thành 107 hình chữ nhật bằng nhau, mỗi hình có chiều rộng là $\frac{5}{107}$ cm. Do $\frac{5}{107} < \frac{1}{20}$ nên mỗi đường tròn



đều bị cắt bởi ít nhất một đường thẳng đã dựng.

Có 106 đường thẳng, nếu mỗi đường thẳng cắt nhiều nhất 19 đường tròn đã cho thì có nhiều nhất 2014 đường tròn bị cắt.

Vì có 2015 đường tròn, nên tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất 20 đường tròn đã cho. □

———— HẾT ————

3 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN, VÒNG 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- 1) Giả sử a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a^2 + 3a = b^2 + 3b = 2$
 - a) Chứng minh rằng $a + b = -3$.
 - b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = -45$.
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ 4x^2 + y^2 = 5xy \end{cases}.$$

Lời giải.

- 1) a) Ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 + 3b = 2 \\ b^2 + 3a = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 + 3(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a + b + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \text{ (loại)} \\ a + b = -3. \end{cases}$$
- b) Ta có $(a + b)^3 = -27 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -27$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 - 9ab = -27$$

Theo giả thiết, $a^2 + 3a + b^2 + 3b = 4 \Leftrightarrow (a + b)^2 - 2ab + 3(a + b) = 4 \Leftrightarrow ab = -2$.

Vậy $a^3 + b^3 = -45$.
- 2) Ta có $x = y = 0$ là nghiệm của hệ. Với $y \neq 0$, nhân hai vế của phương trình đầu với y ta được

$$\begin{cases} 2xy + 3y^2 = 5xy^2 \\ 4x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + 3y^2 = 5xy^2 \\ 4x^2 - 2xy - 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ (x - y)(2x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ x - y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 3y = 5xy \\ 2x + y = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases} \end{cases}.$$

□

Câu 2.

- 1) Tìm các số nguyên x, y không nhỏ hơn 2 sao cho $xy - 1$ chia hết cho $(x - 1)(y - 1)$.
- 2) Với x, y là những số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2 + 2y + 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{3y + 1}$.

Lời giải.

- 1 Ta có $xy - 1 : (x - 1)(y - 1)$ suy ra $xy - 1 : xy + 1 - x - y$. Mặt khác, $xy + 1 - x - y : xy + 1 - x - y$. Suy ra $(x - 1) + (y - 1) : (x - 1)(y - 1)$, suy ra $x - 1 : y - 1$ và $y - 1 : x - 1$. Dẫn đến $x = y$. Ta có $x^2 - 1 : (x - 1)^2$, suy ra $x + 1 : x - 1 \Rightarrow 2 : x - 1 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$.
- 2 Ta có $x^3y^3 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x^2y^2 - 1}{2}$. Khi đó

$$P = \frac{xy}{3(-x^2y^2 - 1) + 2} = \frac{xy}{-3x^2y^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow 3p^2x^2y^2 + 2xy + p = 0.$$

Ta có, $\Delta = 4 - 12p^2$. Phương trình trên có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 12p^2 \geq 0 \Rightarrow p \leq \sqrt{3}$.

Vậy $p_{\max} = \sqrt{3}$ khi $xy = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Suy ra $y = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{27}{52\sqrt{3}}$

□

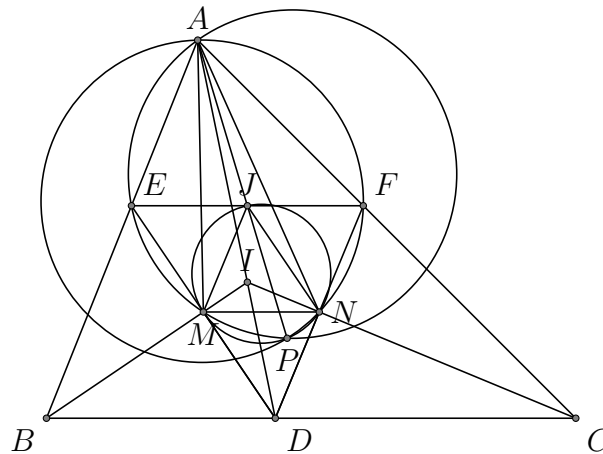
Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC không cân có tâm đường tròn nội tiếp là điểm I . Đường thẳng AI cắt BC tại D . Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC, IB .

1) Chứng minh EF song song với BC .

2) Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DE, DF, EF . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN tại P khác A . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, J cùng nằm trên một đường tròn.

3) Chứng minh rằng ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Lời giải.



1 Vì AD là phân giác, nên $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ mà $\triangle BED$ và $\triangle CDF$ cân, suy ra $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BC \parallel EF$.

2 Từ $BC \parallel EF$, suy ra $\widehat{FED} = \widehat{EDB} = \widehat{BED}$ mà $\widehat{APM} = 180^\circ - \widehat{AEM} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{APM} = \widehat{DEF}$. Tương tự ta có $\widehat{DFE} = \widehat{APN} \Rightarrow \widehat{APN} + \widehat{APM} = \widehat{DFE} + \widehat{FED} = \widehat{MPN}$. Mặt khác $\widehat{MJN} = \widehat{MDN} = \widehat{EDF} \Rightarrow \widehat{MJN} + \widehat{MPN} = 180^\circ \Rightarrow MPNJ$ nội tiếp.

3 Ta có $\widehat{APM} = \widehat{DEF}$ và $\widehat{JPM} = \widehat{JNM} = \widehat{JEM} \Rightarrow \widehat{JPM} = \widehat{APM}$. Vậy A, P, J thẳng hàng.

□

Câu 4.

a) Cho bảng ô vuông 2015×2015 . Kí hiệu ô (i, j) là ô ở hàng thứ i , cột thứ j . Ta viết các số nguyên dương từ 1 đến 2015 vào các ô của bảng theo quy tắc sau:

- i) Số 1 được viết vào ô $(1, 1)$.
 ii) Nếu số k được viết vào ô (i, j) , $(i > 1)$ thì số $k + 1$ được viết vào ô $(i - 1, j + 1)$.
 iii) Nếu số k được viết vào ô $(1, j)$ thì số $k + 1$ được viết vào ô $(i - 1, j + 1)$ như hình dưới đây:

1	3	6	10	...
2	5	9	...	
4	8	...		
7	...			
...				

Khi đó số 2015 được viết vào ô (m, n) . Hãy xác định m và n .

- b) Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac + abc \leq 4$. Chứng minh rằng
- $$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ac).$$

Lời giải.

- 1) Theo đề bài, các số nguyên dương được sắp xếp theo từng hàng chéo của bảng: Hàng chéo thứ nhất có 1 số, hàng chéo thứ hai có 2 số, ... Giả sử số x nằm ở hàng chéo thứ k thì ta có:
- $$\frac{k(k-1)}{2} < x \leq \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{1+8x}}{2} \leq k < \frac{1 + \sqrt{1+8x}}{2} \Rightarrow k = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1+8x}}{2} \right\rceil.$$

Áp dụng $x = 2015$ ta có $k = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1+8 \cdot 2015}}{2} \right\rceil = 63$.

Số đầu tiên ở hàng chéo thứ $k = 63$ là $\frac{k(k-1)}{2} + 1 = 1954$.

Như vậy số 2015 nằm ở vị trí thứ $2015 - 1954 + 1 = 62$ của hàng chéo thứ 63 (Vị trí áp chót), tạo độ của nó là $(2, 62)$.

- 2) Theo bất đẳng thức Cauchy cho 4 số ta có $4 \geq abc + ab + bc + ac \geq 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Rightarrow abc \leq 1$
 $\Leftrightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab + bc + ac) \quad (1)$$

Đặt $x = \sqrt[3]{a^2}, y = \sqrt[3]{b^2}, z = \sqrt[3]{c^2}$ ($a, b, c > 0$)

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{y^3z^3} + 2\sqrt{z^3x^3}$$

Ta nhận thấy

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z)$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0 \text{ với mọi số thực không âm } x, y, z.$$

Ta cần chứng minh $x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0$ với mọi số thực không âm x, y, z .

Do vai trò x, y, z như nhau, giả sử $x \geq y \geq z \Leftrightarrow z(z-x)(z-y) \geq 0$.

Ta xét

$$x(x-z) - y(y-z) = x^2 - xz + yz - y^2 = (x-y)(x+y-z) \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x-z)(x-y) - y(y-z)(x-y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-z)(x-y) + y(y-z)(y-x) \geq 0.$$

$$\Rightarrow x(x-z)(x-y) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Do đó

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z) \geq 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{z^3x^3} + 2\sqrt{z^3y^3}.$$

Dấu bằng khi và chỉ khi $x = y = z = 0 \Rightarrow a = b = c = 1$.

□

———— HẾT ————

4 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI VÒNG 2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Cho $a \geq 0, a \neq 1$. Rút gọn biểu thức

$$S = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a} - 3a - 1} : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1 \right].$$

b) Cho x, y thỏa mãn: $0 < x < 1, 0 < y < 1$ và

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1.$$

Tính giá trị biểu thức $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.

Lời giải.

$$1) S_1 = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{4 - 4\sqrt{2} + 2} \cdot \sqrt[3]{8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3}$$

$$= (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$S_2 = \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a} - 3a - 1} : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1 \right]$$

$$= \sqrt[3]{a\sqrt{a} - 3a + 3\sqrt{a} - 1} : \left[\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{2(\sqrt{a}-1)} - 1 \right]$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{a}-1)^3} : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{2} - 1 \right) \text{ (vì } a \neq 1 \text{ nên } \sqrt{a}-1 \neq 0)$$

$$= (\sqrt{a}-1) : \left(\frac{\sqrt{a}-1}{2} \right) = 2$$

$$\text{Vậy } S = 2 + 2 = 4$$

2)

$$\text{Theo giả thiết } \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$$

$$\Rightarrow x(1-y) + y(1-x) = 1 + xy - x - y$$

$$\Rightarrow 2x + 2y - 3xy - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -xy = -2(x+y) + 2xy + 1.$$

$$\text{Do đó, } x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2.$$

$$\text{Vậy } P = x + y + \sqrt{(x+y-1)^2} = x + y + |x+y-1|.$$

$$\text{Từ giả thiết ta lại có } \frac{x}{1-x} < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{y}{1-y} < 1 \Rightarrow y < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 0 < x+y < 1, \text{ ta có } P = x + y + 1 - x - y = 1$$

□

Câu 2. Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m và chiều cao là 2,5 m muốn qua một cái cổng có hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh Parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dày của cổng).

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi Parabol (P) : $y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

2. Hỏi xe tải có qua cổng được không? Tại sao?

Lời giải.

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , do đã gọi Parabol $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua nên $O(0; 0)$ là tọa độ đỉnh cổng. Gọi A, B là vị trí hai chân cổng và I là trung điểm AB (các điểm A, B, I đều có tung độ âm do (P) nằm dưới trục hoành).

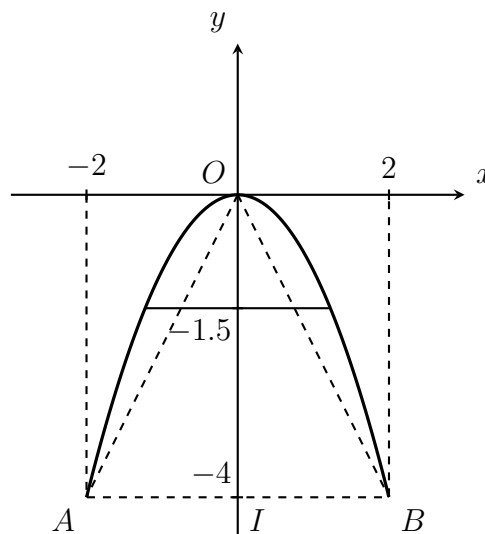
Khi đó $OA = OB = 2\sqrt{5}$, $AB = 4$, $IA = IB = 2$ và A, B là hai điểm đối xứng của nhau qua Oy .

Do $\triangle OAB$ cân tại O và I là trung điểm AB nên $OI \perp AB$ hay $\triangle AOI$ vuông tại I .

Áp dụng định lý Pythagore, ta có $OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{20 - 4} = 4$.

Do $OI = 4$ và $IA = 2$ nên ta suy ra tọa độ $A(-2, -4)$, $B(2, -4)$, $I(0, -4)$.

Do A thuộc (P) nên tọa độ A thỏa $y = ax^2$ hay $-4 = a \cdot (-2)^2 \Leftrightarrow a = -1$.



2. Để biết xe có qua được cổng hay không ta cần so sánh chiều rộng của xe và chiều rộng của cổng ở độ cao 2,5 m tức là ở vị trí $y = -1,5$.

Ta sẽ tìm hoành độ giao điểm của đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}$ và đồ thị $(P): y = -x^2$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $-x^2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$.

Suy ra chiều rộng của cổng ở độ cao 2,5 m bằng $x_2 - x_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$ m.

Ta có $(\sqrt{6})^2 = 6 > (2,4)^2 = 5,76$ nên $\sqrt{6} > 2,4$.

Vậy xe tải có thể đi qua cổng. □

Câu 3. Cho hai số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh rằng a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra $a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a + 2b = 4b \Leftrightarrow (b - a + 1)^2 = 4b$

Suy ra $b = \frac{(b - a + 1)^2}{4} = \left(\frac{b - a + 1}{2}\right)^2$

Do đó b là số chính phương.

Tương tự, ta có $a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2b + 2a = 4a \Leftrightarrow (b - a - 1)^2 = 4a$

$$\text{Suy ra } a = \frac{(b-a-1)^2}{4} = \left(\frac{b-a-1}{2}\right)^2$$

Do đó a là số chính phương.

Mà $\frac{b-a+1}{2} - \frac{b-a-a}{2} = 1$ nên a và b là hai số chính phương liên tiếp.

□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), M là trung điểm của cạnh BC , O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H . Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại S . Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO . Chứng minh rằng:

- $MX \perp BF$.
- Hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.
- $\frac{EF}{FY} = \frac{BC}{CD}$.

Lời giải.

a) Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn $(M, \frac{BC}{2})$

Ta có: $\angle ACB = \angle XFB$ (cùng bù với $\angle EFB$)

$\angle XBF = \angle ACB$ (cùng chắn cung AB)

nên $\angle XFB = \angle XBF$ suy ra $\triangle XFB$ cân tại X nên $XF = XB$

Mặt khác: $FM = BM (= \frac{1}{2}BC)$ nên XM là đường trung trực của FB . Vậy $XM \perp BF$

b) Ta có: $\angle BFD = \angle ACB$ (cùng bù với $\angle AFD$)

mà $\angle ACB = \angle XFB$ (cùng chắn cung AB)

nên $\angle BFD = \angle XFB = \angle XBF$

mà ta có: $\angle BXM + \angle XBF = 90^\circ$ và $\angle DFH + \angle BFD = 90^\circ$

suy ra $\angle BXM = \angle DFH$

Ta có: $\angle BAC = \angle BOS \left(= \frac{1}{2} \angle BOC \right)$

mà $\angle BAC + \angle ABE = 90^\circ$ và $\angle BOS + \angle BSO = 90^\circ$

Suy ra $\angle ABE = \angle BSO = \angle FDH$

Xét $\triangle FDH$ và $\triangle XMS$:

$\angle BXM = \angle DFH$

$\angle FDH = \angle BSO$

Suy ra: $\triangle FHD \sim \triangle SMX$ (g.g) c) Kéo dài AO cắt (O) tại N

Ta có: $\angle NBC = \angle NAC, \angle AEF = \angle ABC$

Suy ra: $\angle NAC + \angle AEF = \angle ABC + \angle NBC = 90^\circ$

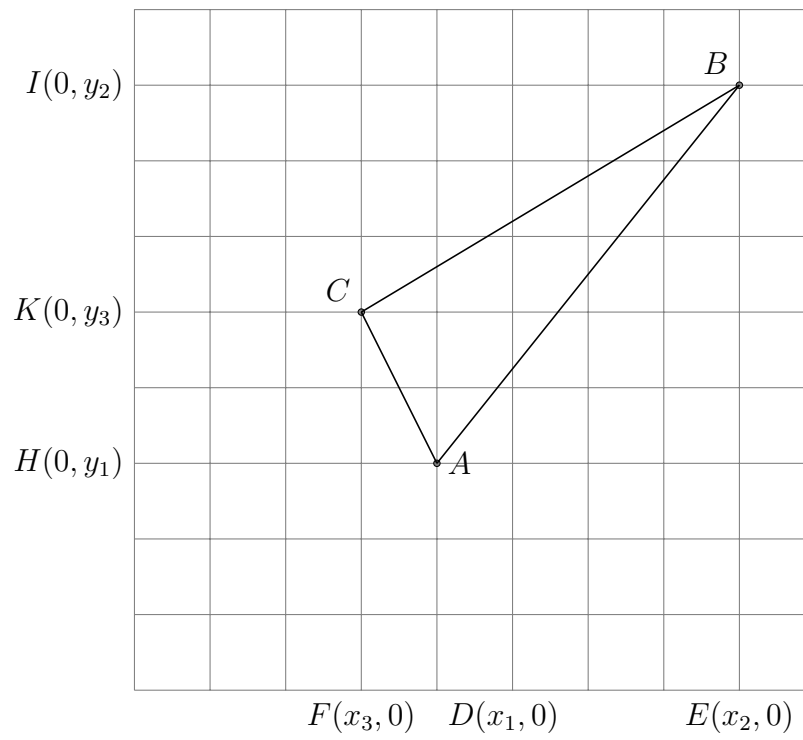
Suy ra: $AD \perp EF$

Do đó: $\triangle AEF \sim \triangle ADC$

Nên $\frac{EF}{DC} = \frac{AF}{AC}$

$\triangle ABC \sim \triangle AEF$

Suy ra: $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$



□

———— HẾT ————

5 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BẮC GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- 1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} + 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - 1 \right)$.
- a) Tìm điều kiện của a, b để biểu thức A có nghĩa, từ đó hãy rút gọn biểu thức A .
- b) Cho $\sqrt{ab} + 1 = 4\sqrt{b}$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A .
- 2) Tìm giá trị của m để phương trình $2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 < 2017$.

Lời giải.

$$1) A = \left(\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} + 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - 1 \right).$$

$$a) \text{ Đặt } B = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} + 1; C = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - 1.$$

Vậy $A = B : C$. Điều kiện của B, C có nghĩa là $a \geq 0; b \geq 0; a \neq b$.

$$B = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} + 1 = \frac{-2b(\sqrt{a} + 1)}{a - b}.$$

$$C = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - 1 = \frac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a} + 1)}{a - b}.$$

Điều kiện của A có nghĩa là $a > 0; b > 0; a \neq b$.

$$\text{Vậy } A = \frac{-2b(\sqrt{a} + 1)}{a - b} : \frac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a} + 1)}{a - b} = \frac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ với } a > 0, b > 0, a \neq b.$$

$$b) \text{ Ta có } \sqrt{ab} + 1 = 4\sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} = 4.$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có

$$4 = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \leq \frac{-1}{4}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a = 4; b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } A = \frac{-1}{4} \text{ khi } a = 4; b = \frac{1}{4}.$$

$$2) 2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = 4m^2 - 2(2m^2 - 1) = 2 > 0.$$

Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m$.

$$\text{Do } x_1 \text{ là nghiệm của phương trình (1) nên } 2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 = 4mx_1 - 2m^2 + 1.$$

$$\text{Ta có } 2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 < 2017 \Leftrightarrow 4mx_1 - 2m^2 + 1 + 4mx_2 + 2m^2 < 2017 \Leftrightarrow 4m(x_1 + x_2) < 2016$$

$$\Leftrightarrow 4m \cdot 2m < 2016 \Leftrightarrow m^2 < 252 \Leftrightarrow -6\sqrt{7} < m < 6\sqrt{7}.$$

Vậy $-6\sqrt{7} < m < 6\sqrt{7}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

□

Câu 2.

$$1) \text{ Giải phương trình } x(2x^2 + 13x - 6) = (x^2 + 8x - 6)\sqrt{x^2 + 6x}.$$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + x^2 - 6y + 10 = 0 \\ x^2 - 6y^2 + xy + 2x + 11y - 3 = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

1) $x(2x^2 + 13x - 6) = (x^2 + 8x - 6)\sqrt{x^2 + 6x}$ (*)

Điều kiện $x^2 + 6x \geq 0$.

Phương trình (*) $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 6x} - 2x)(\sqrt{x^2 + 6x} - x^2 - 6x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} - 2x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 6x} - x^2 - 6x + 6 = 0. \end{cases}$

Xét $\sqrt{x^2 + 6x} - 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 6x} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 6x = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Xét $\sqrt{x^2 + 6x} - x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 6x} - 6 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 6x} - 3)(\sqrt{x^2 + 6x} + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 6x} - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3\sqrt{2} \\ x = -3 + 3\sqrt{2} \end{cases}$ (điều kiện thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $\{-3 - 3\sqrt{2}; -3 + 3\sqrt{2}; 0; 2\}$.

2)
$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + x^2 - 6y + 10 = 0 & (1) \\ x^2 - 6y^2 + xy + 2x + 11y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$.

Từ (2) suy ra $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ x = 1 - 3y. \end{cases}$

Với $x = 1 - 3y \Leftrightarrow 3y = 1 - x$ thay vào (1) ta được $\sqrt{2x-1} + x^2 - 2(1-x) + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + (x+1)^2 + 7 = 0$ (vô nghiệm).

Với $x = 2y - 3 \Leftrightarrow 2y = x + 3$ thay vào (1) ta được $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3(x+3) + 10 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ (3).

Đặt $t = \sqrt{2x-1}$ ($t \geq 0$), phương trình (3) trở thành

$t + x^2 - x - t^2 = 0 \Leftrightarrow (t-x)(1-t-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 1-x. \end{cases}$

Với $t = x$ ta có $x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$.

Với $t = 1-x$ ta có $1-x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2}$.

Khi $x = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{5 - \sqrt{2}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện và kết luận hệ có các nghiệm $(1; 2), \left(2 - \sqrt{2}; \frac{5 - \sqrt{2}}{2}\right)$.

□

Câu 3.

- 1) Tìm số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng khi chia số đó cho 120 được số dư là 88 và khi chia cho 61 được số dư là 39.
- 2) Trong một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài 8 m và chiều rộng 6 m người ta trồng 19 cây. Chứng minh rằng trong mọi cách trồng 19 cây đó, có ít nhất hai cây mà khoảng cách vị trí trồng giữa chúng không lớn hơn $\sqrt{5}$ m.

Lời giải.

- 1) Gọi số tự nhiên có 4 chữ số phải tìm là x , $1000 \leq x \leq 9999$.

Theo giả thiết ta có $x = 120n + 88 = 61k + 39$ với $n, k \in \mathbb{N}$.

Từ đó ta có $120n - 60k = k - 49$ suy ra $k - 49$ chia hết cho 60.

Mặt khác ta có:

$$1000 \leq x \leq 9999 \Rightarrow 1000 \leq 61k + 39 \leq 9999 \Rightarrow \frac{961}{61} \leq k \leq \frac{9960}{61}$$

$$\Rightarrow 15 < k < 164 \Rightarrow -34 < k - 49 < 115.$$

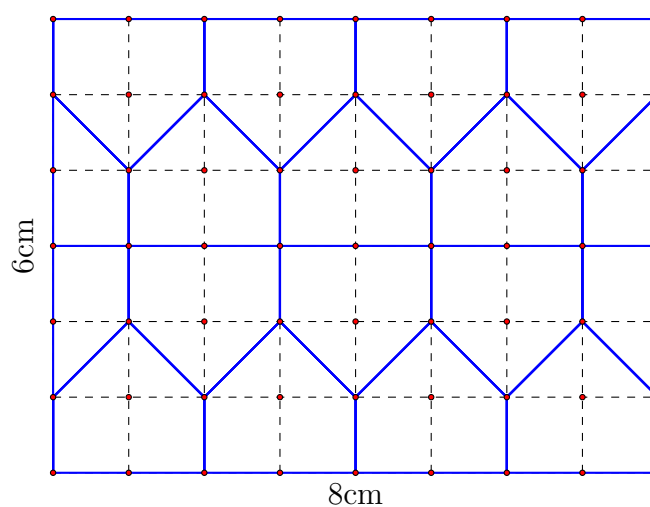
Mà $k - 49$ chia hết cho 60 nên $k - 49$ chỉ có thể là 0; 60.

Với $k = 49 \Rightarrow x = 3028$ (chia 120 dư 28).

Với $k = 109 \Rightarrow x = 6688$ (chia 120 dư 88).

Vậy số cần tìm là 6688.

- 2) Chia khu vườn hình chữ nhật thành 18 phần như hình vẽ.



Chỉ ra được khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trên cùng một phần nhỏ hơn bằng $\sqrt{5}$ m.

Vì có 19 cây được trồng trong một hình có 18 phần như hình vẽ nên có ít nhất một phần được trồng ít nhất hai cây.

Khẳng định hai cây đó có khoảng cách không lớn hơn $\sqrt{5}$ m.

Kết luận điều phải chứng minh.

□

Câu 4.

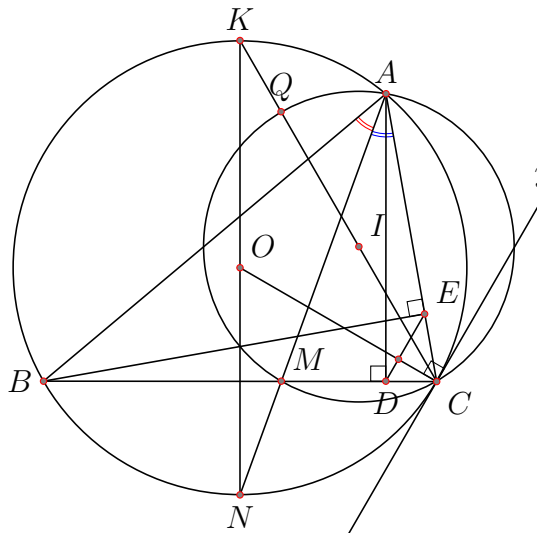
- 1) Cho đường tròn (O) có dây BC cố định, A là điểm thay đổi trên cung lớn BC (điểm A không trùng với B và C ; AB không là đường kính). Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BC và E là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC .

a) Chứng minh OC vuông góc với DE .

b) Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại M , cắt đường tròn (O) tại N ($N \neq A$). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$. Chứng minh NO và CI cắt nhau tại một điểm cố định khi A di chuyển trên cung lớn BC của đường tròn (O) .

- 2) Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Chứng minh $AB^3 + BC^3 = 3AB^2 \cdot BC$.

Lời giải.



- Điều phải chứng minh.

☐

Câu 5. Cho hai số thực $a \neq 0; b \neq 0$ thỏa mãn $a(ab + 1) = a^2b^2 - ab + 1$. Chứng minh rằng

$$a^3b^3 + 1 \leq 16a^3.$$

Lời giải.

Đặt $\frac{1}{a} = c$ khi đó $a(ab + 1) = a^2b^2 - ab + 1 \Rightarrow b + c = b^2 - bc + c^2$ (4).

Từ $a^3b^3 + 1 \leq 16a^3$ ta được $b^3 + c^3 \leq 16$.

Ta có $T = b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 - bc + c^2) = (b + c)^2$.

Mặt khác từ (4) ta có $b + c = (b + c)^2 - 3bc \geq (b + c)^2 - \frac{3}{4}(b + c)^2 = \frac{1}{4}(b + c)^2 \Rightarrow (b + c)^2 \leq 4(b + c)$.

Khẳng định được $0 \leq b + c \leq 4$.

Suy ra $T = (b + c)^2 \leq 16$. Điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{1}{2}; b = 2$. □

————— **HẾT** —————

6 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẠC LIÊU

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Chứng minh tích của 4 số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.
b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2 - xy = x^2 + 3y^2$.

Lời giải.

- a) Giả sử có 4 số nguyên dương liên tiếp là $n, n+1, n+2, n+3$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\text{Ta có: } A = n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) \\ \Rightarrow (n^2+3n)^2 < A < (n^2+3n+1)^2.$$

Vậy A không thể là số chính phương.

- b) Ta có $x^2y^2 - xy = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow (x^2-3)y^2 - xy - x^2 = 0$. (1)

Vì $x^2-3 \neq 0$ nên (1) là phương trình bậc hai đối với y , có $\Delta = x^2 + 4x^2(x^2-3) = x^2(4x^2-11)$.

Phương trình (1) có nghiệm nguyên khi Δ là số chính phương.

Nếu $x=0$ thì $y=0$. Nếu $x \neq 0$ thì $4x^2-11$ phải là số chính phương.

Đặt $4x^2-11 = z^2$ ($z \in \mathbb{N}$) ta được:

$$4x^2 - z^2 = 11 \Leftrightarrow (2x-z)(2x+z) = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z=11 \\ 2x-z=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x+z=-1 \\ 2x-z=-11 \end{cases}.$$

Suy ra $x=3$ hoặc $x=-3$.

Với $x=3$, ta được $2y^2 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = \frac{3}{2}$. (loại)

Với $x=-3$, ta được $2y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -\frac{3}{2}$. (loại)

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(3; -1)$ và $(-3; 1)$.

□

Câu 2.

- a) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{3}}}$.
b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y + 2 = 0 \\ y^2 - xy - 3x - 5y = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có $A = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} - \frac{\sqrt{6}}{2 - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3 + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = -\sqrt{2}$$

b) Ta có $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y + 2 = 0(1) \\ y^2 - xy - 3x - 5y = 0(2) \end{cases}$.

Lấy (1) cộng (2) ta được $(x+y)^2 - 3(x+y) + 2 = 0 \Leftrightarrow x+y=1$ hoặc $x+y=2$.

* $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$, thay vào (1) được $2x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$.

* $x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x$, thay vào (1) được $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x=3$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm $(-1; 3)$, $(3; -1)$, $\left(\frac{1+\sqrt{33}}{4}; \frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{33}}{4}; \frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$.

□

Câu 3.

a) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số). Xác định giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{18}{7}$.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z = 2$. Chứng minh: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6$. (*)

Khi đó, theo định lí Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1 x_2 = m^2 - m - 6$.

$$\text{Do đó, } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{18}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x_1 + x_2)^2 - 32x_1 x_2 = 0 \\ x_1 x_2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m - 48 = 0 \\ m^2 - m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 12 \end{cases} \text{ (thỏa)} \\ (*)$$

Vậy $m = -4$ và $m = 12$ là các giá trị cần tìm.

b) Ta có: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ (1) $\Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2(x+z)}{y} + \frac{y^2(y+x)}{z} + \frac{z^2(z+y)}{x} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\frac{x^2(x+z)}{y} + (x+z)y \geq 2x(x+z)$; $\frac{y^2(y+x)}{z} + (y+x)z \geq 2y(y+x)$; $\frac{z^2(z+y)}{x} + (z+y)x \geq 2z(z+y)$.

Cộng vế theo vế ta được: $\frac{x^2(x+z)}{y} + \frac{y^2(y+x)}{z} + \frac{z^2(z+y)}{x} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2)$.

Do đó, bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{2}{3}$.

□

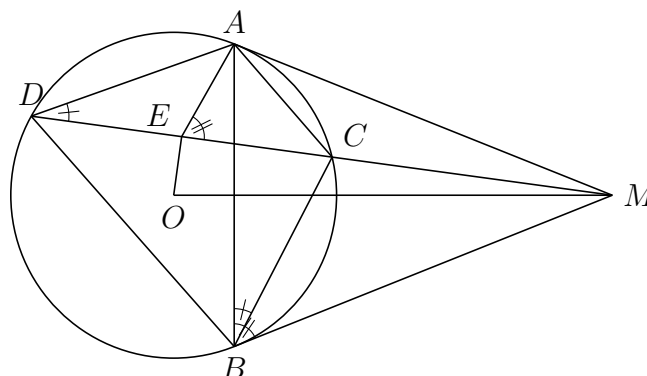
Câu 4. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD của đường tròn đó (C nằm giữa M và D , dây CD không đi qua O). Gọi E là trung điểm của dây CD . Chứng minh:

a) $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$.

b) $AC \cdot BD = BC \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$.

Lời giải.

Ta có hình vẽ:

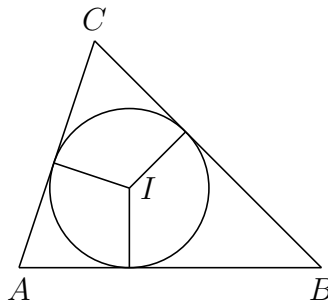


- a) Vì $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = \widehat{OEM} = 90^\circ$ nên năm điểm O, M, A, B, E cùng thuộc đường tròn đường kính OM , suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn $\widehat{AM}$).
 Mà $\widehat{ADE} + \widehat{DAE} = \widehat{AEM}$, $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ nên suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$.
- b) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$, có $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$ (chứng minh trên) và $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ (chắn $\widehat{AC}$).
 Suy ra $\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow AD \cdot BC = AB \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$. (1)
- Tương tự, chứng minh được: $\triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow AC \cdot BD = AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$. (2)
- Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. □

Câu 5. Cho điểm M nằm trong tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và diện tích là S . Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh BC, AC, AB lần lượt là x, y, z . Xác định vị trí của điểm M trong tam giác ABC sao cho biểu thức $Q = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ.

Lời giải.

Ta có hình vẽ:



$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= S_{MBC} + S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2}(ax + by + cz) \Rightarrow 2SQ = (ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ca \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right). \\ \text{Mà } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\geq 2; \\ \frac{y}{z} + \frac{z}{y} &\geq 2; \\ \frac{z}{x} + \frac{x}{z} &\geq 2. \\ \Rightarrow 2SQ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 \\ \Rightarrow Q &\geq \frac{(a + b + c)^2}{2S}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow M$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Vậy Q nhỏ nhất khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . □

———— HẾT ————

7 THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẮC NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- (a) Phân tích đa thức $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ thành nhân tử.
 (b) Rút gọn $Q = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ với $x > 1$ và $x \neq 2$.

Lời giải.

- (a) Ta có $P(x) = (x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) = (x-1)(x+1)(x^2 + 5x + 6) = (x+1)(x-1)(x+2)(x+3)$.

- (b) Ta có

$$Q = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$= \frac{|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|}{|x-1|} \cdot \frac{x-2}{x-1}.$$

$$\text{Với } x > 2 \text{ thì } Q = \frac{2}{\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{Với } 0 < x < 1 \text{ thì } Q = \frac{-2}{x-1}.$$

□

Câu 2.

- (a) Giải phương trình $2(2x-1) - 3\sqrt{5x-6} = \sqrt{3x-8}$.
 (b) Cho bốn số thực a, b, c, d khác 0 thỏa mãn các điều kiện sau: a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 10cx - 11d = 0$; c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 10ax - 11b = 0$. Tính giá trị của $S = a + b + c + d$.

Lời giải.

- (a) Điều kiện $x \geq \frac{8}{3}$.

Phương trình tương đương với

$$8x - 4 - 6\sqrt{5x-6} - 2\sqrt{3x-8} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 6 - 6\sqrt{5x-6} + 9 + 3x - 8 - 2\sqrt{3x-8} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-6} - 3)^2 + (\sqrt{3x-8} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-6} - 3 = 0 \\ \sqrt{3x-8} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

- (b) Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} a+b=10c \\ ab=-11d \end{cases}$ và $\begin{cases} c+d=10a \\ cd=-11b \end{cases}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} ac=121 \\ b+d=9(a+c) \end{cases}. \text{ Ta có}$$

$$(a^2 - 10ca - 11d) + (c^2 - 10ac - 11b) = 0 \Leftrightarrow (a+c)^2 - 99(a+c) - 2662 = 0.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a + c = 121 \\ a + c = -22 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a + b + c + d = 10(a + c) = 1210 \\ a + b + c + d = 10(a + c) = -220 \end{cases}$$

□

Câu 3. Cho $a, b, c > 0$. Tìm GTNN của $M = \frac{3a^4 + 3b^4 + c^3 + 2}{(a + b + c)^3}$.

Lời giải.

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\begin{cases} 3a^4 + 1 = a^4 + a^4 + a^4 + 1 \geq 4a^3 \\ 3b^4 + 1 = b^4 + b^4 + b^4 + 1 \geq 4b^3 \end{cases}$$

Suy ra $M \geq \frac{4(a^3 + b^3) + c^3}{(a + b + c)^3}$. Áp dụng bất đẳng thức $(x^3 + y^3) \geq \frac{1}{2}(x + y)^3$ với $x, y > 0$, ta có

$$4(a^3 + b^3) + c^3 \geq (a + b)^3 + c^3 \geq \frac{1}{4}(a + b + c)^3.$$

Suy ra $M \geq \frac{1}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$. Vậy GTNN của M là $\frac{1}{4}$. □

Câu 4. Trên đường tròn (C) tâm O , bán kính R vẽ dây cung $AB < 2R$. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax, By với đường tròn (C) . Lấy điểm M bất kỳ thuộc cung nhỏ AB (M khác A và B). Gọi H, K và I lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống AB, Ax và By .

(a) Chứng minh rằng $MH^2 = MK \cdot MI$.

(b) Gọi E là giao điểm của AM và KH , F là giao điểm của BM và HI . Chứng minh rằng đường thẳng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI .

(c) Gọi D là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI . Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cung nhỏ AB thì đường thẳng DM luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.

- (a) Tìm ba số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a < b < c$, $(bc - 1)$ chia hết cho a , $(ca - 1)$ chia hết cho b và $(ab - 1)$ chia hết cho c .
- (b) Các nhà khoa học gặp nhau tại một hội nghị. Một số người là bạn của nhau. Tại hội nghị không có hai nhà khoa học nào có số bạn bằng nhau lại có bạn chung. Chứng minh rằng có một nhà khoa học chỉ có đúng một người bạn.

Lời giải.

$$(a) \text{ Ta có } \begin{cases} bc - 1 : a \\ a(b + c) : a \end{cases} \Rightarrow ab + bc + ca - 1 : a.$$

Tương tự với b, c . Do a, b, c nguyên tố nên $ab + bc + ca - 1 : abc$.

Với $a = 2$ ta có $2b + 2c + bc - 1 : 2bc \Rightarrow 4b + 4c - 2 : 2bc$.

Suy ra $4b + 4c - 2 \geq 2bc \Rightarrow 3 \geq (b - 2)(c - 2)$. Suy ra $b = 3; c = 5$.

Với $a \geq 3$ ta có $abc \geq 3bc > ab + bc + ca > ab + bc + ca - 1$ trái với $ab + bc + ca - 1 : abc$.

Vậy không có a, b, c thỏa mãn trường hợp này.

- (b) Gọi k là số bạn của nhà khoa học có nhiều nhất tại hội nghị. Nếu có hai hoặc nhiều hơn nhà khoa học có số lượng bạn bằng k thì ta lấy một người bất kỳ. Giả sử đó là nhà khoa học A . Gọi các bạn của nhà khoa học A là $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Tất cả các nhà khoa học $A_1, A_2, \dots, A_k$ không ai nhiều hơn k người bạn vì ta giả thiết k lớn nhất và ai cũng có ít nhất một bạn là A , cũng không có người nào trong số $A_1, A_2, \dots, A_k$ có số bạn bằng nhau vì theo giả thiết có bạn chung A thì không có số bạn bằng nhau.

Suy ra $A_1, A_2, \dots, A_k$ có số bạn là $1, 2, 3, \dots, k$. Tức là một người trong số $A_1, A_2, \dots, A_k$ có đúng 1 người bạn (đó chính là A).

□

———— HẾT ————

8 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẾN TRE

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Cho $a = \sqrt{1 - 2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}$

Chứng minh a là một nghiệm của phương trình $x = x^3 + 2x^2$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $A = n^2 + n + 2$ là một số chính phương.

Lời giải.

a) Ta có: $a = \sqrt{1 - 2\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}} = \sqrt{1 - 2(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1 \neq 0$

$$a = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow a + 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow (a + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 + 2a = 1 \Leftrightarrow a^3 + 2a^2 = a$$

Do đó a là một nghiệm của phương trình $x = x^3 + 2x^2$

b) $A = n^2 + n + 2$ là một số chính phương

$$\Leftrightarrow n^2 + n + 2 = k^2 (k \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 8 = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow (2n + 1)^2 - 4k^2 = -7$$

$$\Leftrightarrow (2n + 1 + 2k)(2n + 1 - 2k) = -7$$

Vì $k, n \in \mathbb{N}$ và $2n + 1 + 2k > 2n + 1 - 2k$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} 2n + 1 + 2k = 1 \\ 2n + 1 - 2k = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ k = 2 \end{cases} \text{ (không thỏa điều kiện)} \\ & \bullet \begin{cases} 2n + 1 + 2k = 7 \\ 2n + 1 - 2k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $n = 1 \Rightarrow A = 4$ là số chính phương

□

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2x - \frac{2}{3}$.

Gọi A, B là giao điểm của (P) và (d) . Tìm trên trục Oy điểm C sao cho tổng khoảng cách $(BC + CA)$ nhỏ nhất.

b) Cho hai phương trình $x^2 - mx + 2 = 0$ và $x^2 - 4x + m = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm chung.

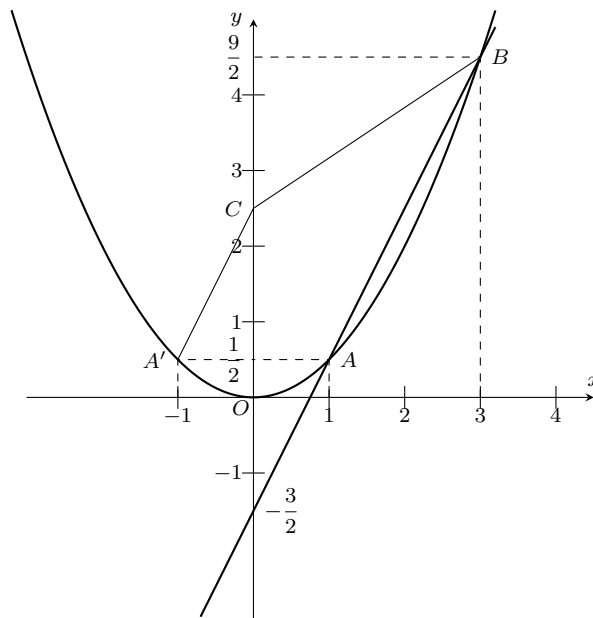
Lời giải.

a) Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 2x - \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Giao điểm của (P) và (d) là $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ và $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$



Lấy A' đối xứng với A qua $Oy \Rightarrow A'\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Theo tính chất đối xứng, ta có: $CA' = CA$

Suy ra: $CA + CB = CA' + CB \geq A'B$ (không đổi)

$$CA + CB \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow CA' + CB = A'B$$

$$\Leftrightarrow A', C, B \text{ thẳng hàng và } C \in Oy$$

$$\Leftrightarrow C \text{ là giao điểm của đường thẳng } A'B \text{ và trục } Oy$$

Phương trình đường thẳng $A'B$ có dạng $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} -a + b = \frac{1}{2} \\ 3a + b = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$

Suy ra $A'B : y = x + \frac{3}{2}$

Tọa độ giao điểm C của hai đường thẳng $A'B$ và Oy là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy khi $C\left(0; \frac{3}{2}\right)$ thì tổng khoảng cách $(BC + CA)$ nhỏ nhất

b) Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình $x^2 - mx + 2 = 0$ và $x^2 - 4x + m = 0$.

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} x_0^2 - mx_0 + 2 = 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow (m - 4)x_0 + m - 2 = 0 (*)$$

+ Nếu $m = 4$: $(*) \Rightarrow 2 = 0$: vô nghiệm

+ Nếu $m \neq 4$: $(*) \Rightarrow x_0 = \frac{2 - m}{m - 4}$, thay vào phương trình $x_0^2 - mx_0 + 2 = 0$, ta được:

$$m^3 - 3m^2 - 12m + 36 = 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

- Với $m = 3$ ta có hai phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ và $x^2 - 4x + 3 = 0$ có nghiệm chung là $x = 1$
- Với $m = 2\sqrt{3}$ ta có hai phương trình $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ và $x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$ không có nghiệm chung
- Với $m = -2\sqrt{3}$ ta có hai phương trình $x^2 + 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ và $x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$ có một nghiệm chung là $x = 1 - \sqrt{3}$

Vậy có hai giá trị cần tìm là $m = 3$ và $m = -2\sqrt{3}$

□

Câu 3.

a) Giải phương trình : $(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x^2+3x+2}) = 1$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3y^3 + 7y^3 = 8 \\ x^y + y^2 = 2x \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện của phương trình : $x \geq -1$

Đặt $a = \sqrt{x+2}, b = \sqrt{x+1}$ (điều kiện $a > b > 0$) $\Rightarrow a^2 = x+2, b^2 = x+1 \Rightarrow a^2 - b^2 = 1$

Từ $(*) \Rightarrow (a-b)(1+ab) = 1$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ (a-b)(1+ab) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 - (a-b)(1+ab) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ (a-b)(a-1)(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ \begin{cases} a = b(\text{loại}) \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+2} = \sqrt{2} \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (thỏa}$$

điều kiện)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = 0$

b) Dễ thấy $(x, y) = (0, 0)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình, nên xét trường hợp $x \neq 0, y \neq 0$, ta có:

$$\begin{cases} x^3y^3 + 7y^3 = 8 \\ x^2y + y^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3(x^3 + 7) = 8 \\ xy\left(x + \frac{y}{x}\right) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 7 = \frac{8}{y^3} \\ x + \frac{y}{x} = \frac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - \frac{8}{y^3} = -7 \\ x - \frac{2}{y} + \frac{y}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{2}{y}\right)^3 + 6\frac{x}{y}\left(x - \frac{2}{y}\right) = -7 \\ \left(x - \frac{2}{y}\right) + \frac{y}{x} = 0 \end{cases}$$

Đặt $a = x - \frac{2}{y}, b = \frac{x}{y}$ (điều kiện $b \neq 0$), ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^3 + 6ab = -7 \\ a + \frac{1}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 6ab = -7 \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = -1 \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{y} = -1 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{y} = -1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{x} = -1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1, 1)$ và $(-2; -2)$

□

Câu 4.

- a) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \leq 2$
 b) Cho số thực x thỏa : $0 < x < 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2+x}{x} + \frac{4-x}{2-x}$

Lời giải.

- a) Đặt $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y} \Rightarrow a^3 = x, b^3 = y$

Khi đó $a^3 + b^3 = 2$, ta cần phải chứng minh : $a + b \leq 2$

Đặt $a = 1 + t \Rightarrow b^3 = 2 - a^3 = 2 - (1 + t)^3 = 1 - 3t - 3t^2 - t^3 \leq 1 - 3t + 3t^2 - t^3 = (1 - t)^3$

Suy ra $b \leq 1 - t$, ta lại có $a = 1 + t$, nên $a + b \leq 1 - t + 1 + t = 2$ (điều phải chứng minh)

- b) Ta có $P = \frac{2+x}{x} + \frac{4-x}{2-x} = \left(\frac{2+x}{x} - 2\right) + \left(\frac{4-x}{2-x} - 2\right) + 4 = \frac{2-x}{x} + \frac{x}{2-x} + 4$

Vì $0 < x < 2 \Rightarrow 2 - x > 0$, nên áp dụng bất đẳng thức Cô - si, ta có:

$$\frac{2-x}{x} + \frac{x}{2-x} \geq 2\sqrt{\frac{2-x}{x} \cdot \frac{x}{2-x}} = 2 \Rightarrow P \geq 2 + 4 = 6$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{2-x}{x} = \frac{x}{2-x} \Leftrightarrow (2-x)^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa điều kiện)

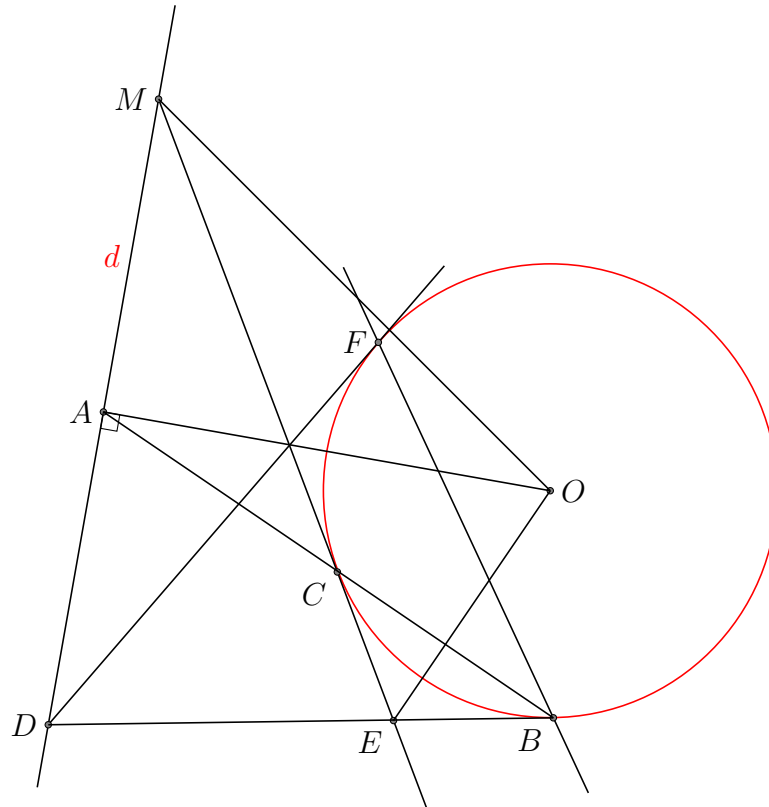
Vậy min $P = 6$ khi $x = 1$

□

Câu 5. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và điểm A nằm ngoài đường tròn. Gọi d là đường thẳng vuông góc với OA tại A và M là điểm di động trên d (M khác A). Vẽ tiếp tuyến MC với đường tròn (C là tiếp điểm, C khác phía với M đối với đường thẳng OA). Đường thẳng AC cắt đường tròn tại B (B khác C). tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng MC tại E và cắt d tại D .

- a) Chứng minh tứ giác $OMDE$ nội tiếp
 b) Chứng minh tam giác DOM cân
 c) Chứng minh $OA \cdot ME = OM \cdot AB$

- Lời giải.**



- a) Tứ giác $OMAC$ nội tiếp ($\widehat{OAM} = \widehat{OCM} = 90^\circ$) $\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OCB}$ (cung bù với góc $\widehat{OCA}$)
 Tứ giác $OBEC$ nội tiếp ($\widehat{OBE} + \widehat{OCE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$)
 $\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OCB}$ (cùng chắn cung OB) $\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OMA}$
 Do đó tứ giác $OMDE$ nội tiếp
- b) Tứ giác $OMDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OEB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{OEM} = \widehat{OMA}$ (chứng minh trên)
 $\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OAM}$. Suy ra $\triangle DOM$ cân tại O
- c) Tứ giác $OMAC$ nội tiếp ($\widehat{OAM} = \widehat{OCM} = 90^\circ$) $\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OCB}$ (cung bù với góc $\widehat{OCA}$)
 Tứ giác $OBEC$ nội tiếp ($\widehat{OBE} + \widehat{OCE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$)
 $\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OCB}$ (cùng chắn cung OB) $\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OMA}$
 Do đó tứ giác $OMDE$ nội tiếp
- d) Tứ giác $OMDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OEB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{OEM} = \widehat{OMA}$ (chứng minh trên)
 $\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OAM}$. Suy ra $\triangle DOM$ cân tại O
- e) $\triangle OBA$ và $\triangle OEM$ có:
 $\widehat{OBC} = \widehat{OEC}$ (tứ giác $OBEC$ nội tiếp)
 $\widehat{OAC} = \widehat{OMC}$ (tứ giác $OMAC$ nội tiếp)
 $\Rightarrow \triangle OBA \sim \triangle OEM \Rightarrow \frac{OA}{OM} = \frac{AB}{ME} \Rightarrow OA \cdot ME = OM \cdot AE$

- f) Gọi giao điểm của BF với OD, OA lần lượt là H, I . Ta có $DB = DF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$OB = OF \text{ (bán kính)}$$

$\Rightarrow OD$ là đường trung trực của đoạn thẳng BF

$$OD \perp BF \text{ tại } H \Rightarrow \triangle OHI \sim \triangle OAD \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{OI}{OD} \Rightarrow OI.OA = OH.OD$$

$$\triangle OBD \text{ vuông tại } B \text{ có đường cao } BH \Rightarrow OH.OD = OB^2 = R^2$$

$$\Rightarrow OI.OA = R^2 \Rightarrow OI = \frac{R^2}{OA} \quad (1)$$

Ta có đường tròn (O, R) và đường thẳng d cố định nên đoạn thẳng OA cố định và có độ dài không đổi (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ khoảng cách OI không đổi và I thuộc OA cố định.

Suy ra I cố định

Do đó đường thẳng BF luôn đi qua một điểm I cố định khi M di động trên d

- g) $\triangle DOM$ cân tại O có OA là đường cao $\Rightarrow OA$ cũng là trung tuyến $\Rightarrow AD = AM = R\sqrt{2}$
 $\triangle OAD$ vuông tại A có $OA = R\sqrt{3}, AD = R\sqrt{2}, OD = \sqrt{OA^2 + AD^2} = R\sqrt{5} \Rightarrow OM = OD = R\sqrt{5}$

$$\triangle OBD \text{ vuông tại } B \Rightarrow BD = \sqrt{OD^2 - OB^2} = 2R$$

$$\triangle OBA \sim \triangle OEM \Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{OA}{OM} = \frac{R\sqrt{3}}{R\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow OE = OB \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = R \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\triangle OBE \text{ vuông tại } B \Rightarrow BE = \sqrt{OE^2 - OB^2} = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } DE = BD - BE = R \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

□

———— HẾT ————

9 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BIÊN HÒA HÀ NAM VÒNG 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 2\sqrt{12} + 3\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} - 1.$

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}.$

Lời giải.

a) $A = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) - 1 = 4\sqrt{3}.$

b) $B = \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}.$

□

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$. Xác định a, b để (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

b) Giải phương trình $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Lời giải.

a) Gọi $A = d \cap Oy \Rightarrow A(0; 2) \in d \Rightarrow 2 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 2.$

$$\text{Gọi } B = d \cap (P) = B(-2; y_B) \Rightarrow y_B = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 = 1.$$

$$\Rightarrow B(-2; 1) \in d \Rightarrow 1 = a \cdot (-2) + 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } (a, b) = \left(\frac{1}{2}; 2 \right).$$

b) Ta có phương trình tương đương

$$4x^4 - 4x^2 - (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(4x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2} \right\}.$$

□

Câu 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$ (m là tham số $m \neq 0$).

a) Giải hệ phương trình với $m = -2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x + y = -1$.

Lời giải.

a) Với $m = -2$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} -2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 1 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 5 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy nghiệm hệ phương trình là } (x; y) = (0; -1).$$

b) Ta có $x + y = -1 \Leftrightarrow y = -1 - x$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} mx - (-1 - x) = 1 \\ x + m(-1 - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + x = 0 \\ (1 - m)x = m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m = -1 \\ (1 - m)x = m + 2. \end{cases}$$

- Với $x = 0 \Rightarrow m = -2$, hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; -1)$ (thỏa mãn).
- Với $m = -1$, hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-2; -1\}$.

□

Câu 4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{27a^2}{2} + 4b^2 + c^2 = 1 - 2bc$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3a + 2b + c$.

Lời giải.

Đặt $3a = x$, $2b = y$ và $c = z$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{27a^2}{2} + 4b^2 + c^2 = 1 - 2bc &\Leftrightarrow \frac{3(3a)^2}{2} + (2b + c)^2 = 1 + 2bc \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 2(y + z)^2 = 2 + 2yz \leq 2 + \frac{(y + z)^2}{2} \Rightarrow 6x^2 + 3(y + z)^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopsky lại có

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) [6x^2 + 3(y + z)^2] \geq (x + y + z)^2 = P^2 \Leftrightarrow |P| \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}.$$

Vậy $\min P = -\sqrt{2}$ khi $x = y = z = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ hay $(a; b; c) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{9}; -\frac{\sqrt{2}}{6}; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

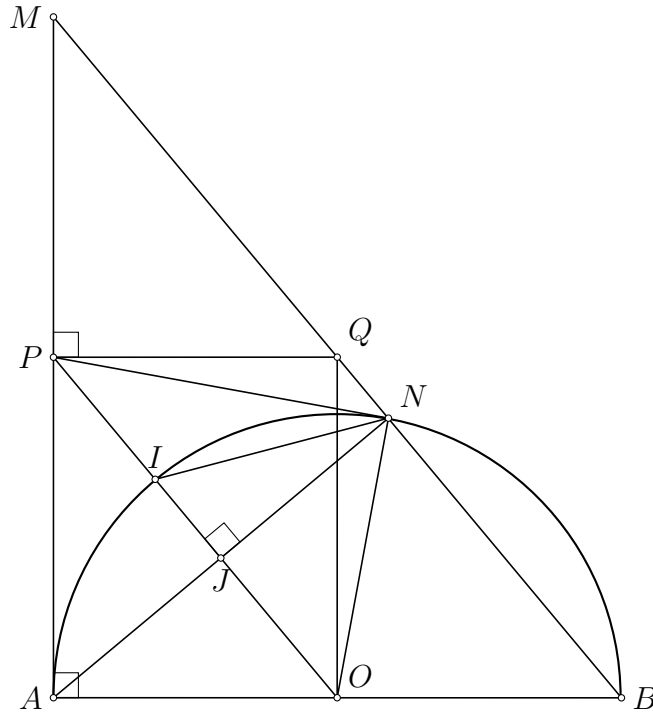
$\max P = \sqrt{2}$ khi $x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{3}$ hay $(a; b; c) = \left(\frac{\sqrt{2}}{9}; \frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

□

Câu 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn (O) . Trên Ax lấy điểm M sao cho $AM > AB$. Gọi N là giao điểm của đoạn thẳng AB và nửa đường tròn (O) . Qua trung điểm P của đoạn thẳng AM dựng đường thẳng vuông góc với AM cắt đoạn thẳng BM tại Q .

- Chứng minh tứ giác $APQN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $\widehat{BAN} = \widehat{OQB}$.
- Chứng minh PN là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .
- Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác ANP có độ dài đường kính bằng R . Tính diện tích $\triangle ABM$ theo R .

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{APQ} = \widehat{ANQ} = 90^\circ$ nên $APQN$ nội tiếp đường tròn đường kính AQ .
 b) Ta có $PQ \parallel AB$ (cùng vuông góc với AM) và P là trung điểm AM nên Q là trung điểm BM . Do đó $OQ \parallel AM$ và $OQ \perp AB$, suy ra $\widehat{BAN} = \widehat{OQN}$ (cùng phụ với $\widehat{ABM}$).
 c) Ta có $\triangle OAP = \triangle ONP$ (c.c.c) nên $\widehat{ONP} = \widehat{OAP} = 90^\circ$. Do đó PN là tiếp tuyến của (O) .
 d) Gọi $I = PO \cap \widehat{AN}$, $J = PO \cap AN$.

Ta có PO là phân giác $\widehat{AON}$ nên $\widehat{AI} = \widehat{IN}$. Suy ra IN là phân giác $\widehat{PNA}$.

Mà PI là phân giác $\widehat{APN}$. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ANP$.

Lại có $\triangle ANP$ cân tại P nên AJ là phân giác đồng thời là đường cao.

$\Rightarrow IJ$ là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ANP$. Suy ra $IJ = \frac{R}{2} \Rightarrow JO = \frac{R}{2}$.

$\Rightarrow \sin \widehat{JAO} = \frac{JO}{AO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{JAO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABM} = 60^\circ \Rightarrow AM = AB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}R$.

$\Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot AM = 2\sqrt{3}R^2$.

□

———— HẾT ————

10 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BIÊN HÒA HÀ NAM

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{10x+4}{5\sqrt{5x^3}-8} - \frac{\sqrt{5x}}{5x+2\sqrt{5x}+4} \right) \cdot \left(\frac{1+5\sqrt{5x^3}}{1+\sqrt{5x}} - \sqrt{5x} \right) \cdot \left(\frac{6\sqrt{5x}-3}{\sqrt{5x}-1} - 6 \right)$$

(với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{5}, x \neq \frac{4}{5}$).

- a) Rút gọn P .
b) Tìm các số tự nhiên x lớn hơn 10 để $P > \frac{7}{2}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{10x+4-5x+2\sqrt{5x}}{(5x+2\sqrt{5x}+4)(\sqrt{5x}-2)} (5x-\sqrt{5x}+1-\sqrt{5x}) \cdot \frac{6\sqrt{5x}-3-6\sqrt{5x}+6}{\sqrt{5x}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5x}-2} \cdot (\sqrt{5x}-1)^2 \frac{3}{\sqrt{5x}-1} \\ &= \frac{3(\sqrt{5x}-1)}{\sqrt{5x}-2}. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$P > 7 \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{5x}-1)}{\sqrt{5x}-2} > \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{8-\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}-2} > 0 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{5x} < 8 \Leftrightarrow \frac{4}{5} < x < \frac{64}{5}.$$

Do $x \in \mathbb{N}$ và $x > 10$ nên $x \in \{11; 12\}$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $\sqrt{2x^2-4x-2} + (x-1)^2\sqrt{12-4x} = (8-x)\sqrt{3-x}$.
b) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 6 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn
- $$(x_1^2 + 2x_1 + 2m - 5)(x_2^2 + 2x_2 + 2m - 5) = -15.$$

Lời giải.

- a) Điều kiện của phương trình $x \leq 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \leq x \leq 3$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} &\sqrt{2x^2-4x-2} - \sqrt{3-x} + (2x^2-3x-5)\sqrt{3-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-5}{\sqrt{2x^2-4x-2} + \sqrt{3-x}} + (2x^2-3x-5)\sqrt{3-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2-3x-5) \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-4x-2} + \sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{2x^2-4x-2} + \sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x} > 0$ nên phương trình tương đương $2x^2 - 3x - 5 = 0$
hay $x = -1$ hoặc $x = \frac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -1; \frac{5}{2} \right\}$.

- b) Phương trình đã cho có $\Delta' = m^2 - 4m + 7 = (m-2)^2 + 3 > 0$ với mọi m nên phương trình

luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = 2m-6 \end{cases}$.

Lại có $x^2 - 2(m-1)x + 2m-6 = x^2 - 2x + 2m-5 = 2mx + 1$ mà x_1, x_2 là nghiệm của phương trình nên

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + 2x_1 + 2m-5)(x_2^2 + 2x_2 + 2m-5) = -15 \\ & \Leftrightarrow (2mx_1 + 1)(2mx_2 + 1) = -15 \\ & \Leftrightarrow 4m^2 x_1 x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 1 = -15 \\ & \Leftrightarrow 2m^3 - 5m^2 - m + 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m^2 - 3m - 4) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \\ m = \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $1, \frac{3 - \sqrt{41}}{4}, \frac{3 + \sqrt{41}}{4}$. □

Câu 3. Cho các số nguyên dương a và b thỏa mãn $\frac{a+2}{b} + \frac{b+3}{a}$ là một số nguyên. Gọi d là ước chung lớn nhất của a và b . Chứng minh rằng $d^2 \leq 2a + 3b$.

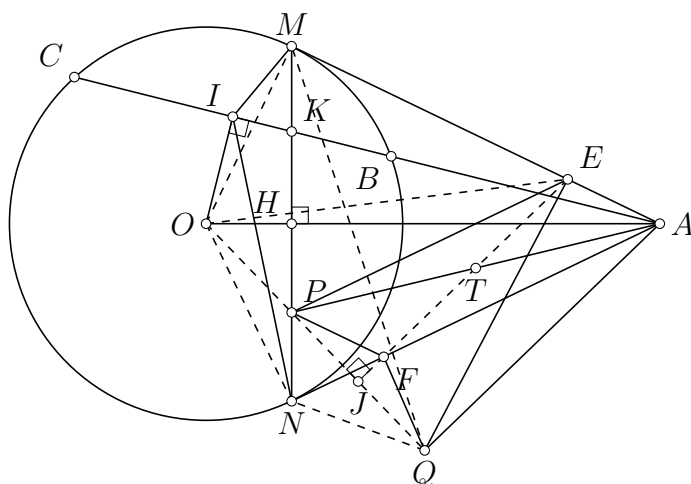
Lời giải.

Do $\frac{a+2}{b} + \frac{b+3}{a}$ là số nguyên nên $ab \mid a^2 + b^2 + 2a + 3b$. Mà $d^2 \mid ab$ và $d^2 \mid a^2 + b^2$ nên suy ra $d^2 \mid 2a + 3b$. Vậy $d^2 \leq 2a + 3b$. □

Câu 4. Cho đường tròn (O, R) và dây BC không đi qua O . Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC .

- Chứng minh rằng IA là tia phân giác của $\widehat{MIN}$.
- Chứng minh rằng $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.
- Lấy các điểm E, P, F lần lượt trên các đoạn AM, AN, NA sao cho tứ giác $AEPF$ là hình bình hành. Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường thẳng FE . Chứng minh rằng O, P, Q thẳng hàng.

Lời giải.



- a) Dễ thấy năm điểm O, A, M, N, I nằm trên đường tròn đường kính OA . Do đó $\widehat{MIA} = \widehat{ANM} = \widehat{AMN} = \widehat{NIA}$.

Vậy IA là tia phân giác góc $\widehat{MIN}$.

- b) Ta có tứ giác $OIKH$ nội tiếp đường tròn đường kính OK . Suy ra $AK \cdot AI = AH \cdot AO$.

Trong tam giác vuông AMO ta có $AM^2 = AH \cdot AO$.

Do AM là tiếp tuyến ta có $AM^2 = AB \cdot AC$.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} AK \cdot AI &= AB \cdot AC \\ \Rightarrow AK \cdot \frac{AB + AC}{2} &= AB \cdot AC \\ \Rightarrow \frac{2}{AK} &= \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}. \end{aligned}$$

- c) Gọi J là giao điểm của EF và PQ , T là trung điểm AP . Khi đó TJ là đường trung bình của tam giác APQ , suy ra $AQ \parallel EF$.

Do tính chất của phép đối xứng nên $\widehat{EQF} = \widehat{EPF} = \widehat{EAF}$, suy ra tứ giác $AEFQ$ nội tiếp, mà $AQ \parallel EF$ nên $AEFQ$ là hình thang cân. Suy ra $\widehat{QFA} = \widehat{QEA} \Rightarrow \widehat{QFN} = \widehat{QEM}$.

Dễ thấy $EM = EP = AF = QE$ và $FN = FP = FQ$, kết hợp với chứng minh trên ta có $\triangle FAQ \sim \triangle EMQ$ (c.g.c), suy ra $\widehat{FNQ} = \widehat{EMQ}$, do đó tứ giác $AMNQ$ nội tiếp. Suy ra $OQ \parallel AQ$, do đó $OQ \parallel EF$.

Vậy O, P, Q thẳng hàng.

□

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+3y+3z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{3x+3y+2z} \leq 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{y+z} &\geq \frac{16}{2x+3y+3z} \\ \frac{1}{y+z} + \frac{1}{y+x} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{z+x} &\geq \frac{16}{3x+2y+3z} \\ \frac{1}{z+x} + \frac{1}{z+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y} &\geq \frac{16}{3x+3y+2z}.\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{16}{2x+3y+3z} + \frac{16}{3x+2y+3z} + \frac{16}{3x+3y+2z} \leq 4 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right)$$

Suy ra

$$\frac{1}{2x+3y+3z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{3x+3y+2z} \leq \frac{4 \cdot 12}{16} = 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{8}$.

□

———— HẾT ————

11 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BÌNH PHƯỚC

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} + \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của biểu thức P tại $x = \sqrt{46 - 6\sqrt{5}} - 3(\sqrt{5} - 1)$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2} + \frac{2 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 2 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 2 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{2}{x - 1} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{46 - 6\sqrt{5}} - 3(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{45 - 2.3\sqrt{5} + 1} - 3\sqrt{5} + 3 \\ &= \sqrt{(3\sqrt{5} - 1)^2} - 3\sqrt{5} + 3 = |3\sqrt{5} - 1| - 3\sqrt{5} + 3 = 3\sqrt{5} - 1 - 3\sqrt{5} + 3 = 2. \\ \text{Suy ra } P &= \frac{2}{2 - 1} = 2. \end{aligned}$$

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4m - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm khi $\Delta \geq 0$.

$$\text{Do đó } (-m)^2 - (m^2 - 4m - 3) = 4m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 4m + 3 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } T = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 4m^2 - 3(m^2 - 4m + 3) = m^2 + 12m + 9.$$

Xét hàm số $y = m^2 + 12m + 9$ ta có $a = 1, b = 12, c = 9$.

Vì $a = 1 > 0$ và $-\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2.1} = -6$ nên hàm số đồng biến khi $m > -6$ và hàm số nghịch biến khi $m < -6$.

Suy ra $m \geq -\frac{3}{4}$ thì $m^2 + 12m + 9$ luôn đồng biến. Do đó $m^2 + 12m + 9 \geq \frac{9}{16}$.

Hay giá trị nhỏ nhất của T là $T = \frac{9}{16}$ đạt được khi $m = -\frac{3}{4}$.

□

Câu 3. Giải phương trình: $4(x^2 + 1) = 3\sqrt{2x^2 - 7x + 3} + 14x$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x^2 - 7x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 3$.

$$\text{Ta có } 4(x^2 + 1) = 3\sqrt{2x^2 - 7x + 3} + 14x$$

$$\Leftrightarrow 2(2x^2 - 7x + 3) - 3\sqrt{2x^2 - 7x + 3} - 2 = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 7x + 3} \geq 0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $t = -\frac{1}{2} < 0$ không thỏa mãn.

Với $t = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 7x + 3} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Đối chiếu với điều kiện ban đầu ta suy ra $x = \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$ thỏa mãn. □

Câu 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy - y^2 = \sqrt{3y - 1} - \sqrt{x + 2y - 1} & (1) \\ x^3y - 4xy^2 + 7xy - 5x - y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 3y - 1 \geq 0 \\ x + 2y - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{3} \\ x + 2y \geq 1 \end{cases}$.

Ta có: $xy - y^2 = \sqrt{3y - 1} - \sqrt{x + 2y - 1}$

$\Leftrightarrow y(x - y) + \sqrt{x + 2y - 1} - \sqrt{3y - 1} = 0$

$\Leftrightarrow y(x - y) + \frac{x - y}{\sqrt{x + 2y - 1} + \sqrt{3y - 1}} = 0$

$\Leftrightarrow (x - y) \left(y + \frac{1}{\sqrt{x + 2y - 1} + \sqrt{3y - 1}} \right) \quad (*)$

Trường hợp 1: Với $y = \frac{1}{3}$ và $x + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ta thấy không thỏa mãn (2).

Trường hợp 2: $y > \frac{1}{3}$ và $x \neq \frac{1}{3} \Rightarrow y + \frac{1}{\sqrt{x + 2y - 1} + \sqrt{3y - 1}} > 0$ do đó (*) có nghiệm khi $x = y$ thế vào (2) ta được:

$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 (x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \end{cases}$.

Với $x^2 - 2x + 2 = 0$ ta có: $\Delta' = (-1)^2 - 2.1 = -1 < 0$ (vô nghiệm).

Với $x = 1$ thì $y = 1$ thỏa mãn.

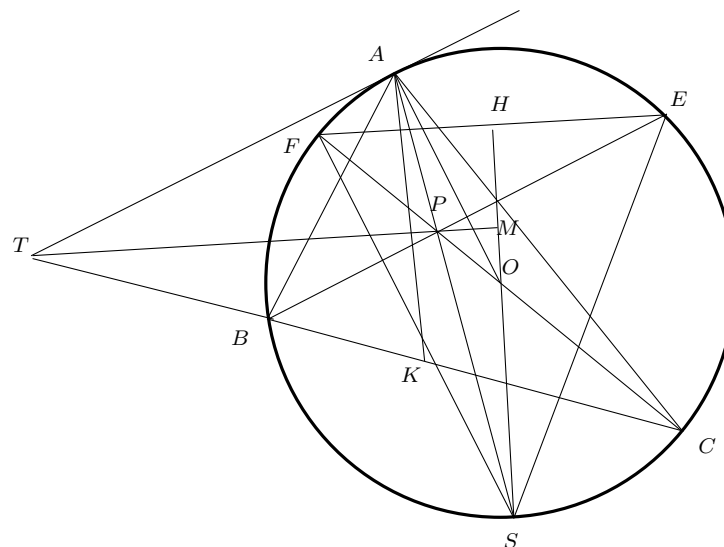
Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (1; 1)$. □

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại T . Gọi (T) là đường tròn tâm T bán kính TA . Đường tròn (T) cắt đoạn thẳng BC tại K .

a) Chứng minh rằng $TA^2 = TB \cdot TC$ và AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

b) Lấy điểm P trên cung nhỏ AK của đường tròn (T) . Chứng minh TP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC .

Lời giải.



- a) Chứng minh: $TA^2 = TB \cdot TC$ và AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
 - Xét hai tam giác $\triangle TAB$ và $\triangle TAC$ có: $\widehat{ATB} = \widehat{ATC}$ (góc chung). $\widehat{TAB} = \widehat{TCA}$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$).
 Suy ra hai tam giác $\triangle TAB$ và $\triangle TAC$ đồng dạng. Do đó ta có $\frac{TA}{TB} = \frac{TC}{TA} \Rightarrow TA^2 = TB \cdot TC$.
 - Vì AK là bán kính của đường tròn (T) nên $\triangle ATK$ cân tại T nên $\widehat{TAK} = \widehat{TKA}$ (1)
 Ta có: $\widehat{TAK} = \widehat{TAB} + \widehat{BAK}$, $\widehat{TKA} = \widehat{KAC} + \widehat{KCA}$ (góc ngoài) mà $\widehat{TAB} = \widehat{KCA} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{KAC}$ hay AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
- b) Ta chứng minh $\widehat{TPB} = \widehat{PCB}$ theo quan hệ góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung với cung bị chắn của một đường tròn).
 Ta có P thuộc đường tròn (T) nên $TA = TP \Rightarrow \frac{TA}{TB} = \frac{TC}{TA} \Rightarrow \frac{TP}{TB} = \frac{TC}{TP}$.
 Xét hai tam giác $\triangle TPB$ và $\triangle TPC$ có $\widehat{PTB} = \widehat{PTC}$ (góc chung) và $\frac{TP}{TB} = \frac{TC}{TP}$
 $\Rightarrow \triangle TPB$ và $\triangle TPC$ đồng dạng $\Rightarrow \widehat{TPB} = \widehat{PCB} \Rightarrow TP$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC .
- c) Gọi M là giao điểm của SO và TP . Ta chứng minh $SP \perp TP$ và $TP \parallel EF$.
 Ta có $\widehat{TPB} = \widehat{PCB}$ và $\widehat{FEB} = \widehat{PCB}$ (cùng chắn cung $\widehat{BF}$) $\Rightarrow \widehat{TPB} = \widehat{FEB}$ (so le)
 $\Rightarrow TP \parallel EF$ (3)
 Vì $\triangle SOA$ cân tại O , $\triangle PTA$ cân tại T nên $\widehat{TPA} = \widehat{TAP} = \widehat{MPS}$ và $\widehat{OAS} = \widehat{OSA} = \widehat{MSP}$
 $\Rightarrow \widehat{MPS} + \widehat{MSP} = \widehat{TPA} + \widehat{PAO} = \widehat{TAP} + \widehat{PAO} = 90^\circ$ hay $SO \perp TP$ (4)
 Từ (3) và (4) ta suy ra $SO \perp EF$.

□

Câu 6. Cho biểu thức $Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để Q chia hết cho 16.

Lời giải.

$$Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15 = (a^4 + 2a^3 - 2a - 1) - 16(a^2 - 1) = (a - 1)(a + 1)^3 - 16(a^2 - 1).$$

Với a lẻ, $a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $(a - 1)(a + 1)^3 = 2k(2k + 2)^3 = 16k(k + 1) \cdot 16 \Rightarrow Q:16$

Với k chẵn, $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $(a - 1)(a + 1)^3 = (2k - 1)(2k + 1)^3$ là một số lẻ nên không chia hết cho 16. Do đó Q không chia hết cho 16.

Vậy khi a là một số lẻ thì Q chia hết cho 16. $\square$

Câu 7. Từ 2016 số: 1, 2, 3, ... 2016 ta lấy ra 1009 số bất kì. Chứng minh rằng trong các số lấy ra có ít nhất hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải.

Chia các số đã cho thành 1008 cặp sau: (1; 2), (3; 4), ..., (2015; 2016).

Chọn 1009 số trong 1008 cặp trên nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một cặp. Mà hai số thuộc cùng một cặp là hai số nguyên tố cùng nhau. $\square$

Câu 8. Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} \geq \frac{11}{2}$$

Lời giải.

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{b-1} \leq \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow a\sqrt{b-1} \leq \frac{ab}{2} \quad (22)$$

Tương tự:

$$\sqrt{a-1} \leq \frac{a-1+1}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2} \quad (23)$$

Từ (22) và (23) ta được:

$$\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} \leq \frac{6}{ab} + \sqrt{3ab+4} = \frac{18}{3ab} + \sqrt{3ab+4}$$

Đặt $t = \sqrt{3ab+4} \Rightarrow t^2 - 4 = 3ab \Leftrightarrow (t-2)(t+2) = 3ab$. Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{18}{(t-2)(t+2)} + t = \frac{18}{(t-2)(t+2)} + \frac{3}{4}(t-2) + \frac{1}{4}(t+2) + 1 \\ &\leq 3\sqrt[3]{\frac{18}{(t-2)(t+2)} \cdot (t-2) \cdot (t+2)} + 1 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $t = 4 \Rightarrow a = b = 2$.

Cách 2: Ta có:

$$a\sqrt{b-1} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{ab-a} \leq \frac{a+ab-a}{2} = \frac{ab}{2} \quad (24)$$

Tương tự:

$$b\sqrt{a-1} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{ab-b} \leq \frac{b+ab-b}{2} = \frac{ab}{2} \quad (25)$$

Từ (24) và (25) suy ra $\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} \geq \frac{6}{ab}$

Lại có: $\sqrt{3ab+4} = \frac{3ab+4}{\sqrt{3ab+4}} = \frac{4(3ab+4)}{4\sqrt{3ab+4}} \geq \frac{8(3ab+4)}{20+3ab}$.

Ta chứng minh $\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} - \frac{11}{2} \geq 0$

Thật vậy ta có: $\frac{6}{a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}} + \sqrt{3ab+4} - \frac{11}{2} \geq \frac{6}{ab} + \frac{8(3ab+4)}{20+3ab} - \frac{11}{2}$

$$\frac{6}{ab} + \frac{8(3ab+4)}{20+3ab} - \frac{11}{2} = \frac{12(20+3ab) + 8(3ab+4) - 11ab(20+3ab)}{2ab(20+3ab)} = \frac{15ab(ab-4)^2}{2ab(20+3ab)} \geq 0 \text{ luôn}$$

đúng với mọi $a, b > 1$. (đpcm) □

———— HẾT ————

12 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH VÒNG 2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \frac{2015}{2016}$$

Lời giải.

Với mọi số nguyên dương n ta có $1 + \frac{1}{k(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$. Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \text{ Từ đó ta có } \frac{n+1}{n+2} = \frac{2015}{2016} \Rightarrow n = 2014 \end{aligned}$$

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^4 - x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy + 3x + 4y = -2 \\ x^2 + 4x + 4y^2 + 12y = 4 \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $x \neq 0$, ta chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 , được

$$x^2 - x - 8 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

Đặt $t = x + \frac{2}{x}$, phương trình tương đương với $t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 4 \end{cases}$

Với $t = -3$ suy ra $x = -2$ và $x = -1$

Với $t = 4$ suy ra $x = 2 \pm \sqrt{2}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = -2$ và $x = -1$; $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

b) Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (x+2)(2y+3) = 4 \\ (x+2)^2 + (2y+3)^2 = 17 \end{cases}$

Đặt $u = x + 2$; $v = 2y + 3$, ta được $\begin{cases} uv = 4 \\ u^2 + v^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 4 \\ u + v = \pm 5 \end{cases}$

Với $uv = 4$ và $u + v = 5$, giải ra ta được $(x; y) = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(x; y) = (2; -1)$.

Với $uv = 4$ và $u + v = -5$, giải ra ta được $(x; y) = \left(-3; -\frac{7}{2}\right)$ hoặc $(x; y) = (-6; -2)$.

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là $(x; y) = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $(x; y) = (2; -1)$, $(x; y) = \left(-3; -\frac{7}{2}\right)$, $(x; y) = (-6; -2)$.

□

Câu 3.

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm $(a; b)$ thỏa mãn

$$(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4$$

- b) Cho tập hợp A gồm 678 số phân biệt thuộc tập hợp số $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$. Chứng minh rằng luôn chọn được hai số thuộc A có tổng chia hết cho 3.

Lời giải.

- a) Phương trình đã cho tương đương với $ab(a^2b^2 + 1) = ab(4a^2 + 6ab + 4b^2)$

Với $ab = 0$ ta được nghiệm $(0; m), (m; 0)$ trong đó m là số tự nhiên bất kì.

Với $ab > 0$ phương trình đã cho trở thành $a^2b^2 + 1 = 4a^2 + 6ab + 4b^2 \Leftrightarrow (ab + 1)^2 = 4(a + b)^2$
 $\Leftrightarrow ab + 1 = 2(a + b) \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 3$.

Từ đó giải ra ta được nghiệm $(3; 5)$ và $(5; 3)$.

Vậy các cặp số nguyên không âm cần tìm là $(0; m), (m; 0), (5; 3), (3; 5)$ trong đó m là số tự nhiên bất kì.

- b) Đặt $A_1 = \{1, 4, 7, \dots, 2014\}$, $A_2 = \{2, 5, 8, \dots, 2015\}$ và $A_3 = \{3, 6, 9, \dots, 2016\}$. Ba tập trên đôi một rời nhau, mỗi tập có 672 số, mỗi số của tập A chỉ thuộc 1 trong ba tập trên.

Xét 2 trường hợp sau cho các số thuộc A :

+) Có ít nhất hai số cùng thuộc A_3 . Khi đó lấy 2 số bất kì trong các số đó thì tổng của chúng chia hết cho 3.

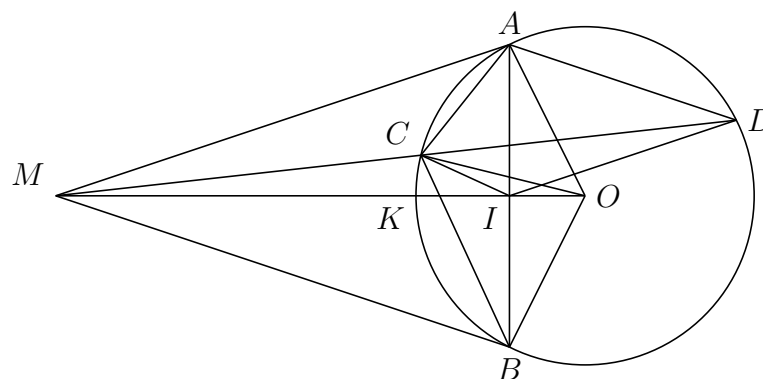
+) Không có 2 số cùng thuộc A_3 . Khi đó có ít nhất 677 số của A thuộc A_1 và A_2 , nhưng mỗi tập A_1 và A_2 có 672 số nên có ít nhất hai số thuộc hai tập khác nhau, chẳng hạn $a \in A_1, b \in A_2$. Rõ ràng $a + b$ chia hết cho 3.

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm O và điểm M ở ngoài đường tròn (O) . Từ M kẻ hai tiếp tuyến tới O có tiếp điểm là A, B . Đoạn thẳng MO cắt (O) và AB lần lượt tại K và I . Trên cung nhỏ AK lấy điểm $C (C \neq A, C \neq K)$, tia MC cắt (O) tại $D (D \neq C)$. Chứng minh rằng

- a) $MD \cdot MC = MI \cdot MO$.
 b) $\widehat{AIC} = \widehat{CBD}$.
 c) $\left(\frac{IB}{ID}\right)^2 = \frac{MC}{MD}$.

Lời giải.



a) Ta có $\triangle MAC \sim \triangle MDA$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC \cdot MD$$

Mặt khác, $\triangle AMO$ vuông tại A , có AI là đường cao nên $MA^2 = MI \cdot MO$

Do đó $MD \cdot MC = MI \cdot MO$.

b) Theo ý a) ta có $MD \cdot MC = MI \cdot MO$ nên $\triangle MCI \sim \triangle MOD$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{MIC} = \widehat{MDO}$ nên tứ giác $CIOD$ nội tiếp.

$$\text{Do đó } \widehat{MIC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{OID}$$

$$\text{Kết hợp với } AI \perp MO \text{ ta có } \widehat{AIC} = \widehat{AID} = \frac{1}{2}\widehat{CID} = \frac{1}{2}\widehat{COD} = \widehat{CBD}$$

c) Theo chứng minh trong ý b) ta có AI là phân giác góc $\widehat{CID}$, mà $AI \perp MI$ suy ra MI là phân giác ngoài góc $\widehat{CID}$, do đó

$$\frac{MC}{MD} = \frac{IC}{ID} \quad (1)$$

Vì $IA = IB$ nên

$$\left(\frac{IB}{ID}\right)^2 = \left(\frac{IA}{ID}\right)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh tương đương với $IA^2 = IC \cdot ID$ hay $IM \cdot IO = IC \cdot ID$ (3).

Vì tứ giác $CIOD$ nội tiếp nên $\widehat{MCI} = \widehat{IOD}$. Kết hợp với $\widehat{MIC} = \widehat{OID}$ ta có $\triangle MIC \sim \triangle DIO$ (g.g). Suy ra

$$\frac{MI}{DI} = \frac{IC}{IO} \Leftrightarrow IM \cdot IO = IC \cdot ID$$

. Vậy (3) được chứng minh. □

Câu 5. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $0 \leq x, y, z \leq 3; x + y + z = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.

Lời giải.

Giả sử $x \leq y \leq z$. Kết hợp với giả thiết suy ra $0 \leq x \leq 2 \leq z \leq 3$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= x^2 + (y + z)^2 + (x - 2)yz \\ &\geq x^2 + (y + z)^2 + (x - 2) \cdot \frac{(y + z)^2}{4} \\ &= x^2 + (6 - x)^2 + (x - 2) \cdot \frac{(6 - x)^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}x(x^2 - 6x + 12) + 18 \geq 18 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0, y = z = 3$

Mặt khác do $2 \leq z \leq 3$ nên ta có

$$\begin{aligned} P &= (x + y)^2 + z^2 + (z - 2)xy \\ &\leq (x + y)^2 + z^2 + (z - 2) \cdot \frac{(x + y)^2}{4} \\ &= z^2 + (6 - z)^2 + (z - 2) \cdot \frac{(6 - z)^2}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(z-3)(z^2-3z+3) + \frac{81}{4} \leq \frac{81}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{3}{2}, z = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của P tương ứng là 18 và $\frac{81}{4}$. □

———— HẾT ————

13 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC ĐÀK LẮK

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- Cho đa thức $P(x) = x^9 - 17x^8 + m$. Tìm m biết rằng $a = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - 2\sqrt{12}}}$ là một nghiệm của $P(x)$.
- Cho 2016 số dương $a_1, a_2, \dots, a_{2015}, a_{2016}$ thỏa mãn $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2016}}{a_1}$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2016}^2}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{2016})^2}$.

Lời giải.

- Ta có $a = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - 2\sqrt{12}}} = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2}} = \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 1$.
 Vì $a = 1$ là một nghiệm của $P(x)$, nên ta có: $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^9 - 17 \cdot 1^8 + m = 0 \Leftrightarrow m = 16$.
- Ta có $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2016}}{a_1} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{2016}}{a_1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}} = 1$
 $\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{2016} = k > 0$.
 Do đó $A = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2016}^2}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{2016})^2} = \frac{2016k^2}{(2016k)^2} = \frac{1}{2016}$.

□

Câu 2.

- Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} + x^2 - 5x + 5 = 0$.
- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x+y) = 3xy \\ 6(y+z) = 5yz \\ 3(x+z) = 4xz \end{cases}$$
- Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq y \geq z$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + 3y$.

Lời giải.

- Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ -x^2 + 5x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ -x^2 + 5x - 5 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

 $\sqrt{2x-3} + x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = -x^2 + 5x - 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = x^4 + 25x^2 + 25 - 10x^3 + 10x^2 - 50x$
 $\Leftrightarrow x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 52x + 28 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x^2 - 6x + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 - \sqrt{2} \\ x = 3 + \sqrt{2} \end{cases}$

Nhận thấy chỉ có $x = 2$ và $x = 3 - \sqrt{2}$ thỏa mãn (*).

- Rõ ràng $x = 0, y = 0, z = 0$ là một nghiệm của hệ.

Với $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, ta có

$$\begin{cases} 2(x+y) = 3xy \\ 6(y+z) = 5yz \\ 3(x+z) = 4xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{11}{3} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(0; 0; 0)$ và $(1; 2; 3)$.

$$3) \text{ Vì } x \geq y \geq z > 0 \Rightarrow (x - z)(y - z) \geq 0 \Rightarrow xy + z^2 \geq xz + yz \Rightarrow \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \geq \frac{x}{y} + 1 \text{ (do } yz > 0).$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{x}{y} + 3y + 1 = \frac{x + 2y}{y} + 3y - 1 \geq 2\sqrt{3(x + 2y)} - 1 \geq 2\sqrt{3(x + y + z)} - 1 = 2\sqrt{3^2} - 1 = 5.$$

$$\text{Vậy } \min P = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq y \geq z > 0 \\ x + y + 3 = 3 \\ (x - z)(y - z) = 0 \\ \frac{x + 2y}{y} = 3y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

□

Câu 3.

- 1) Tìm cặp số nguyên tố (m, n) sao cho: $m^2 - 2n^2 - 1 = 0$.
- 2) Cho hai số tự nhiên a, b sao cho $a^2 + b^2 + ab$ chia hết cho 10. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + ab$ chia hết cho 100.

Lời giải.

- 1) Ta có $m^2 - 2n^2 - 1 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m + 1) = 2n^2:2 \Rightarrow m$ lẻ, suy ra $(m - 1)(m + 1):4 \Rightarrow 2n^2:4 \Rightarrow n:2 \Rightarrow n = 2$. Do n là số nguyên tố.

Khi đó $m^2 = 2 \cdot 2^2 + 1 \Rightarrow m = 3$. Vậy cặp số nguyên tố cần tìm là $(m, n) = (3, 2)$.

- 2) Ta có $a^2 + b^2 + ab:10 \Rightarrow (a - b)(a^2 + b^2 + ab) = (a - b)^3:10 \Rightarrow a^3 \equiv b^3(mod 10)$
suy ra $a \equiv b(mod 10) \Rightarrow ab \equiv a^2(mod 10), a^2 \equiv b^2(mod 10) \Rightarrow a^2 + b^2 + ab \equiv 3a^2(mod 10)$
 $\Rightarrow 3a^2 \equiv 0(mod 10) \Rightarrow a^2:10$ (vì $(3; 10) = 1$), suy ra $a:10$.

Suy ra $a^2:100 \Rightarrow a^2 + b^2 + ab \equiv 3a^2(mod 100)$.

Vậy $a^2 + b^2 + ab$ chia hết cho 100.

□

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$, biết $AD = \frac{2}{3}AB$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại I . Lấy điểm P thuộc cạnh AB , điểm Q thuộc cạnh CD sao cho PQ vuông góc với AM . Đường phân giác của góc $\widehat{MAD}$ cắt CD tại H . Chứng minh rằng:

$$a) PQ = \frac{2}{3}BM + DH.$$

$$b) \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{2}{9AI^2}.$$

Lời giải.

a) Chứng minh $PQ = \frac{2}{3}BM + DH$

Kẻ $HK \parallel PQ, (K \in AB), PK \parallel HQ, (AB \parallel CD)$

$\Rightarrow PQ = HK$.

Lại có $HK \parallel PQ, PQ \perp AI$ (giả thiết)

Suy ra $HK \perp AI$ (tại E, E là giao điểm của HK và AI)

$\triangle ADH = \triangle AEH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

suy ra $AD = AE, DH = EH$

Lại có $\triangle AEK \sim \triangle ABM$ (g-g).

Suy ra $\frac{EK}{BM} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AB}$, mà $AD = \frac{2}{3}AB$,

suy ra $EK = \frac{2}{3}BM$.

Do đó $PQ = HK = EK + EH = \frac{2}{3}BM + DH$.

b) Chứng minh $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{4}{9AI^2}$.

Kẻ $AF \perp AM$ (F thuộc đường thẳng BC).

Xét $\triangle ABF$ và $\triangle ADI$, ta có: $\widehat{ABF} = \widehat{ADI} = 90^\circ$,

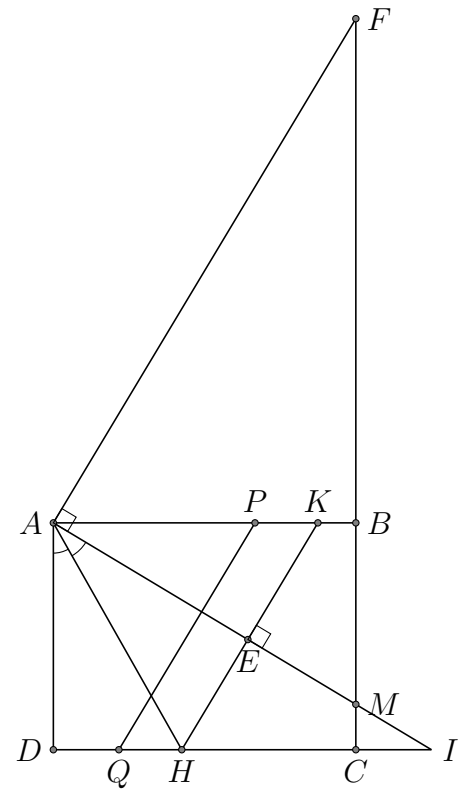
$\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$ (cùng phụ với $\widehat{BAM}$).

Vậy $\triangle ABF \sim \triangle ADI \Rightarrow \frac{AI}{AF} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{AF^2} = \frac{4}{9AI^2}$.

Xét $\triangle AMF$: $\widehat{MAF} = 90^\circ$ (gt), $AB \perp MF \Rightarrow \frac{1}{AB^2} =$

$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{4}{9AI^2}$ (đpcm)



□

Câu 5. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP ($MP < MN$), đường thẳng vuông góc với MI tại I cắt NP kéo dài tại Q . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên MQ .

a) Chứng minh $\widehat{PIQ} = \widehat{INP}$.

b) Chứng minh điểm H nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

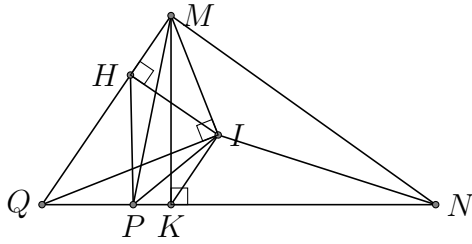
Lời giải.

a) Chứng minh $\widehat{PIQ} = \widehat{INP}$

Kẻ $MK \perp NP$ ($K \in NP$).

Tứ giác $MIKQ$ có: $\widehat{MIQ} = \widehat{MKQ} = 90^\circ$, nên tứ giác $MIKQ$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{IQK} = \widehat{IMK} = \widehat{IMP} - \widehat{KMP}$
 $= \frac{\widehat{NMP}}{2} - (90^\circ - \widehat{MPN})$.



Lại có $\frac{\widehat{MPN}}{2} = \widehat{IPN} = \widehat{PIQ} + \widehat{IQK}$ (góc ngoài $\triangle IPQ$)

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \widehat{PIQ} &= \frac{\widehat{MPN}}{2} - \widehat{IQK} = \frac{\widehat{MPN}}{2} - \left[\frac{\widehat{NMP}}{2} - (90^\circ - \widehat{MPN}) \right] \\ &= 90^\circ - \frac{\widehat{MPN} + \widehat{NMP}}{2} = \frac{\widehat{MNP}}{2} = \widehat{INP} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

b) Chứng minh H nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

Xét $\triangle PIQ$ và $\triangle INQ$, ta có $\widehat{PIQ} = \widehat{INQ}$, $\widehat{Q}$ chung.

$$\text{Vậy } \triangle PIQ \sim \triangle INP \Rightarrow \frac{QI}{QN} = \frac{QP}{QI} \Rightarrow QI^2 = QP \cdot QN.$$

Xét $\triangle MIQ$: $\widehat{MIQ} = 90^\circ$, $IH \perp MQ \Rightarrow QI^2 = QH \cdot QM$.

$$\text{Do đó } QP \cdot QN = QH \cdot QM \Rightarrow \frac{QP}{QH} = \frac{QM}{QN}, \text{ nên } \triangle QPH \sim \triangle QMN \text{ (c-g-c)}/$$

Suy ra $\widehat{QPH} = \widehat{QMN}$

Vậy tứ giác $MNPH$ là tứ giác nội tiếp, nên H nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

□

———— HẾT ————

14 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐỒNG THÁP

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$ (với $x, y > 0; x \neq y$).
- b) Giải phương trình $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{xy}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = \frac{2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} \\ &= -\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = -\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = -1. \end{aligned}$$

- b) Đặt $t = x - 2 \Leftrightarrow x = t + 2$ thế vào phương trình đã cho ta được:

$$t^4 + (t-1)^4 = 1 \Leftrightarrow 2t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2-t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t - 1 = 0 \\ t^2 - t + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm).} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 2, x = 3$.

□

Câu 2.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} \\ y + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases}$.

- b) Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho đường thẳng $d: y = mx + n$ (m, n là tham số) và parabol $(P): y = 2x^2$. Trên đồ thị (P) lấy hai điểm M, N có hoành độ tương ứng là 1 và 2. Xác định các giá trị m, n để đường thẳng d tiếp xúc với parabol (P) và song song với đường thẳng MN .

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x, y \neq 0$. Ta có

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} \\ y + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy+1}{y} = \frac{7}{2} \\ \frac{xy+1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Lấy (1) chia (2) ta được: $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, kết hợp với hệ phương trình ban đầu ta được:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}y + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 7y + 2 = 0 \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (Thoả điều}$$

kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(3; 2), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

- b) Phương trình đường thẳng $MN: y = 6x - 4$, vì d song song MN nên $m = 6$.

Để d tiếp xúc (P) thì phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 = 6x + n$ hay $2x^2 - 6x - n = 0$ có nghiệm kép.

$$\text{Tức là, } \Delta' = 0 \Leftrightarrow 9 + 2n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{9}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = 6, n = -\frac{9}{2}.$$

□

Câu 3.

a) Cho a, b, c, d là các số thực phân biệt. Biết rằng a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 1 = 0$. Chứng minh hệ thức sau: $(a - c)(a - d)(b - c)(b - d) = (m - n)^2$.

b) Cho a, b, c là ba số dương bất kì thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}.$$

Lời giải.

a) Theo Viet, ta có: $a + b = -m, ab = 1; c + d = -n, cd = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } (a - c)(a - d)(b - c)(b - d) &= [a^2 - a(c + d) + cd] \cdot [b^2 - b(c + d) + cd] \\ &= (a^2 + an + 1)(b^2 + bn + 1) = [a^2 + am + 1 + a(n - m)] \cdot [b^2 + bm + 1 + b(n - m)] \\ &= ab(m - n)^2 = (m - n)^2 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

b) Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nên $\frac{a}{b^2 + c^2} = \frac{a}{1 - a^2} = \frac{a^2}{a(1 - a^2)}$.

Ta có:

$$a^2(1 - a^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2a^2(1 - a^2)(1 - a^2) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$$

$$\Leftrightarrow a(1 - a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1 - a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b(1 - b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2; \frac{c^2}{c(1 - c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2.$$

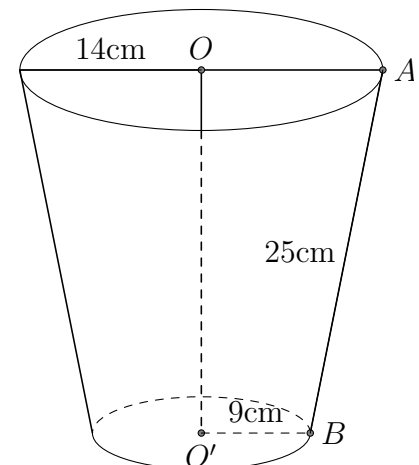
$$\text{Vậy } P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ khi } a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

Câu 4.

- a) Một ca nô chạy trên sông xuôi dòng 81 km và ngược dòng 108 km với tổng thời gian là 8 giờ. Một lần khác, ca nô ấy cũng chạy trên sông vừa nêu trên, xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km với tổng thời gian là 4 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước. Biết rằng, vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước không đổi.
- b) Người thợ cần làm một cái xô bằng nhôm hình nón cụt (hình vẽ bên), có bán kính đường tròn miệng xô là 14 cm, bán kính đáy xô là 9 cm và chiều dài đường sinh là 25 cm. Gọi S là tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của xô. Tính S và thể tích của xô (tính theo đơn vị lít). (Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).



Lời giải.

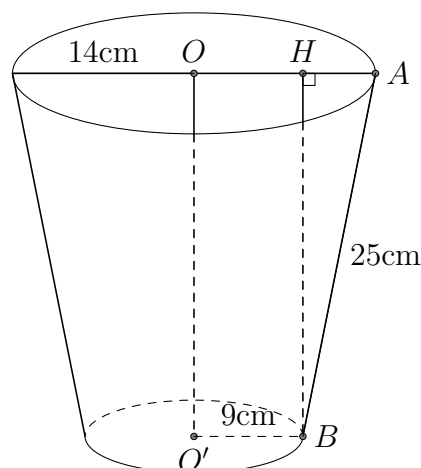
- a) Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$); vận tốc riêng của dòng nước là y (km/h, $y > 0$), ($x > y$).

Suy ra vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô tương ứng là $(x + y)$ và $(x - y)$.

$$\text{Theo giả thiết ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{81}{x+y} + \frac{108}{x-y} = 8 \\ \frac{54}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{27} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 27 \\ x-y = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h, vận tốc riêng của dòng nước là 3 km/h.}$$

b)



Diện tích xung quanh của chiếc xô là $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2).l = \pi(14 + 9).25 = 575\pi \text{ cm}^2$.

Diện tích đáy của chiếc xô là $S_d = \pi R_2^2 = \pi.9^2 = 81\pi \text{ cm}^2$.

Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của xô là $S = 575\pi + 81\pi = 656\pi \approx 2059,84 \text{ cm}^2$.

Trong mặt phẳng $(OABO')$ dựng BH vuông góc OA , ta được: $OH = O'B = 9 \text{ cm}$, $AH = 5 \text{ cm}$, $OO' = BH$.

Ta có $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 600 \Rightarrow BH = 10\sqrt{6}$ cm.

Thể tích của xô:

$$V = \frac{1}{3}\pi.h(R_1^2 + R_2^2 + R_1.R_2) = \frac{4030\pi\sqrt{6}}{3} \approx 10332,11 \text{ cm}^3 \approx 10,33 \text{ dm}^3 \approx 10,33 \text{ lít.}$$

Vậy thể tích của xô là 10,33 lít.

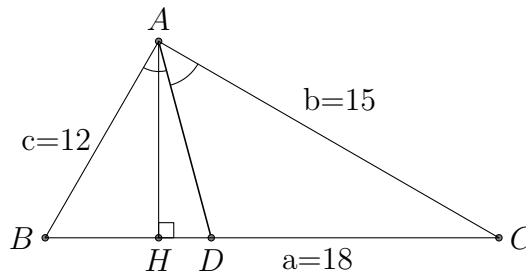
□

Câu 5.

- a) Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm và $BC = 18$ cm. Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC (D thuộc cạnh BC).
- b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Gọi M, N, P, I lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CA, AB và OC .
- (i) Tính $\widehat{BON}$. Chứng minh ba điểm A, M, I thẳng hàng.
- (ii) Chứng minh P là trực tâm của tam giác OMN .

Lời giải.

a)



Theo tính chất phân giác trong tam giác, ta có:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow BD = \frac{18 \cdot 4}{9} = 8 \text{ cm.}$$

$$\text{Đặt } BH = x, \text{ ta có: } AB^2 - x^2 = AC^2 - (BC - x)^2 \Leftrightarrow c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 \Leftrightarrow 2ax = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{27}{4} = 6,75 \text{ cm. } HD = BD - BH = 8 - 6,75 = 1,25 \text{ cm.}$$

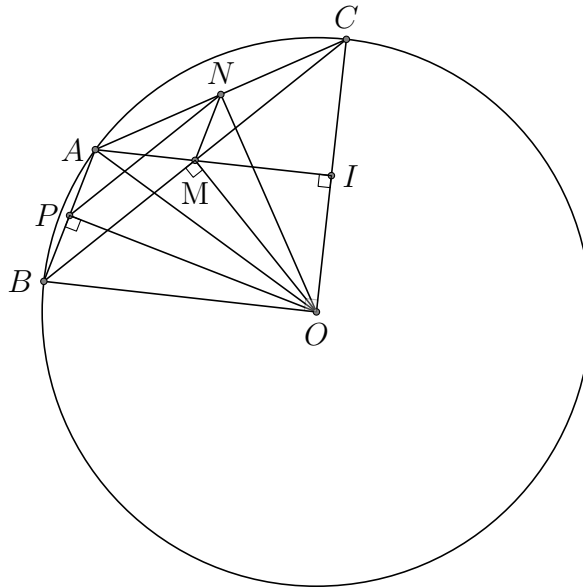
Trong tam giác vuông ADH và AHB , áp dụng định lý Pytago có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = 12^2 - (6,75)^2,$$

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = 12^2 - (6,75)^2 + (1,25)^2 = 100.$$

Vậy $AD = 10$ cm.

b)



(i) Ta có:

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} \Rightarrow \widehat{AOC} = 2.\widehat{ABC} = 60^\circ.$$

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOB} = 2.\widehat{ACB} = 30^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BON} = \widehat{BOA} + \widehat{AON} = \widehat{AB} + \frac{1}{2}\widehat{AC} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{BC} = 90^\circ.$$

Tam giác OAC cân tại O ($OA = OC = R$), $\widehat{AOC} = \widehat{AC} = 60^\circ$ nên tam giác đều.

Mà AI là đường trung tuyến nên AI là đường cao.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BO \perp OC \text{ (do } \widehat{BOC} = 90^\circ) \\ AI \perp OC \end{cases} \Rightarrow AI \parallel BO. \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác, vì } MI \text{ là đường trung bình của tam giác } OBC \text{ nên } MI \parallel BO. \quad (4)$$

Từ (3), (4) theo tiên đề Ôclit thì A, M, I thẳng hàng.

(ii) Ta có:

$$\begin{cases} OM \perp BC \text{ (vì } M \text{ là trung điểm } BC) \\ NP \parallel BC \text{ (vì } NP \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC) \end{cases} \Rightarrow NP \perp OM.$$

$$\begin{cases} OP \perp AB \text{ (vì } P \text{ là trung điểm } AB) \\ MN \parallel AB \text{ (vì } MN \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC) \end{cases} \Rightarrow OP \perp MN.$$

Tam giác OMN có NP và OP là hai đường cao cắt nhau tại $P \Rightarrow P$ là trực tâm của tam giác OMN .

□

———— HẾT ————

15 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG, V2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{a+x^2}{x} - 2\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{a+x^2}{x} + 2\sqrt{a}}$, với $a > 0$ và $x > 0$.
 b) Tính giá trị của biểu thức $P = (x-y)^3 + 3(x-y)(xy+1)$ biết

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}, y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

$$a) A = \sqrt{\frac{(x-\sqrt{a})^2}{x}} + \sqrt{\frac{(x+\sqrt{a})^2}{x}} = \frac{|x-\sqrt{a}| + x + \sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Nếu } x \geq \sqrt{a} \text{ thì } A = \frac{x - \sqrt{a} + x + \sqrt{a}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

$$\text{Nếu } 0 < x < \sqrt{a} \text{ thì } A = \frac{-x + \sqrt{a} + x + \sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

b) Ta có $x^3 = 3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} \cdot (\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}})$. Suy ra $x^3 = 4\sqrt{2} - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x = 4\sqrt{2}$ (1). Tương tự ta có $y^3 + 3y = 24\sqrt{2}$ (2). Trừ (1) và (2) về với về ta được: $x^3 - y^3 + 3(x-y) = -20\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-y)^3 + 3(x-y)(xy+1) = -20\sqrt{2}$. Vậy $P = -20\sqrt{2}$
 $\square$

Câu 2.

$$a) \text{ Giải phương trình } x^2 + 6 = 4\sqrt{x^3 - 2x^2 + 3}.$$

$$b) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \\ x^2 - 3xy - y^2 = 3 \end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \leq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 - 3x + 3) + 3(x+1) = 4\sqrt{(x+1)(x^2 - 3x + 3)} \quad (1).$$

Do $x^2 - 3x + 3 > 0$, nên

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{3(x+1)}{x^2 - 3x + 3} = 4\sqrt{\frac{x+1}{x^2 - 3x + 3}}.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+1}{x^2 - 3x + 3}}$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành

$$1 + 3t = 4t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Với $t = 1$, ta có $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Với $t = \frac{1}{3}$, ta có $x = 6 \pm \sqrt{42}$.

$$b) \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \quad (1) \\ x^2 - 3xy - y^2 = 3 \quad (2) \end{cases}.$$

Do $\sqrt{y^2 + 1} - y \neq 0$ với mọi y , nên nhân hai vế của (1) với $\sqrt{y^2 + 1} - y$ ta được

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 1} = -y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow x + y + 1 + \frac{(x+1)^2 - y^2}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y + 1) \left(1 + \frac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ \sqrt{(x+1)^2 + 1} + (x+1) + \sqrt{y^2 + 1} - y = 0 \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Do $\sqrt{(x+1)^2 + 1} \geq -x - 1$ với mọi x và $\sqrt{y^2 + 1} \geq y$ với mọi y nên (3) vô nghiệm.

Với $y = -x - 1$ thay vào (2) ta được $x = 1 \Rightarrow y = -2$ hoặc $x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$. $\square$

Câu 3.

- a) Tìm dạng tổng quát của số nguyên dương n biết $M = n.4^n + 3^n$ chia hết cho 7.
b) Tìm các cặp số $(x; y)$ nguyên dương thỏa mãn

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 - 17(x^4 + y^4) = 238y^2 + 833.$$

Lời giải.

a)

- $n = 2k$ (k nguyên dương): $M = 2k.16^k + 9^k$. Do $16^k, 9^k$ có cùng số dư với 2^k khi chia cho 7, nên M cùng dư với $2k.2^k + 2^k = (2k+1)2^k$ khi chia cho 7. Do đó, $M:7 \Leftrightarrow 2k+1:7 \Leftrightarrow k = 7q+3$, suy ra $n = 14q+6$ ($q \in \mathbb{N}$).
- $n = 2k+1$ (k nguyên dương): $M = 4(2k+1).16^k + 3.9^k$ cùng dư với $(k+4).2^k + 3.2^k = (k+7)2^k$ khi chia cho 7. Do đó, $M:7 \Leftrightarrow k+7:7 \Leftrightarrow k = 7p$, suy ra $n = 14p+1$ ($n = 14p+1$).

Vậy $n = 14q+6$ hoặc $n = 14p+1$ ($p, q \in \mathbb{N}$).

b)

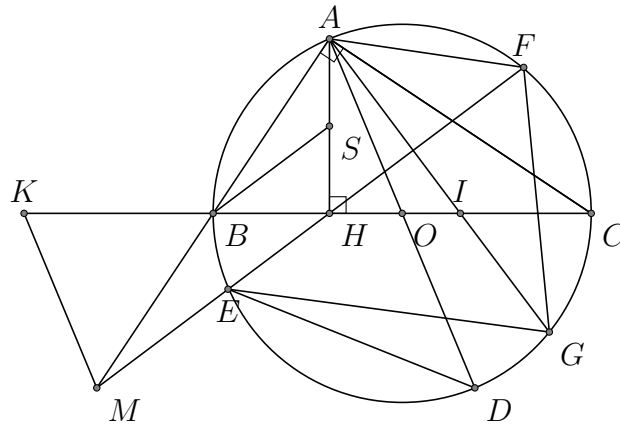
$$\begin{aligned} &(x^2 + 4y^2 + 28)^2 - 17(x^4 + y^4) = 238y^2 + 833 \\ &\Leftrightarrow [x^2 + 4(y^2 + 7)]^2 = 17[x^4 + (y^2 + 7)^2] \\ &\Leftrightarrow [4x^2 - (y^2 + 7)]^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x + y)(2x - y) = 7(1) \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $2x + y > 2x - y$ và $2x + y > 0$. Từ (1) suy ra $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$. $\square$

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính BC , A là điểm di chuyển trên đường tròn (O) (A khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC tại H . M là điểm đối xứng của điểm A qua điểm B .

- a) Chứng minh điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.
b) Đường thẳng MH cắt (O) tại E và F (E nằm giữa M và F). Gọi I là trung điểm của HC , đường thẳng AI cắt (O) tại G (G khác A). Chứng minh $AF^2 + FG^2 + GE^2 + EA^2 = 2BC^2$
c) Gọi P là hình chiếu vuông góc của H lên AB . Tìm vị trí của điểm A sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



a) Lấy K là điểm đối xứng của O qua B , vì B và O cố định nên K cố định. Tứ giác $OAKM$ là hình bình hành nên $KM = OA$. $OA = \frac{BC}{2}$ không đổi. Do đó, M nằm trên đường tròn tâm K , bán kính $\frac{BC}{2}$.

b)

Xét tam giác AHB và tam giác CHA có $\widehat{BHC} = \widehat{BHA} = 90^\circ$, $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$). Suy ra tam giác AHB đồng dạng với tam giác CHA . Gọi S là trung điểm của AH , I là trung điểm của HC nên tam giác ABS đồng dạng với tam giác CAI , suy ra $\widehat{ABS} = \widehat{CAI}$.

Ta lại có BS là đường trung bình của tam giác AMH , nên

$$BS \parallel MH \Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{AMH} \Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{CAI}.$$

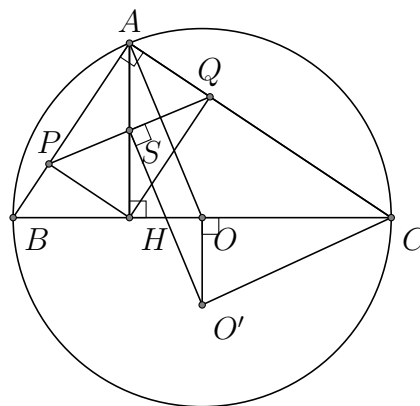
Mặt khác $\widehat{CAI} + \widehat{MAI} = 90^\circ$, hay $AI \perp MF$

Xét tứ giác nội tiếp $AEGF$ nội tiếp (O) có $AG \perp EF$

Kẻ đường kính AD , do $GD \perp AG$ và $EF \perp AG$ nên $EF \parallel GD$, do đó tứ giác nội tiếp $EFGD$ là hình thang cân, suy ra $FG = ED \Rightarrow AE^2 + FG^2 = AE^2 + ED^2 = AD^2 = BC^2$.

Chứng minh tương tự ta có $AF^2 + EG^2 = BC^2$. Vậy $AF^2 + FG^2 + GE^2 + EA^2 = 2BC^2$.

c)



Gọi Q là hình chiếu của H trên AC . Khi đó, tứ giác $APHQ$ là hình chữ nhật (S là tâm). Do đó $\widehat{AQP} = \widehat{AHP} = \widehat{ABC}$, nên tứ giác $BPQC$ nội tiếp

Đường trung trực của các đoạn thẳng PQ, BC, QC cắt nhau tại O' thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP . Ta có $OO' \parallel AH$ vì cùng vuông góc với BC . $OA \perp PQ$ và $O'S \perp PQ$, nên $O'S \parallel OA$, do đó tứ giác $ASO'O$ là hình bình hành. Từ đó ta nhận được $OO' = AS = \frac{AH}{2}$.

Tam giác $OO'S$ vuông tại O nên $O'C = \sqrt{OC^2 + \frac{AH^2}{4}}$. Do OC không đổi nên $O'C$ lớn nhất khi và chỉ khi A nằm chính giữa cung BC . □

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$a^3 + ab^2 \geq 2a^2b; b^3 + bc^2 \geq 2b^2c; c^3 + ca^2 \geq 2c^2a.$$

Suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Do đó $P \geq 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$. ($t \geq \frac{1}{3}$.)

Khi đó $P \geq 14t + \frac{3(1-t)}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} - \frac{3}{2} \geq \frac{11}{2} + 2\sqrt{\frac{27t}{2} \cdot \frac{3}{2t}} - \frac{3}{2} = \frac{23}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{23}{3}$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. □

————— HẾT —————

16 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÀ NỘI**◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆****Câu 1.**

- a) Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y - 4x = 0 \\ 4x^2 - 4xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

Lời giải.

- a) Điều kiện $x \leq 0; x \geq 1$.

Phương trình tương đương $(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$. Đặt $t = \sqrt{x^2 - x}$ ($t \geq 0$).

Ta có

$$t^4 - t^2 - \sqrt{2}t = 0 \Leftrightarrow t(t^3 - t - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\bullet t = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (TM).}$$

$$\bullet t = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (TM).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-1; 0; 1; 2\}$.

$$\text{b) Xét } 4x^2 - 4xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (2x - y^2)^2 + (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

- Thay $x = 2, y = 2$ vào phương trình còn lại ta thấy thỏa mãn.
- Thay $x = 2, y = -2$ vào phương trình còn lại ta thấy không thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (2; 2)$.

□

Câu 2.

- a) Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$.
- b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^x \cdot x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

Lời giải.

- a) Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$ (do a, b, c khác nhau).

$$\Rightarrow \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{b^2 + (a - c)(a + c)} = \frac{ab^2}{b^2 - b(a - c)} = \frac{ab}{b - a + c} = -\frac{b}{2}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} = -\frac{c}{2} \text{ và } \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = -\frac{a}{2} \Rightarrow P = -\frac{a + b + c}{2} = 0.$$

- b) Ta có $2^x \cdot x^2 = (3y + 1)^2 + 15$.

$$\text{Do } x, y \in \mathbb{N} \text{ và } \begin{cases} 3y + 1 \equiv 1 \pmod{3} \\ 15 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow (3y + 1)^2 + 15 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên x^2 là số chính phương $\Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ hoặc $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

Do $2^x \cdot x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $x^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Vậy ta có $2^{2k} \cdot (2k)^2 - (3y + 1)^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k \cdot 2k - 3y - 1)(2^k \cdot 2k + 3y + 1) = 15$. Vì $k, y \in \mathbb{N}$ nên $2^k \cdot 2k + 3y + 1 > 0 \Rightarrow 2^k \cdot 2k - 3y - 1 > 0$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} 2^k \cdot 2k + 3y + 1 = 15 \\ 2^k \cdot 2k - 3y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 1 = 7 \\ 2^k \cdot k = 4 \end{cases} \text{ (vô lí).} \\ & \bullet \begin{cases} 2^k \cdot 2k + 3y + 1 = 5 \\ 2^k \cdot 2k - 3y - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 1 = 1 \\ 2^k \cdot k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ k = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) = (2; 0)$.

□

Câu 3.

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{2a^2}{a + b^2} + \frac{2b^2}{b + c^2} + \frac{2c^2}{c + a^2} \geq a + b + c.$$

b) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

Lời giải.

a) Ta có $3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} \Rightarrow a + b + c \leq 3$. Vì $a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow a^4 + a^2 \geq 2a^3$.

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{a + b^2} + \frac{2b^2}{b + c^2} + \frac{2c^2}{c + a^2} &= \frac{4a^4}{2a^3 + 2a^2b^2} + \frac{4b^4}{2b^3 + 2b^2c^2} + \frac{4c^4}{2c^3 + 2c^2a^2} \\ &\geq \frac{(2a^2 + 2b^2 + 2c^2)^2}{2a^3 + 2a^2b^2 + 2b^3 + 2b^2c^2 + 2c^3 + 2c^2a^2} \\ &\geq \frac{36}{a^4 + a^2 + b^4 + b^2 + c^4 + c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2} \\ &= \frac{36}{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)} = 3 \geq a + b + c. \end{aligned}$$

b) Vì $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2\sqrt{12n^2 + 1} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{12n^2 + 1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{12n^2 + 1} = m \in \mathbb{Q}$
 $\Rightarrow 12n^2 = m^2 - 1 : 4 \Rightarrow m = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{N})$.

Ta có $12n^2 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1) \Rightarrow k(k + 1) = 3n^2 : 3 \Rightarrow k : 3$ hoặc $k + 1 : 3$.

• Xét $k = 3p \ (p \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 3n^2 = 3p(3p + 1) \Rightarrow n^2 = p(3p + 1)$.

$$\text{Vì } (p, 3p + 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} p = a^2 \\ 3p + 1 = b^2 \end{cases} \text{ (với } a, b \in \mathbb{N}^*).$$

Mà $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} = 2 + 2m = 2 + 2(2k + 1) = 4 + 4k = 4(k + 1) = 4(3p + 1) = 4b^2$ (đpcm).

• Xét $k = 3q - 1 \ (q \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 3n^2 = 3q(3q - 1) \Rightarrow n^2 = q(3q - 1)$.

$$\text{Vì } (q, 3q - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} q = a^2 \\ 3q - 1 = b^2 \end{cases} \text{ (với } a, b \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow b^2 = 3a^2 - 1 \text{ (vô lí vì số chính phương chia cho 3 có dư là 0 hoặc 1).}$$

□

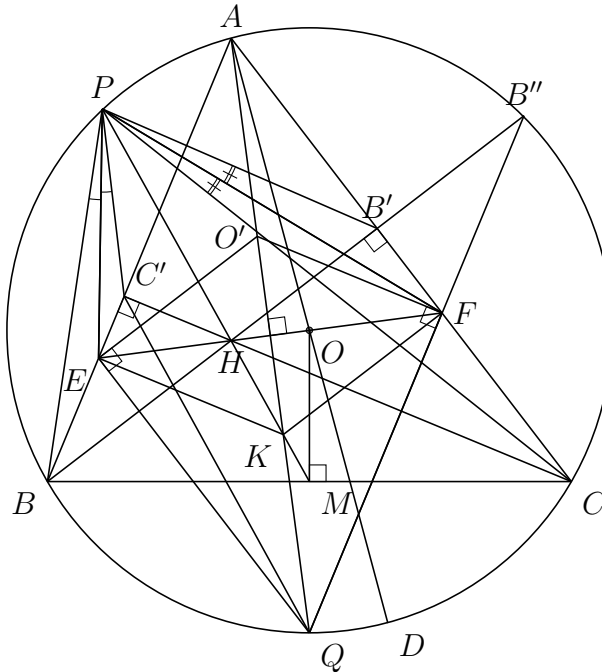
Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại P .

a) Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.

- b) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB , AC tại các điểm E , F . Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và K là giao điểm của HM với AO' .
- (a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ là tứ giác nội tiếp.
- (b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Lời giải.

- a) Giả sử tia AO cắt (O) tại $D \Rightarrow AD$ là đường kính của đường tròn (O)
 $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow BD \parallel CH$ và $CD \parallel BH \Rightarrow$ tứ giác $HBDC$ là hình bình hành
 $\Rightarrow DH$ cắt BC tại trung điểm của mỗi đoạn $\Rightarrow D, M, H, P$ thẳng hàng
 $\Rightarrow \widehat{APD} = 90^\circ$ hay $\widehat{APH} = 90^\circ \Rightarrow P$ nằm trên đường tròn đường kính AH .
 Lại có $\widehat{AB'H} = \widehat{AC'H} = 90^\circ \Rightarrow B', C'$ nằm trên đường tròn đường kính AH
 $\Rightarrow A, P, B', C', H$ nằm trên đường tròn đường kính $AH \Rightarrow \widehat{AB'P} = \widehat{AC'P}$.
 Mà $\widehat{PC'B} + \widehat{PC'A} = 90^\circ$ và $\widehat{PB'C} + \widehat{PB'A} = 180^\circ$ nên $\widehat{PC'B} = \widehat{PB'C}$.
 Xét đường tròn (O) có $\widehat{PCB'} = \widehat{PBC'}$ (cùng chắn cung $\widehat{AP}$) và $\widehat{PC'B} = \widehat{PB'C}$
 $\Rightarrow \Delta PB'C \sim \Delta PC'B$.



- b) Vì PE, PF lần lượt là phân giác $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ nên $\begin{cases} \widehat{EPC'} = \frac{1}{2}\widehat{BPC'} \\ \widehat{FPB'} = \frac{1}{2}\widehat{CPB'} \end{cases}$.

- (a) Vì $\Delta BPC' \sim \Delta CPB' \Rightarrow \widehat{BPC'} = \widehat{CPB'} \Rightarrow \widehat{EPC'} = \widehat{FPB'}$.

Xét tam giác PEC' và tam giác PFB' có $\begin{cases} \widehat{EPC'} = \widehat{FPB'} \\ \widehat{PC'E} = \widehat{PB'F} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta PEC' \sim \Delta PFB' \Rightarrow \widehat{PEC'} = \widehat{PFB'} \Rightarrow$ tứ giác $APEF$ là tứ giác nội tiếp.

Vì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF nên O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APEF$.

Gọi K' là giao của AO' với $(O') \Rightarrow AK'$ là đường kính của đường tròn $(O') \Rightarrow \widehat{APK'} = 90^\circ \Rightarrow K \in PD$ (vì $\widehat{APD} = 90^\circ$) $\Rightarrow K$ là giao điểm của PD và AO' hay K' là giao

điểm của MH và $AO' \Rightarrow K \equiv K' \Rightarrow K \in (O) \Rightarrow PEKF$ là tứ giác nội tiếp.

- (b) Gọi Q là giao điểm của hai tiếp tuyến của đường tròn (O') tại E, F và B'' là giao điểm của BH, QF . Ta có:

$$\widehat{B''QA} = 90^\circ - \widehat{FO'Q} = 90^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{B''BA} \Rightarrow ABQB'' \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{FB''H} = \widehat{BAQ} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{CHB'}}{2} = \widehat{FHB''} \Rightarrow B'' \text{ đối xứng với } H \text{ qua } AC.$$

Do đó B'' nằm trên $(O) \Rightarrow Q$ nằm trên (O) .

□

Câu 5. Cho 2017 số hữu tỷ dương được viết trên một đường tròn. Chứng minh tồn tại hai số được viết cạnh nhau trên đường tròn sao cho khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số mỗi nhóm bằng nhau.

Lời giải.

Ta có thể đưa về bài toán mà 2017 số đã cho là các số nguyên dương, bằng cách quy đồng các số hữu tỷ ta được tử số là các số nguyên dương.

Ta gọi ước chung lớn nhất của 2017 số nguyên dương này là d , ta chia tất cả các số này cho d ta đưa bài toán về việc xét 2017 số nguyên dương mà ước chung lớn nhất của chúng là 1.

- Trường hợp 1: tổng của 2017 số này là lẻ.

Nếu tất cả các cặp số đứng cạnh nhau là các số chẵn - lẻ (hoặc lẻ - chẵn) thì số cặp số như thế sẽ là một số chẵn, mà 2017 là số lẻ nên sẽ tồn tại hai số chẵn (hoặc hai số lẻ) đứng cạnh nhau. Khi ta bỏ hai số này (có tổng là một số chẵn) thì 2015 số còn lại sẽ có tổng là một số lẻ nên không thể chia 2015 số còn lại thành hai phần mà có tổng bằng nhau.

- Trường hợp 2: tổng của 2017 số này là chẵn $\Rightarrow$ các số này không thể đều chẵn (1).

Vì ước chung lớn nhất của 2017 số này là 1 nên các số này không thể đều chẵn, do đó tồn tại ít nhất một số là lẻ (2).

Từ (1) và (2) ta thấy tồn tại một số chẵn và một số lẻ đứng cạnh nhau. Khi bỏ hai số này thì sẽ còn 2015 số có tổng là một số lẻ. Do vậy không thể chia 2015 số còn lại thành hai phần có tổng các số bằng nhau.

□

———— HẾT ————

17 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HÀ TĨNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $c^2 + 2(ab - bc - ca) = 0, b \neq c, a + b \neq c$. Chứng minh rằng

$$\frac{2a^2 - 2ac + c^2}{2b^2 - 2bc + c^2} = \frac{a - c}{b - c}.$$

Lời giải.

Ta có

$$c^2 + 2(ab - bc - ca) = 0 \Leftrightarrow a^2 = a^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac = (a - c)(a - c + 2b)$$

Suy ra

$$2a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2 + a^2 = (a - c)^2 + (a - c)(a - c + 2b) = 2(a - c)(a + b - c)$$

Tương tự thì $2b^2 - 2bc + c^2 = 2(b - c)(a + b - c)$.

Vậy

$$\frac{2a^2 - 2ac + c^2}{2b^2 - 2bc + c^2} = \frac{2(a - c)(a + b - c)}{2(b - c)(a + b - c)} = \frac{a - c}{b - c}$$

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{3x - 1} - \sqrt{x + 1} = 3x^2 - 2x - 1$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 6x + \frac{3}{x + y} = 13 \\ 12(x^2 + xy + y^2) + \frac{9}{(x + y)^2} = 85. \end{cases}$$

Giải phương trình

Lời giải.

a) Với điều kiện $x \geq \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2(x - 1)}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} &= (x - 1)(3x + 1) \\ \Leftrightarrow (x - 1) \left(\frac{2}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} - 3x - 1 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} - 3x - 1 = 0 \end{cases} &(1) \end{aligned}$$

Do $x \geq \frac{1}{3}$ nên $\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1} > 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} < 2$.

Mặt khác $3x + 1 \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x + 1}} - 3x - 1 < 0$. Do đó, phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

b) Với điều kiện $x + y \neq 0$ thì hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 3(x - y) + 3(x + y) + \frac{3}{x + y} = 13 \\ 9(x + y)^2 + 3(x - y)^2 + \frac{9}{(x + y)^2} = 85. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + y = a \neq 0 \\ x - y = b \end{cases} \text{ ta được hệ } \begin{cases} 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = 13 - 3b & (1) \\ 9\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 103 - 3b^2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } (13 - 3b)^2 = 103 - 3b^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 13b + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Với $b = \frac{11}{2}$, thay vào (1) ta có $6a^2 + 7a + 6 = 0$ (vô nghiệm).

Với $b = 1$, thay vào (1) ta có $a + \frac{1}{a} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ hoặc $a = \frac{1}{3}$.

$$\text{Với } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Thử lại ta thấy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$ và $(x; y) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

□

Câu 3.

- a) Tìm các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x^3 + y^3 - z^2 = 0 \end{cases}$.
- b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 2016$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a + \sqrt{2016a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2016b + ac}} + \frac{c}{c + \sqrt{2016c + ab}}$$

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x^3 + y^3 - z^2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ x^3 + y^3 = z^2 \end{cases} \Rightarrow (x^3 + y^3) = (x + y)^2 \\ &\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x + y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 - x - y = 0 \text{ (do } x + y > 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 - x(y + 1) + y^2 - y = 0. (*) \end{aligned}$$

Coi (*) là phương trình bậc hai ẩn x có $\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y)$. Do (*) có nghiệm nên $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 \leq \frac{4}{3}$, mặt khác $y \in \mathbb{N}^*$ nên $(y - 1)^2 = 0$ hoặc $(y - 1)^2 = 1$, giải ra và kết hợp điều kiện nguyên dương của y ta được $y = 1$ hoặc $y = 2$.

$$\diamond \text{ Với } y = 1 \text{ thay vào } (*) \text{ được } \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ (do } x \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow z = 3.$$

$$\diamond \text{ Với } y = 2, \text{ thay vào } (*) \text{ được } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2.$$

Khi $x = 1$ thì $z = 3$ và khi $x = 2$ thì $z = 4$.

Thử lại ta được các bộ số $(x; y; z)$ thỏa mãn là $(1; 2; 3), (2; 1; 3), (2; 2; 4)$.

- b) Ta có $a + \sqrt{2016a + bc} = a + \sqrt{(a + b)(a + c)}$.

Áp dụng bất đẳng thức **Bunyakovsky** ta được

$$(a+b)(a+c) = [(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2] \cdot [(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2] \geq (\sqrt{ac} + \sqrt{ab})^2$$

Suy ra

$$a + \sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{2016a + bc}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b}{b + \sqrt{2016b + ac}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{2016c + ab}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên suy ra $P \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 672$.

Vậy $\max P = 1$.

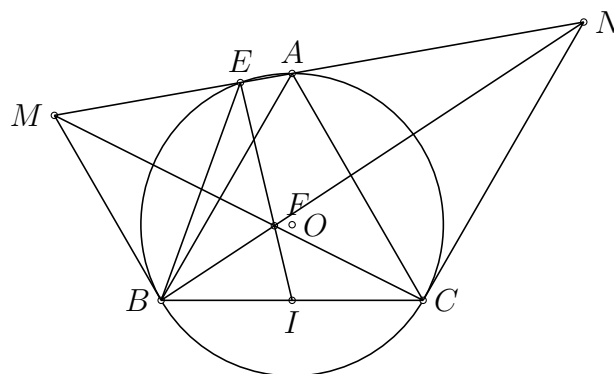
□

Câu 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Điểm E thay đổi trên cung nhỏ AB , ($E \neq A, E \neq B$). Từ B, C lần lượt kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) , các tiếp tuyến này cắt đường thẳng AE theo thứ tự tại M, N . Gọi F là giao điểm của BN và CM .

a) Chứng minh $MB \cdot NC = BC^2$

b) Khi E thay đổi trên cung nhỏ AB , chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Ta có MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) , suy ra $MB \perp OB$. Mặt khác $\triangle ABC$ đều nên $AC \perp OB \Rightarrow MB \parallel AC \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{NAC}$. Tương tự, $\widehat{MAB} = \widehat{ANC}$. Do đó $\triangle ABM \sim \triangle NCA$ (g.g). Suy ra $\frac{MB}{BA} = \frac{AC}{CN} \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{BC}{CN} \Rightarrow MB \cdot CN = BC^2$.

b) Ta có $BM \parallel AC \Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$, do $\widehat{ACB} = 60^\circ$ nên $\widehat{MBC} = 120^\circ$.

Tương tự, $\widehat{BCN} = 120^\circ$. Do đó $\widehat{MBC} = \widehat{BCN}$.

Theo câu trên thì $\frac{MB}{BC} = \frac{BC}{CN}$ nên $\triangle BCM \sim \triangle CNB$ (c.g.c), suy ra $\widehat{FBC} = \widehat{FMB}$.

Lại có $\widehat{MFB} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB}$ mà $\widehat{FBC} = \widehat{FMB}$ nên

$$\widehat{MFB} = \widehat{FMB} + \widehat{FCB} = 180^\circ - \widehat{MBC} = 60^\circ.$$

Mặt khác $\widehat{MEB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ (vì tứ giác $ACBE$ nội tiếp). Do đó $\widehat{MFB} = \widehat{MEB} \Rightarrow MEFB$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi $I = EF \cap BC$.

Vì $\widehat{FBI} = \widehat{FMB}$ nên IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MFB hay IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MEFB \Rightarrow IB^2 = IF.IE$. (1)

Tương tự, tứ giác $EFCN$ nội tiếp, đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFCN$. Suy ra $IC^2 = IF.IE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IB = IC$. Vậy đường thẳng EF đi qua điểm I cố định.

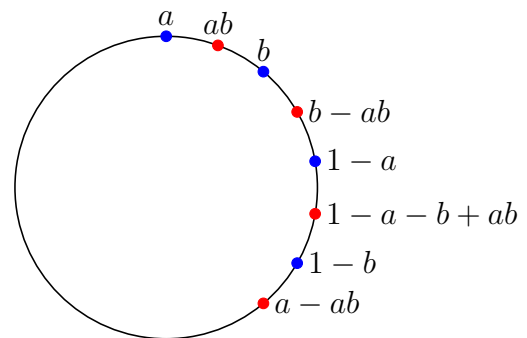
□

Câu 5. Trên một đường tròn lấy 1000 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Mỗi điểm được gán với một giá trị là một số thực khác 0, giá trị của mỗi điểm màu xanh bằng tổng giá trị của hai điểm màu đỏ kề với nó. Giá trị của mỗi điểm màu đỏ bằng tích giá trị của hai điểm màu xanh kề với nó. Tính tổng giá trị của 1000 điểm trên.

Lời giải.

Gọi a là giá trị của một điểm màu xanh ($a \neq 0$), khi đó giá trị của điểm màu đỏ đứng cạnh nó theo chiều kim đồng hồ được viết dưới dạng ab (b là giá trị của điểm màu xanh) với $b \neq 0$ như hình bên. Theo quy luật điểm màu xanh và màu đỏ, ta suy ra giá trị của 6 điểm tiếp theo theo chiều kim đồng hồ thứ tự sẽ là:

$$b, b - ab, 1 - a, 1 - a - b + ab, -b, a - ab.$$



Khi đó, tổng của 8 số trên là

$$a + ab + b + b - ab + 1 - a + 1 - a - b + ab + 1 - b + a - ab = 3$$

Mặt khác, theo quy luật đó, giá trị của điểm thứ 9 theo chiều kim đồng hồ là a . Như vậy, 1000 số trên được chia thành 125 nhóm, mỗi nhóm gồm 8 số theo quy luật trên. Suy ra tổng giá trị của 1000 điểm trên bằng $125.3 = 375$.

□

———— HẾT ————

18**ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HẬU GIANG****◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆**

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm giá trị x để $P^2 = P$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{16}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có: } \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x} \right) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2 + 4\sqrt{x}(x-1)}{x-1} = \frac{4x\sqrt{x}}{x-1}.$$

$$\text{Ta có: } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{nên } P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{4x\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = 4x.$$

$$b) P^2 = P \Leftrightarrow 16x^2 = 4x \Leftrightarrow 16x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ hoặc } x = 0 \text{ (loại)}.$$

$$c) \frac{16}{P} = \frac{4}{x} \text{ nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi } x = 2 \text{ hoặc } x = 4.$$

□

Câu 2. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

$$a) (x^2 - 5x + 3)^2 + 4(x^2 - 5x - 3) + 27 = 0.$$

$$b) x^2 + 8x - 96 = 4x\sqrt{2x+1}.$$

$$c) \begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2} \right) = \frac{25}{4} \\ (x + y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Lời giải.

$$a) (x^2 - 5x + 3)^2 + 4(x^2 - 5x - 3) + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 3)^2 + 4(x^2 - 5x + 3) + 3 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 5x + 3, \text{ ta được } t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = -3.$$

$$* t = -1, \text{ ta có } x^2 - 5x + 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = 1.$$

$$* t = -3, \text{ ta có } x^2 - 5x + 3 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$b) \text{ Điều kiện } x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } x^2 + 8x - 96 = 4x\sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot 2\sqrt{2x+1} + 4(2x+1) = 100$$

$$\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2x+1})^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{2x+1} = 10 \text{ hoặc } \Leftrightarrow x - 2\sqrt{2x+1} = -10.$$

$$\text{Với } x - 2\sqrt{2x+1} = 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = x - 10 \quad (1).$$

$$\text{Điều kiện } x \geq 10.$$

$$(1) \Leftrightarrow 4(2x+1) = x^2 - 20x + 100$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 28x + 96 = 0 \Leftrightarrow x = 24 \text{ hoặc } x = 4 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Với } x - 2\sqrt{2x+1} = -10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = x + 10 \quad (2).$$

Điều kiện $x \geq -10$.

$$(2) \Leftrightarrow 4(2x+1) = x^2 + 20x + 100$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 96 = 0 \text{ (Phương trình vô nghiệm).}$$

$$c) \begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) = \frac{25}{4} \\ (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2 + y^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{25}{4} \\ x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} X = x + \frac{1}{x} \\ Y = y + \frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} X^2 + Y^2 - 4 = \frac{25}{4} \\ X + Y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X+Y)^2 - 2XY = \frac{41}{4} \\ X + Y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = -\frac{1}{2} \\ XY = -5 \end{cases} \text{ Ta có: } X \text{ và}$$

Y là nghiệm của phương trình $t^2 + \frac{1}{2}t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -\frac{5}{2}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} X = 2 \\ Y = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} X = -\frac{5}{2} \\ Y = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} X = 2 \\ Y = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 + \frac{5}{2}y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} X = -\frac{5}{2} \\ Y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

□

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y = -5x = 6$.

- Vẽ đồ thị (P) . Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng d .
- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng $D: y = mx - 1$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 . Tìm giá trị của m để biểu thức: $T = x_1^2(1+x_2) + x_2^2(1+x_1)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

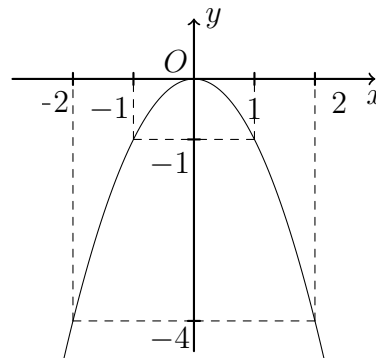
Lời giải.

- Cho một số giá trị: $x = 0 \Rightarrow y = 0; x = \pm 1 \Rightarrow y = -1; x = \pm 2 \Rightarrow y = -4$ Đồ thị

Bảng giá trị giữa x và y :

x	-2	-1	0	1	2
y	4	-1	0	-1	4

Vẽ đồ thị:



Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 = -5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$.
 Vậy, tọa độ giao điểm là $A(2; -4)$ và $B(3; -9)$.

- b) Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 = mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$ (*) Ta có: $\Delta = m^2 + 4 > 0$, với mọi m .

Do đó, đường thẳng D luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 .

Khi đó, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}.$$

Ta có: $T = x_1^2(1 + x_2) + x_2^2(1 + x_1) = (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2 - 2) = m^2 + m + 2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$, với mọi m .

$\Rightarrow T_{\min} = \frac{7}{4}$ khi $m = -\frac{1}{2}$.

□

Câu 4. Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$
 Tính $xy + yz + xz$ và xyz .

Lời giải.

Ta có $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$
 $\Rightarrow xy + yz + xz = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{36 - 14}{2} = 11$.

Ta có $(x + y + z)^3 = (x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3$
 $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + z^3$
 $= x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + 3yz(x + y + z) + 3zx(x + y + z) - 3xyz$
 $= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + xz) - 3xyz$
 $\Rightarrow xyz = \frac{x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + xz) - (x + y + z)^3}{3} = 6$.

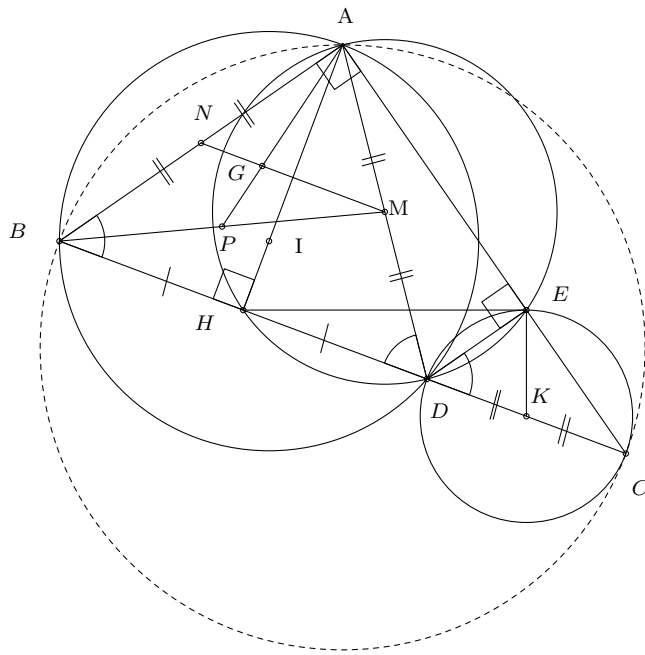
□

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BC , D là điểm đối xứng của B qua H , E là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng AC , K là trung điểm của đoạn thẳng CD . Gọi M là trung điểm của cạnh AD , G là trọng tâm của tam giác ABM , I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

- Chứng minh tứ giác $AHDE$ nội tiếp. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHDE$.
- Chứng minh HE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEC .
- Chứng minh IG vuông góc với BM .

Lời giải.

Ta có:



a) Ta có $\widehat{AHD} = \widehat{AED} = 90^\circ$ Suy ra tứ giác $AHDE$ nội tiếp.

Vì $\widehat{AHD} = 90^\circ$ và M là trung điểm của $AD \Rightarrow MA = MD = MH$ (1)

Vì $\widehat{AED} = 90^\circ$ và M là trung điểm của $AD \Rightarrow MA = MD = ME$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHDE$.

b) Vì $HB = HD$ và $AH \perp BD$ nên tam giác ABD cân tại A . Do đó $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$.

Do $AB \perp AC$ và $DE \perp AC \Rightarrow AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{EDC} = \widehat{ADB}$.

Ta có $\widehat{ECD} = 90^\circ - \widehat{EDC} = 90^\circ - \widehat{ADH}$ (3)

Do tứ giác $AHDE$ nội tiếp nên $\widehat{HED} = \widehat{HAD}$

Ta có $\widehat{HED} = \widehat{HAD} = 90^\circ - \widehat{ADH}$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{HED} = \widehat{ECD}$ nên $HE \perp EK$ nên HE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEC .

c) Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AB, BM ; G là giao điểm của AP và MN . Gọi Q là giao điểm BM và AI .

Vì G là trọng tâm tam giác ABM nên $\frac{MG}{MN} = \frac{2}{3}$ (5)

Vì Q là trọng tâm tam giác ABD nên $\frac{MQ}{MB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{MQ}{MP} = \frac{2}{3}$ (6)

Từ (5) và (6), suy ra $\frac{MG}{MN} = \frac{MQ}{MP} \Rightarrow GQ \parallel NP$ (7)

Mà $NP \parallel AM$ (do NP là đường trung bình của tam giác ABM) nên $NP \parallel AD$ (8)

Từ (7) và (8), suy ra $GQ \parallel AD$ (9)

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD nên $IM \perp AD$ (10)

Từ (9) và (10), suy ra $IM \perp GQ$ (11)

Vì $MN \parallel BD$ và $AI \perp BD$ nên $MN \perp AI \Rightarrow MN \perp IQ$ hay $MG \perp IQ$ (12).

Từ (11) và (12), suy ra Q là trực tâm của tam giác IMG .

Do đó $IG \perp MQ$ hay $IG \perp BM$ (đpcm).

□

———— HẾT ————

19 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÒA BÌNH, CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1. Giải các phương trình sau:

(a) $3x + 5 = 2x - 1$.

(b) $(x - 1)(x - 3) = 2x - 5$.

2. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{3}{3 + \sqrt{3}} + \frac{3}{3 - \sqrt{3}}$.

Lời giải.

1.

(a) $3x + 5 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x - 2x = -1 - 5 \Leftrightarrow x = -6$.

Vậy $x = -6$ là nghiệm của phương trình.

(b) $(x - 1)(x - 3) = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 2$ và $x = 4$.

2. $A = \frac{3}{3 + \sqrt{3}} + \frac{3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3(3 - \sqrt{3}) + 3(3 + \sqrt{3})}{6} = 3$.

□

Câu 2.

a) Cho đường thẳng $(d) : y = ax + b$, tìm a và b để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(4; -2)$ và song song với đường thẳng $(\Delta) : y = -x + 3$. Khi đó hãy vẽ đường thẳng (d) trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Giải hệ phương trình sau (không dùng máy tính bỏ túi): $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$.

c) Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 3)x + 2m + 14 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 12$.

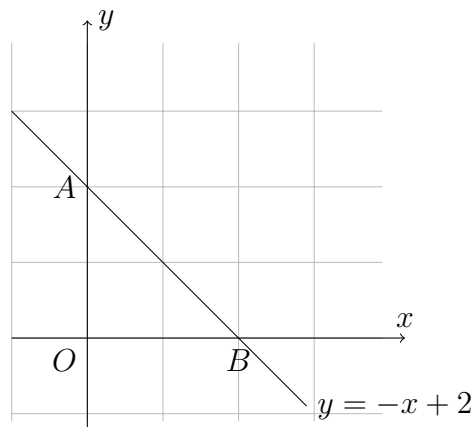
Lời giải.

a) (d) song song với (Δ) suy ra $a = -1$.

$(d) : y = -x + b$ đi qua điểm $M(4; -2)$ nên thay $x = 4; y = -2$ vào công thức ta được $-2 = -4 + b \Leftrightarrow b = 2$.

Vậy $(d) : y = -x + 2$.

Vẽ đồ thị $(d) : y = -x + 2$: Đi qua 2 điểm $A(0; 2); B(2; 0)$.



$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + 3y + 6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 5 \\ x + 3(2x + 5) + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 5 \\ 7x + 21 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 5 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ duy nhất là $(-3; -1)$.

c) Phương trình có nghiệm khi:

$$\Delta = (m + 3)^2 - (2m + 14) = m^2 + 4m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -5 \end{cases}.$$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét ta có } \begin{cases} x - 1 + x_2 = 2m + 6 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m + 14. & (2) \end{cases}$$

Mà ta lại có $2x_1 + x_2 = 12$.

Kết hợp (1) và (3) ta có $x_1 = 6 - 2m, x_2 = 4m$ thay vào (2) ta được:

$$4m^2 - 11m + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{thỏa mãn}) \\ m = \frac{7}{4} & (\text{thỏa mãn}). \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = \frac{7}{4}$.

□

Câu 3. Một người đi từ A đến B trong một khoảng thời gian và vận tốc dự định. Nếu người đó đi nhanh hơn dự định trong mỗi giờ là 9 km thì sẽ đến đích sớm hơn dự định là 1 giờ. Tính vận tốc dự định và khoảng thời gian dự định đi của người đó.

Lời giải.

Gọi vận tốc dự định là x km/h. (ĐK: $x > 6$).

Gọi thời gian dự định là y giờ. (ĐK: $y > 1$).

Quãng đường AB dài: xy km.

Nếu người đó đi nhanh hơn dự định 9 km/h thì đến đích sớm hơn 1 giờ nên ta có phương trình

$$(x + 9)(y - 1) = xy \Leftrightarrow -x + 9y = 9$$

Nếu người đó đi chậm hơn dự định 6 km/h thì đến đích sớm hơn 1 giờ nên ta có phương trình:

$$(x - 6)(y + 1) = xy \Leftrightarrow x - 6y = 6$$

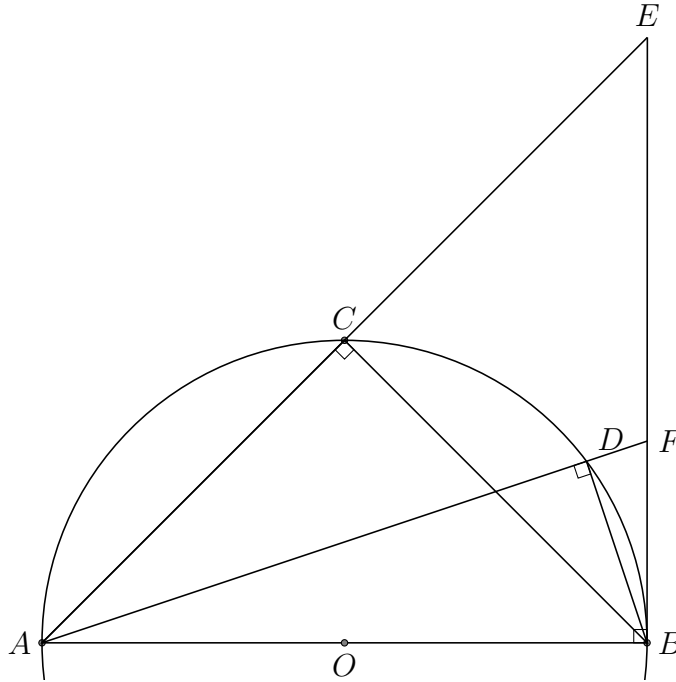
$$\text{Vậy ta có hệ: } \begin{cases} -x + 9y = 9 \\ x - 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 5 \end{cases} (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy vận tốc dự định của người đó là 36 km/h. Thời gian dự định là 5 giờ.

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ có Bx là tiếp tuyến với nửa đường tròn và C là điểm chính giữa của cung AB . Lấy điểm D tùy ý trên cung BC (D khác C, D khác B). Các tia AC, AD cắt tia Bx theo thứ tự tại E và F .

- Chứng minh rằng: $FB^2 = FD.FA$.
- Chứng minh rằng: Tứ giác $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.
- Khi AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, hãy tính diện tích của tứ giác $CDEF$ theo R .



Lời giải.

- $Bx \perp AB$ (Tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{ABF} = 90^\circ$
 mà $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (Vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BD \perp FA$.
 Trong tam giác ABF vuông tại B , có BD là đường cao, ta có: $FB^2 = FD.FA$.
- Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$ (vì là góc nội tiếp cùng chắn cung AC)
 $\widehat{FEC} = \widehat{CBA}$ (vì cùng phụ với $\widehat{EBC}$)
 $\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{CDA}$.
 $\widehat{CDA} + \widehat{CDF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CDF} + \widehat{CEF} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
- Ta có $\triangle ADC \sim \triangle AEF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{AEF}} = \left(\frac{AC}{AF}\right)^2$; $\widehat{CAB} = 45^\circ \Rightarrow AC = R\sqrt{2}$.
 $\triangle ABE$ vuông cân tại B nên $AB = BE \Rightarrow AE = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}BE = 2\sqrt{2}R$.
 AF là đường phân giác trong của tam giác ABE nên ta có
 $\frac{FE}{FB} = \frac{AE}{AB} = \sqrt{2} \Rightarrow FE = \sqrt{2}BF$ mà $BF + FE = 2R \Rightarrow BF = \frac{2R}{1 + \sqrt{2}}; FE = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$.
 $S_{AEF} = \frac{1}{2}FE.AB = \frac{2\sqrt{2}R^2}{1 + \sqrt{2}}$.
 Tính được $AF = \frac{2R\sqrt{4 + \sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{AEF}} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2(4 + 2\sqrt{2})} \Rightarrow S_{ADC} = \frac{1}{2}R^2$.
 $\Rightarrow S_{CDEF} = S_{AEF} - S_{ADC} = \frac{(3\sqrt{2} - 1)R^2}{2(1 + \sqrt{2})}$.

□

Câu 5. Cho x, y là các số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2}} \geq \frac{x + y}{2}$.

Lời giải.

$$\sqrt[3]{\frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2}} \geq \frac{x + y}{2} \Leftrightarrow \frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2} \geq \frac{(x + y)^3}{8}.$$

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \Rightarrow x^4 + y^4 \geq \frac{(x + y)^4}{8} \Rightarrow \frac{x^4 + y^4}{x + y} \geq \frac{(x + y)^3}{8} (x + y > 0). \quad (1)$$

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} & (x^5 + y^5)(x + y) - (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = x^5y + y^5x - x^4y^2 - y^4x^2 \\ & = xy(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) = xy(x - y)^2 \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geq 0, \forall x, y > 0 \\ & \Rightarrow \frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2} \geq \frac{x^4 + y^4}{x + y}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1); (2)} \Rightarrow \frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2} \geq \frac{(x + y)^3}{8}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = y. \quad \square$$

————— **HẾT** —————

20 ĐỀ THI VÀO 10, THPT CHUYÊN TP HỒ CHÍ MINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Cho hai số thực a, b sao cho $|a| \neq |b|$ và $ab \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{a^2-ab} = \frac{3a-b}{a^2-b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a^3 + 2a^2b + 3b^3}{2a^3 + ab^2 + b^3}$.

- b) Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $5m + n$ chia hết cho $5n + m$. Chứng minh rằng m chia hết cho n .

Lời giải.

- a) Điều kiện đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{a(a+b)(a-b)} + \frac{(a+b)^2}{a(a+b)(a-b)} &= \frac{a(3a-b)}{a(a+b)(a-b)} \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a+b)^2 &= a(3a-b) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 = 3a^2 - ab \\ \Leftrightarrow a^2 - ab - 2b^2 &= 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 - 2\frac{b}{a} = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Đặt $t = \frac{a}{b}$. Thay vào (*), ta được:

$$t - 1 - \frac{2}{t} = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2. \end{cases}$$

Nếu $t = -1$ thì $a = -b$, loại. Vậy $t = 2$ hay $\frac{a}{b} = 2$. Khi đó:

$$P = \frac{a^3 + 2a^2b + 3b^3}{2a^3 + ab^2 + b^3} = \frac{\frac{a^3}{b^3} + 2\frac{a^2}{b^2} + 3}{2\frac{a^3}{b^3} + \frac{a}{b} + 1} = \frac{t^3 + 2t^2 + 3}{2t^3 + t + 1} = \frac{19}{19} = 1.$$

- b) Ta có:

$$\begin{aligned} 5m + n &: 5n + m \\ \Leftrightarrow 5m + n &= (5n + m)a \quad (\text{với } a \in \mathbb{N}^*) \\ \Leftrightarrow 5m + n &= 5na + ma \\ \Leftrightarrow 5m - am &= 5na - n \\ \Leftrightarrow m(5 - a) &= n(5a - 1). \end{aligned} \quad (i)$$

Do m, n, a là những số nguyên dương nên

$$n(5a - 1) > 0 \Rightarrow 5 - a > 0 \Rightarrow a < 5 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

- Khi $a = 1$, thay vào (i) ta được $4m = 4n \Rightarrow m = n \Rightarrow m : n$.
- Khi $a = 2$, thay vào (i) ta được $3m = 9n \Rightarrow m = 3n \Rightarrow m : n$.
- Khi $a = 3$, thay vào (i) ta được $2m = 14n \Rightarrow m = 7n \Rightarrow m : n$.
- Khi $a = 4$, thay vào (i) ta được $m = 19n \Rightarrow m : n$.

Vậy ta luôn có m chia hết cho n , điều phải chứng minh. □

Câu 2.

- a) Giải phương trình $x^2 - 6x + 4 + 2\sqrt{2x-1} = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9(x+y) \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Điều kiện $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= 2x - 2\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{2x-1} - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{2x-1} - 1 \\ x-2 = 1 - \sqrt{2x-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2x-1} \\ 3-x = \sqrt{2x-1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^2 = 2x-1 \\ x \leq 3 \\ (3-x)^2 = 2x-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 10 = 0 \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 4 - \sqrt{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 2 + \sqrt{2}, x = 4 - \sqrt{6}$.

- b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9(x+y) & (1) \\ x^2 - y^2 = 3. & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $x - y \neq 0$ và $x + y \neq 0$. Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 9(x+y) & (3) \\ (x-y)(x+y) = 3. & (4) \end{cases}$$

Từ đây ta "đẳng cấp hóa" bằng cách thay (4) vào (3):

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2 + xy + y^2) &= 3(x-y)(x+y)(x+y) \\ \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 &= 3(x+y)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 5xy = 0 \\ \Leftrightarrow 2\frac{x^2}{y^2} + 5\frac{x}{y} + 2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = -2y. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi $x = -2y$, thay vào (2), ta được: $3y^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1. \end{cases}$

Khi $y = -2x$, thay vào (2), ta được: $-3x^2 = 3$. Phương trình này vô nghiệm.

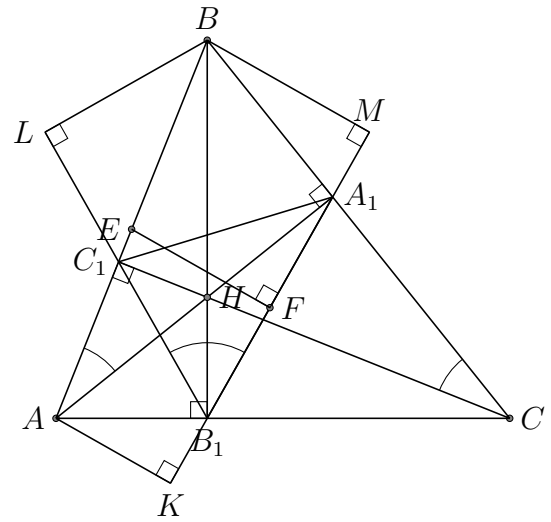
Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(2; -1), (-2; 1)$.

□

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 . Gọi K là hình chiếu của A trên A_1B_1 ; L là hình chiếu của B trên B_1C_1 . Chứng minh rằng $A_1K = B_1L$.

Lời giải.

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Ta có tứ giác AB_1HC_1 nội tiếp, suy ra $\widehat{HB_1C_1} = \widehat{HAC_1}$. (1)
 Tứ giác CA_1HB_1 nội tiếp nên $\widehat{HB_1A_1} = \widehat{HCA_1}$. (2)
 Tứ giác AC_1A_1C nội tiếp nên $\widehat{HAC_1} = \widehat{HCA_1}$. (3)
 Từ (1), (2) và (3) suy ra tia B_1H là tia phân giác của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$. Kẻ BM vuông góc với đường thẳng B_1A_1 tại M . Ta có $B_1L = B_1M$. (4)
 Mặt khác tứ giác AB_1A_1B nội tiếp đường tròn đường kính AB , tâm là trung điểm E của AB . Gọi F là trung điểm của A_1B_1 thì EF vuông góc với A_1B_1 . (5).



Mặt khác, AK song song với BM nên $ABMK$ là hình thang. Do đó $EF \parallel AK \parallel BM$. Suy ra EF là đường trung bình của hình thang $ABMK$, do đó $FM = FK$. (6)

Từ (5), (6) suy ra $B_1M = A_1K$. (7)

Từ (4), (7) suy ra $B_1L = A_1K$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Câu 4. Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + y} - \frac{x + y}{2} \leq \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x + y} \leq \frac{1}{2}$. Do đó:

$$\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + y} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x + y} \leq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}. \quad (1)$$

Lại có:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2(x + y) \Rightarrow -\frac{x + y}{2} \leq -\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4}. \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + y} - \frac{x + y}{2} &\leq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} \\ &= \frac{2t - t^2}{4} = \frac{-(t - 1)^2 + 1}{4} \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Câu 5. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có AC cắt BD tại E . Tia AD cắt BC tại F . Dựng hình bình hành $AEBG$.

a) Chứng minh rằng $FD \cdot FG = FB \cdot FE$.

b) Gọi H là điểm đối xứng của E qua AD . Chứng minh bốn điểm F, H, A, G cùng thuộc một đường tròn.

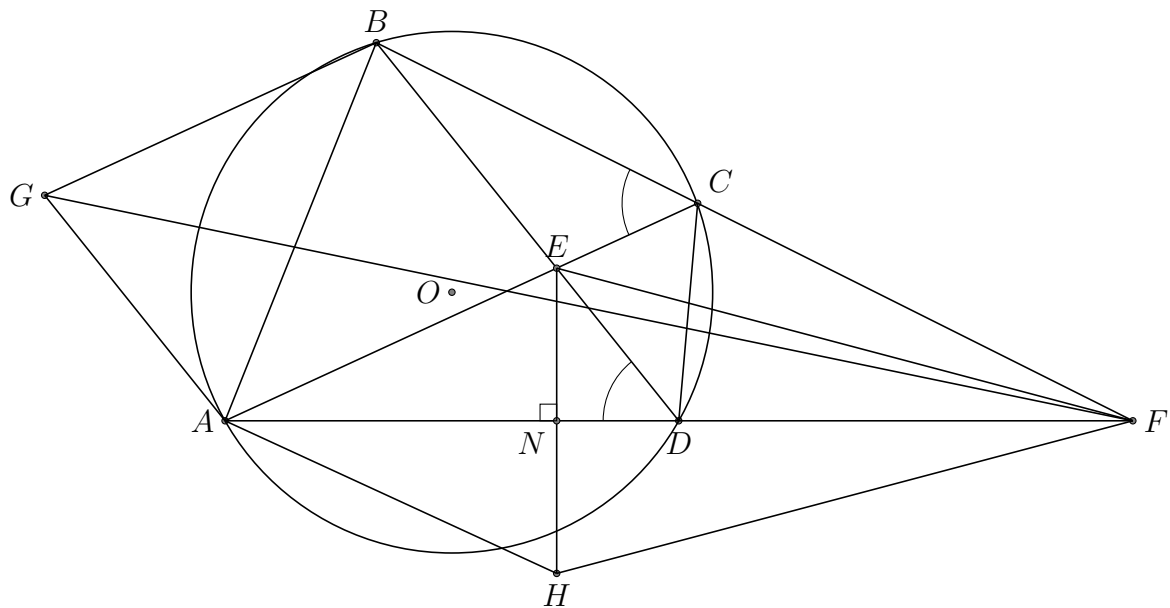
Lời giải.

Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. (1)

Ta có $AG \parallel BD$, suy ra $\widehat{ADB} + \widehat{FAG} = 180^\circ$. (2)

Ta có $\widehat{ACB} + \widehat{FCE} = 180^\circ$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FCE} = \widehat{FAG}$. (*)



Từ (7), (8), (9) suy ra $\widehat{AHF} + \widehat{AGF} = 180^\circ$. Do đó tứ giác $AHFG$ nội tiếp.

☐☐

— HẾT —

21 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN, VÒNG 2, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Không sử dụng máy tính:

- a) Tính tổng $S = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots - 2014^2 + 2015^2$.
 b) Tính giá trị của biểu thức $P = (5x^3 - 30x + 21)^{2016}$ với $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

- a) Ta có:

$$\begin{aligned} S &= 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots - 2014^2 + 2015^2 \\ &= 1 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + \dots + (2015^2 - 2014^2) \\ &= 1 + (3 - 2)(2 + 3) + (5 - 4)(4 + 5) + \dots + (2015 - 2014)(2014 + 2015) \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 2014 + 2015 \\ &= \frac{(1 + 2015) \cdot 2015}{2} = 2031120. \end{aligned}$$

Vậy $S = 2031120$.

- b) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} &= \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1; \\ \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} &= \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Do đó $x = (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) = 2$.

Như vậy $P = (5 \cdot 2^3 - 30 \cdot 2 + 21)^{2016} = 1^{2016} = 1$.

□

Câu 2.

- a) Tìm các số nguyên x, y sao cho $x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y$.
 b) Chứng minh rằng $(2^{2m+1} + 5^{2n})$ chia hết cho 3, với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} x^3y - x^3 - 1 &= 2x^2 + 2x + y \\ \Leftrightarrow (x^3 - 1)y &= x^3 + 1 + 2x(x + 1) \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1)y &= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1) \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1)y &= (x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{Vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{Z} \text{ nên } (1) \Leftrightarrow (x - 1)y = x + 1. \tag{2}$$

Ta thấy $x = 1$ không thỏa phương trình (2). Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq 1$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Ta có $y \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $(x - 1)$ là ước của 2. Do đó $x - 1 = 2$ hoặc $x - 1 = -2$ hoặc $x - 1 = 1$ hoặc $x - 1 = -1$. Như vậy $x = 3$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 0$. Vậy các

cặp $(x; y)$ với x, y là những số nguyên cần tìm là $(0; -1), (-1; 0), (2; 3), (3; 2)$.

- b) Ta có $2^{2m+1} = 2 \cdot 2^{2m} = 2 \cdot 4^m = 2(3+1)^m = 2(3k+1) = 6k+2, k \in \mathbb{N}^*$ Suy ra 2^{2m+1} chia cho 3 dư 2, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$. (1)

Mặt khác $5^{2n} = 25^n = (24+1)^n = (3 \cdot 8 + 1)^n = 3p+1, p \in \mathbb{N}^*$. Suy ra 5^{2n} chia cho 3 dư 1, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $(2^{2m+1} + 5^{2n})$ chia hết cho 3.

□

Câu 3.

- a) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2 \leq x_1 < x_2 \leq 5$.
- b) Giải phương trình: $2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}} = x$.

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 < x_2$ là:

$$x_1 = \frac{2m+1-1}{2} = m, x_2 = \frac{2m+1+1}{2} = m+1.$$

Từ giả thiết bài toán suy ra $2 \leq m < m+1 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$.

Vậy $2 \leq m \leq 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- b) Phương trình đã cho trở thành :

$$\sqrt{2 + \sqrt{x}} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2 + \sqrt{x} = x^2 - 4x + 4. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow x^2 - 4x - (\sqrt{x} - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-4) - \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4) \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Vì $x \geq 2$ nên $x - \frac{1}{\sqrt{x}+2} > 0$. Do đó (3) $\Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

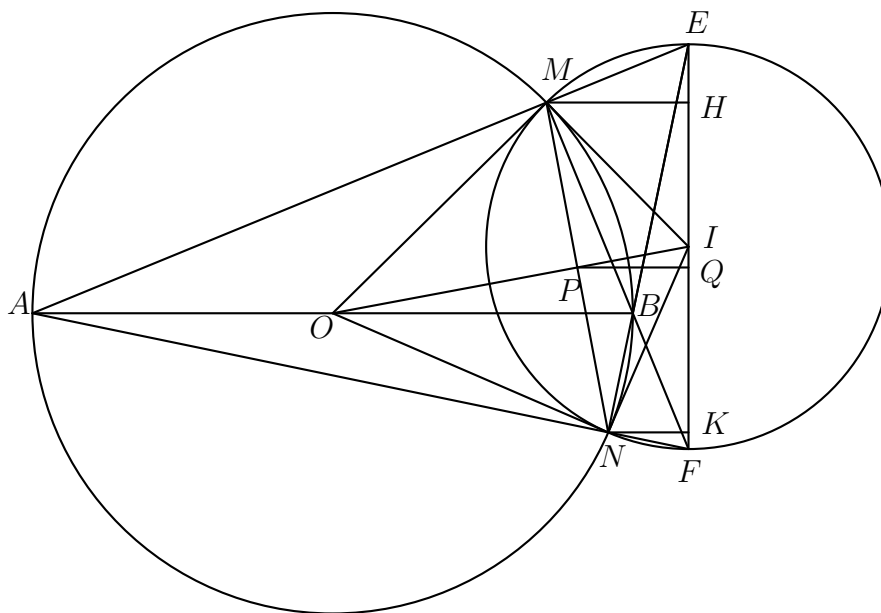
□

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB cố định. M và N là hai điểm thay đổi trên đường tròn sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$ (M, N nằm về hai phía của AB). Đường thẳng MB cắt tia AN tại F , đường thẳng NB cắt tia AM tại E . Gọi I là trung điểm của EF .

- a) Chứng minh tứ giác $MNFE$ nội tiếp một đường tròn.
- b) Tính $OI \cdot EF$ theo R .
- c) Giả sử diện tích của tứ giác $MNFE$ là S . Tìm giá trị lớn nhất của S theo R .

Lời giải.

- a) M và N thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{EMF} = \widehat{FNE} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn đường kính EF .



- $$\widehat{AEN} = 90^\circ - \widehat{EAN} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Tam giác MOI có $\widehat{MOI} + \widehat{MIO} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OMI} = 90^\circ$.

Тако: $OI = \sqrt{MO^2 + MI^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = EF$.

c) Đặt $S_1; S_2; S_3$ theo thứ tự là diện tích các tam giác IMN , IME và INF . Gọi P là giao điểm của MN và OI thì $OP \perp MN$. Tam giác MON là tam giác đều (vì có $OM = ON = R$ và $\widehat{MON} = 60^\circ$), suy ra $MN = R$. Tam giác MIP vuông tại P và $\widehat{MIP} = 60^\circ$, suy ra:

$$IP = \frac{1}{2}IM = \frac{R}{2\sqrt{3}}.$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot IP \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot R = \frac{R^2}{4\sqrt{3}}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot IE \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot MH = \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot MH$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot IF \cdot NK = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot NK = \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot NK.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 = \frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot MH + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot NK \\ &= \frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot (MH + NK). \end{aligned}$$

Do R không đổi nên S lớn nhất khi $MH + NK$ lớn nhất. Kẻ $PQ \perp EF$ (Q thuộc EF). Ta có $MH \parallel NK$ (cùng vuông góc với EF) nên $MHKN$ là hình thang. Từ $PQ \perp EF$ suy ra $PQ \parallel MH$. Mà P là trung điểm của MN nên PQ là đường trung bình của hình thang $MHKN$. Suy ra $MH + NK = 2PQ$. Tam giác IPQ vuông tại Q nên $PQ \leq PI = \frac{R}{2\sqrt{3}}$. Xảy ra đẳng thức khi $PI \perp EF$ hay $OI \perp EF$. Mặt khác FM và EN là các đường cao của tam giác AEF nên B là trực tâm, suy ra $AB \perp EF$, suy ra A, I, B thẳng hàng hay AB là phân giác của góc $\widehat{MAN}$. Vậy khi AB là phân giác của góc $\widehat{MAN}$ thì S đạt giá trị lớn nhất là:

$$\frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot IP = \frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{R}{2\sqrt{3}} = \frac{R^2}{4\sqrt{3}} + \frac{R^2}{6} = \frac{2 + \sqrt{3}}{12} \cdot R^2.$$

□

Câu 5. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn: $a + b = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{b+2a}} \geq 2.$$

Lời giải.

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, với mọi $x > 0, y > 0$, ta có:

$$(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 2\sqrt{xy} \cdot \frac{2}{\sqrt{xy}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{b+2a}} \geq \frac{4}{\sqrt{a+2b} + \sqrt{b+2a}}. \quad (1)$$

$$\text{Mà } \sqrt{(a+2b) \cdot 1} \leq \frac{a+2b+1}{2}; \quad \sqrt{b+2a} \leq \frac{b+2a+1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{a+2b} + \sqrt{b+2a} \leq \frac{1}{2} (3(a+b) + 2) = 2. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \frac{1}{\sqrt{a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{b+2a}} \geq 2.$$

Đấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} a+b = \frac{2}{3} \\ a+2b = b+2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{3}.$$

□

————— **HẾT** —————

22 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, SỞ GIÁO DỤC PHÚ THỌ

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. (2,0 điểm)

a Cho các số a, b thỏa mãn $2a^2 + 11ab - 3b^2 = 0, b \neq 2a, b \neq -2a$. Tính giá trị biểu thức

$$T = \frac{a - 2b}{2a - b} + \frac{2a - 3b}{2a + b}.$$

b Cho các số nguyên dương x, y, z và biểu thức

$$P = \frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz}$$

Chứng minh rằng P là số nguyên chia hết cho 6.

Lời giải.

a) Ta có

$$T = \frac{(a - 2b)(2a + b) + (2a - 3b)(2a - b)}{(2a - b)(2a + b)} = \frac{6a^2 - 11ab + b^2}{4a^2 - b^2}$$

Từ giả thiết suy ra $11ab = 3b^2 - 2a^2$, thay vào T ta được:

$$T = \frac{6a^2 + 2a^2 - 3b^2 + b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{2(4a^2 - b^2)}{4a^2 - b^2} = 2.$$

b) Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Suy ra nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Vì $(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) + (z^2 - x^2) = 0$ nên theo trên ta có:

$$(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 = 3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) \quad (1)$$

$$\text{và } x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz = x^2y + xy^2 + z^2(x + y) + (2xyz + y^2z + x^2z)$$

$$= xy(x + y) + z^2(x + y) + z(x + y)^2 = (x + y)(xy + z^2 + zx + zy)$$

$$= (x + y)(y + z)(z + x). \quad (2)$$

Thay (1) và (2) vào P ta được:

$$P = \frac{3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)}{(x + y)(y + z)(z + x)} = 3(x - y)(y - z)(z - x) \in \mathbb{Z}.$$

Trong ba số nguyên x, y, z luôn có hai số cùng tính chẵn lẻ, giả sử đó là $x, y \Rightarrow (x - y):2$. Do đó $P:6$.

□

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^3 + 2x^2y + x^2 + 2xy = x + 10$.

b) Cho 19 điểm phân biệt nằm trong một tam giác đều có cạnh bằng 3, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 19 điểm đã cho mà có diện tích không lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$2x^3 + 2x^2y + x^2 + 2xy = x + 10 \Leftrightarrow 2x^2(x + y) + 2x(x + y) - (x^2 + x) = 10$$

$$\Leftrightarrow 2(x + y)(x^2 + x) - (x^2 + x) = 10 \Leftrightarrow (x^2 + x)(2(x + y) - 1) = 10. \quad (1)$$

Mà $x^2 + x = x(x+1)$ là số chẵn; $2(x+y)-1$ là số lẻ và $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > -1 \Rightarrow x^2 + x \geq 0$ (vì $x \in \mathbb{Z}$)

Do đó từ (1) ta có $\begin{cases} x^2 + x = 10 \\ 2(x+y) - 1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ 2(x+y) - 1 = 5 \end{cases}$.

Trường hợp $\begin{cases} x^2 + x = 10 \\ 2(x+y) - 1 = 1 \end{cases}$. Phương trình $x^2 + x = 10$ không có nghiệm nguyên.

Trường hợp $\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ 2(x+y) - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \end{cases}$.

Vậy có hai bộ số $(x; y)$ thỏa mãn là: $(1; 2), (-2; 5)$.

b) Chia tam giác đều ABC thành 9 tam giác đều, có cạnh bằng 1.

Suy ra mỗi tam giác nhỏ có diện tích là $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vì có 19 điểm nằm trong 9 tam giác nhỏ nên có ít nhất 3 điểm cùng thuộc một hình tam giác nhỏ. Giả sử ba điểm đó là M, N, P .

Khi đó tam giác MNP nằm trong một tam giác nhỏ nên $S_{\triangle MNP} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$.

□

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + 6 = 0 \\ x^2 + 3x + y = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x \geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= 2 + \sqrt{x-3} \Leftrightarrow 2x+1 = 4 + x - 3 + 4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-3} = x \\ \Leftrightarrow 16(x-3) &= x^2 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 12 \end{cases}. \end{aligned}$$

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện.

b) $\begin{cases} 2x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + 6 = 0 \\ x^2 + 3x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x)(2x + y) = -6 \\ (x^2 + x) + (2x + y) = 1 \end{cases}$.

Đặt $u = x^2 + x; v = 2x + y$.

$$\text{Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} uv = -6 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3 \\ v = -2 \end{cases} \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$. Hệ này vô nghiệm.

$$\text{Với } \begin{cases} u = 3 \\ v = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 3 \\ 2x + y = -2 \end{cases}.$$

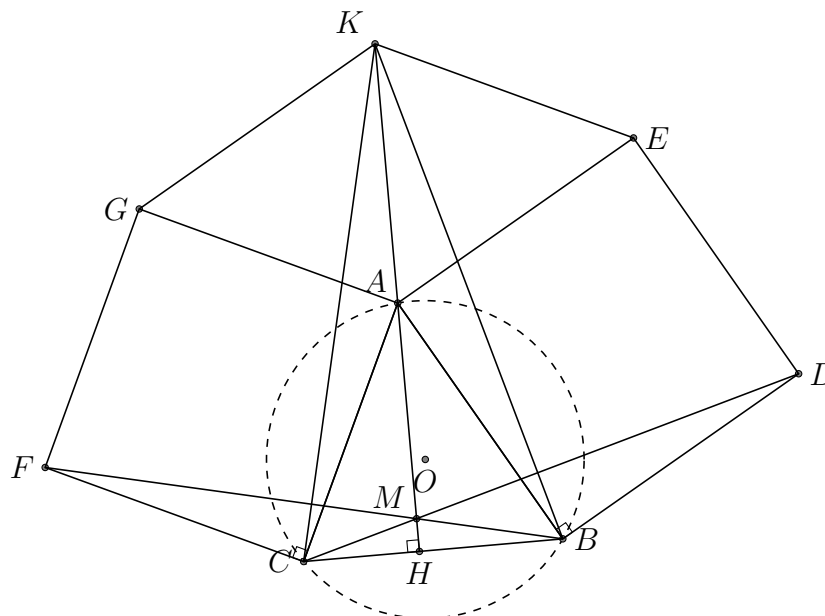
$$\text{Giải hệ này được hai nghiệm } \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \\ y = \sqrt{13} - 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ y = -\sqrt{13} - 1 \end{cases}.$$

□

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABDE$, $ACFG$ và hình bình hành $AEKG$.

- Chứng minh rằng $AK = BC$ và $AK \perp BC$.
- DC cắt BF tại M . Chứng minh rằng A, K, M thẳng hàng.
- Chứng minh rằng khi A thay đổi trên cung lớn BC của $(O; R)$ thì K luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.



a. Ta có $\widehat{KEA} + \widehat{EAG} = 180^\circ$, $\widehat{BAC} + \widehat{EAG} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KEA} = \widehat{BAC}$.

Lại có $EK = AG = AC$; $EA = AB \Rightarrow \triangle AEK = \triangle BAC \Rightarrow AK = BC$.

Ta có $\triangle AEK = \triangle BAC \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{ABC}$. Gọi H là giao điểm của KA và BC , ta có:

$\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = \widehat{BAH} + \widehat{EAK} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$. Vậy $AK \perp BC$.

b. Vì $\widehat{KAC} = \widehat{KAG} + 90^\circ$; $\widehat{BCF} = \widehat{ACB} + 90^\circ$ mà $\widehat{KAG} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{BCF}$.

Vì $KA = BC$; $AC = CF$; $\widehat{KAC} = \widehat{BCF} \Rightarrow \triangle KAC = \triangle BCF \Rightarrow \widehat{CKH} = \widehat{FBC}$.

Ta lại có $\widehat{CKH} + \widehat{KCH} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp KC$. (1)

Tương tự, ta có $KB \perp CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là trực tâm của $\triangle KBC$, suy ra $M \in KH$. Vậy A, K, M thẳng hàng.

c. Dựng hình vuông $BCC'B'$ trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa cung lớn BC , suy ra $B'C'$ cố định.

Ta có $AKB'B$ là hình bình hành (vì BB', KA cùng vuông góc BC suy ra $BB' \parallel KA$; $BB' = KA = BC$). Do đó $B'K \parallel BA \Rightarrow \widehat{B'KA} = \widehat{BAH}$.

Tương tự, ta có $AKC'C$ là hình bình hành, suy ra $KC' \parallel AC \Rightarrow \widehat{AKC'} = \widehat{HAC}$.

Suy ra $\widehat{B'KC'} = \widehat{B'KA} + \widehat{AKC'} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC} = \widehat{BAC}$. Vì khi A thay đổi trên cung lớn BC của đường tròn $(O; R)$ thì K luôn nhìn đoạn $B'C'$ cố định một góc không đổi $\alpha = \widehat{BAC}$. Do đó K thuộc quỹ tích cung chứa góc α dựng trên đoạn $B'C'$ cố định. $\square$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số dương x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{(x+2y)^3+1}-1} + \frac{(2x+y)(x+2y)}{4} - \frac{8}{3(x+y)}$$

Lời giải.

Đặt $2x+y=a; 2y+x=b; a, b > 0$ thì $P = \frac{2}{\sqrt{a^3+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{b^3+1}-1} + \frac{ab}{4} - \frac{8}{a+b}$

Ta có $\sqrt{a^3+1} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \leq \frac{a+1+a^2-a+1}{2} = \frac{a^2+2}{2} \Rightarrow \sqrt{a^3+1}-1 \leq \frac{a^2}{2}$.

Tương tự $\sqrt{b^3+1}-1 \leq \frac{b^2}{2}$.

Mặt khác $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow -\frac{8}{a+b} \geq -\frac{2}{a} - \frac{2}{b}$.

Vậy $P \geq \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{ab}{4} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} = \left(\frac{4}{a^2} + 1\right) + \left(\frac{4}{b^2} + 1\right) + \frac{ab}{4} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - 2 \geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{ab}{4} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b}$

Hay $P \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{ab}{4} - 2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{ab}{4}} - 2 = 1$.

Do đó $\min P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = a^2 - a + 1 \\ b+1 = b^2 - b + 1 \\ \frac{4}{a^2} = \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{2}{a} = \frac{2}{b} = \frac{ab}{4} \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}.$ $\square$

———— HẾT ————

23 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HƯNG YÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $A = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} = -\sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = -1$. $\square$

Câu 2. Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = mx - m + 2$ (m là tham số).

- Với $m = 2$. Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) .
- Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 đều lớn hơn $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

- Với $m = 2$ ta có $(d) : y = 2x$.

Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình: $x^2 = 2x$.

+ Với $x = 0$ thì tọa độ giao điểm là $(0; 0)$.

+ Với $x = 2$ thì tọa độ giao điểm là $(2; 4)$.

- Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình:

$$x^2 = mx - m \Leftrightarrow x^2 - mx + m = 0(1).$$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ PT (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 8 > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2 + 4 > 0 \text{ đúng với mọi } m.$$

Theo định lý Viét $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 > \frac{1}{2} \\ x_2 > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) > 0 \\ \left(x_1 - \frac{1}{2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} > 0 \\ x_1 + x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{7}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}.$$

$\square$

Câu 3.

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y^2 = x + 1 \end{cases}$.

- Giải phương trình $\sqrt{x + 3} = 4x^2 + 5x - 1$.

Lời giải.

- Trừ theo vế PT thứ nhất cho PT thứ hai của hệ ta được:

$$x^2 - y^2 = y - x \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0.$$

Hệ phương trình có 4 nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right);$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); (-1; 0) \text{ và } (0; -1).$$

b) Điều kiện: $x \geq -3$ PT $\Leftrightarrow x + 3 + \sqrt{x+3} + \frac{1}{4} = 4x^2 + 6x + \frac{9}{4}$
 $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2$.

Trường hợp 1: $\sqrt{x+3} + \frac{1}{2} = 2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}.$$

Trường hợp 2: $\sqrt{x+3} + \frac{1}{2} = -2x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = -2x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ 4x^2 + 7x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{8}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}, x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{8}$.

□

Câu 4. Hai người thợ cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong vòng 4 giờ. Nếu mỗi người làm riêng, để hoàn thành công việc thì thời gian người thứ nhất ít hơn người thứ hai là 6 giờ. Hỏi làm riêng thì mỗi người làm trong bao lâu để hoàn thành công việc.

Lời giải.

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là $x(h)$ với $x > 4$.

Khi đó thời gian người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là $x + 6(h)$.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là $6(h)$;

Thời gian người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là $12(h)$.

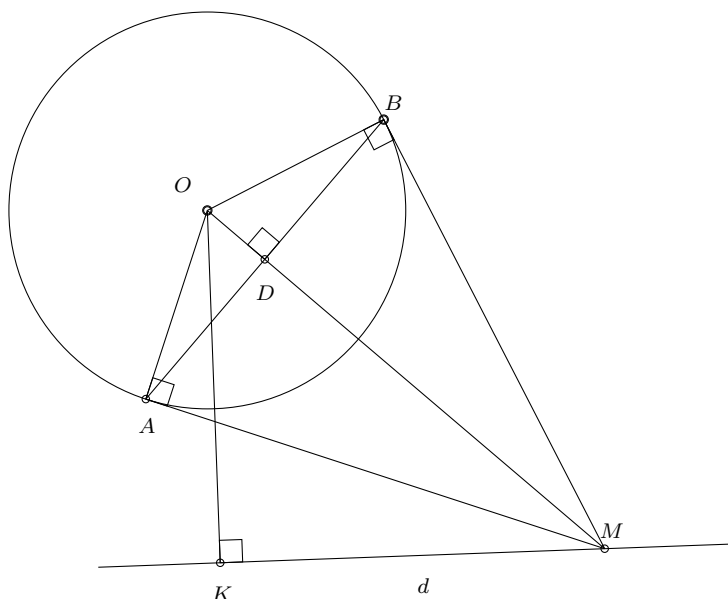
□

Câu 5. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d cố định, khoảng cách từ O đến đường thẳng d là $2R$. Điểm M thuộc đường thẳng d , qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh các điểm O, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm của d với đường tròn (O) . Chứng minh D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM .

c) Điểm M di động trên đường thẳng d . Xác định vị trí điểm M sao cho diện tích tam giác AMB đạt giá trị nhỏ nhất.



$$= \frac{1}{\frac{a^4}{bc} + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{\frac{2a^4}{b^2 + c^2} + b^2 + c^2} = \frac{b^2 + c^2}{2a^4 + (b^2 + c^2)^2}.$$

Ta lại có: $2a^4 + (b^2 + c^2)^2 \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2$ (dùng định nghĩa hoặc biến đổi tương đương)

$$\Rightarrow \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} \leq \frac{3(b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \quad (1).$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} \leq \frac{3(c^2 + a^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \quad (2).$$

$$\frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3(a^2 + b^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có: } \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

————— HẾT —————

24 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HƯNG YÊN VÒNG 2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Đặt $a = \sqrt{2}, b = \sqrt[3]{2}$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{b} = a + b + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1.$$

b) Cho $x = \sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1} + 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^3 - 6x^2 + 21x + 2016$.

Lời giải.

a) Ta có: $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{b} = a + b + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \Leftrightarrow (a-b) \left(\frac{1}{b} + a + b + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \right) = 1.$

$$VT = \frac{a}{b} - 1 + a^2 - b^2 + \frac{a^2}{b} - a + b - \frac{b^2}{a} + a - b = \frac{a}{b} - \frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} - b^2 + a^2 - 1.$$

$$\text{Với } a = \sqrt{2}, b = \sqrt[3]{2}, \text{ ta thấy } \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b^2}{a} \\ \frac{a^2}{b} = b^2 \end{cases} \Rightarrow VT = a^2 - 1 = 2 - 1 = 1 = VP(\text{đpcm}).$$

b) Ta thấy:

$$\begin{aligned} x - 2 &= \sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1} \\ \Leftrightarrow (x-2)^3 &= (\sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1})^3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= \sqrt{28} + 1 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{28}+1)(\sqrt{28}-1)}(\sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1}) - \sqrt{28} + 1. \\ \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= 2 - 9(x-2) \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 21x &= 28. \\ \Rightarrow P &= 2044. \end{aligned}$$

□

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho ba đường thẳng:

$$(d_1) : y = -3x + 3; (d_2) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}; (d_3) : y = -ax + a^3 - a^2 - \frac{1}{3}.$$

Tìm a để ba đường thẳng đồng quy.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y, z) của phương trình

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2015$$

thỏa mãn $x \geq y \geq z \geq 8$.

Lời giải.

a) Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) , khi đó hoành độ của điểm A là nghiệm của phương trình

$$-3x + 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

Suy ra $y_A = 0$. Vậy $A(1; 0)$. Để ba đường thẳng đồng quy thì điểm $A(1, 0) \in (d_3)$. Khi đó

$$\begin{aligned} -a + a^3 - a^2 - \frac{1}{3} &= 0 \Leftrightarrow 4a^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \\ \Leftrightarrow 4a^3 &= (a+1)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4a} = a+1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}. \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} xyz + xy + yz + zx + x + y + z &= 2015 \\ \Leftrightarrow xy(z+1) + y(z+1) + x(z+1) + z+1 &= 2016 \\ \Leftrightarrow (z+1)(xy + y + x + 1) &= 2016 \\ \Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1) &= 16.14.9. \end{aligned}$$

Do $x \geq y \geq z \geq 8$ nên (x, y, z) cần tìm là $(15, 13, 8)$.

□

Câu 3.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -y^3 \end{cases}$.
- b) Giải phương trình $(\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x+2})(1 + \sqrt{4x^2 + 14x + 10}) = 3$.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{2x}{x^2+1} \\ y^3 = -2(x-1)^2 - 1 \end{cases}$.

Ta thấy $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$. (1)

Mặt khác $-2(x-1)^2 - 1 \leq -1 \Rightarrow y^3 \leq -1 \Rightarrow y \leq -1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y = -1 \Rightarrow x = 1$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; -1)$.

- b) Điều kiện: $x \geq -1$. Đặt $u = \sqrt{2x+5}$, $v = \sqrt{2x+2}$ ($u, v \geq 0$). Khi đó:

$$\begin{aligned} (u-v)(1+uv) &= 3 \text{ và } u^2 - v^2 = 3 \\ \Rightarrow (u-v)(1+uv) &= u^2 - v^2 \Leftrightarrow (u-v)(1-u)(1-v) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=0 \\ 1-u=0 \\ 1-v=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi $u-v=0 \Rightarrow \sqrt{2x+5} = \sqrt{2x+2} \Rightarrow 2x+5 = 2x+2$ (vô nghiệm).

Khi $1-u=0 \Rightarrow \sqrt{2x+5} = 1 \Rightarrow x = -2$ (loại).

Khi $1-v=0 \Rightarrow \sqrt{2x+2} = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{1}{2}$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 1\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính thể tích của hình tạo được khi cho tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh BC .

Lời giải.

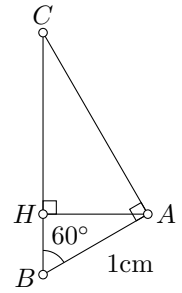
Gọi H là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC .

Khi đó AH đường cao của $\triangle ABC$.

Ta có $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm và $BC = 2$ cm.

Vậy thể tích của khối tròn xoay sẽ là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot BC \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{\pi}{2} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



□

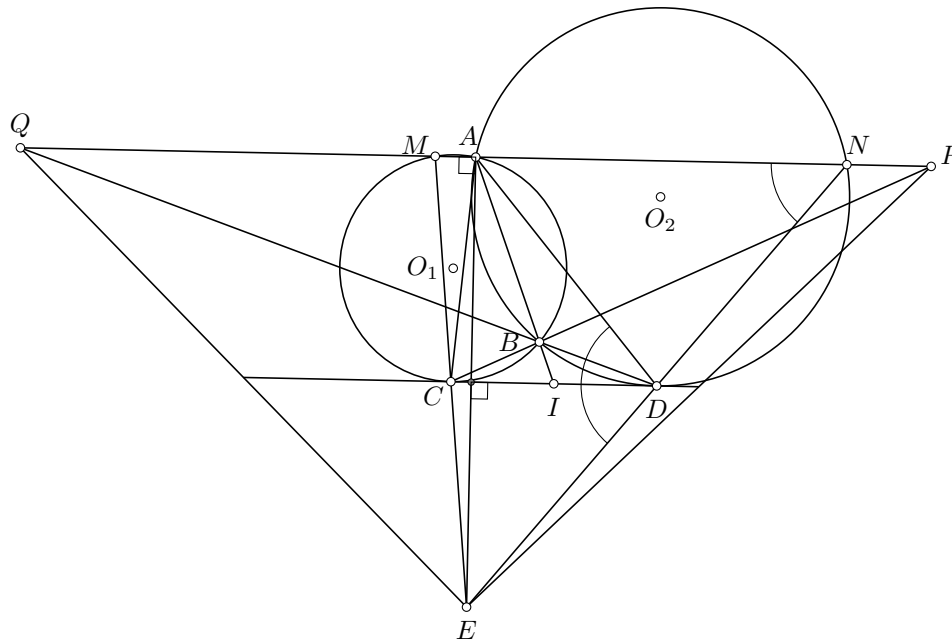
Câu 5. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B . Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại C và D . Qua A kẻ đường thẳng song song với CD , lần lượt cắt (O_1) và (O_2) tại M và N . Các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E . Gọi P là giao điểm của BC với MN , gọi Q là giao điểm của BD với MN . Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD .

b) $\frac{BD}{BQ} + \frac{BC}{BP} = \frac{MN}{PQ}$.

c) Tam giác EPQ là tam giác cân.

Lời giải.



a) Do $MN \parallel CD$ nên $\widehat{EDC} = \widehat{ENA}$.

Mặt khác $\widehat{CDA} = \widehat{DNA}$ (cùng chắn $\widehat{DA}$).

Suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{CDA}$ hay DC là đường phân giác của $\widehat{EDA}$.

Tương tự, CD cũng là đường phân giác của $\widehat{ACE}$.

Từ đó $\triangle ACD = \triangle ECD$ (g.c.g).

Suy ra $DA = DE \Rightarrow \triangle DAE$ cân tại D , từ đó $AE \perp CD$.

b) Ta có CD là đường trung trực của AE và $CD \parallel MN$, suy ra CD là đường trung bình của $\triangle MNE$, từ đó $CD = \frac{1}{2}MN$. Ta lại có $CD \parallel PQ$, suy ra

$$\frac{BC}{BP} = \frac{BD}{BQ} = \frac{CD}{PQ} \Rightarrow \frac{BC}{BP} + \frac{BD}{BQ} = \frac{2CD}{PQ} = \frac{MN}{PQ}.$$

c) Do $PQ \parallel CD$ nên $AE \perp PQ$. (1)

Gọi $I = AB \cap CD$.

Xét $\triangle AID$ và $\triangle DIB$ có

$$\begin{cases} \widehat{I} \text{ chung,} \\ \widehat{IAD} = \widehat{IDB} \quad (\text{cung chắn } \widehat{DB}) \end{cases} \Rightarrow \triangle AID \sim \triangle DIB(\text{g.g}).$$

$$\text{Suy ra } \frac{ID}{IA} = \frac{IB}{ID} \Rightarrow ID^2 = IA \cdot IB.$$

Tương tự ta cũng có: $IC^2 = IA \cdot IB$.

$$\text{Như vậy } IC^2 = ID^2 \Rightarrow IC = ID.$$

$$\text{Mà } CD \parallel PQ \text{ nên theo định lí Ta-lét ta có: } \frac{ID}{AQ} = \frac{IB}{AB} = \frac{IC}{AP} \Rightarrow AP = AQ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EQP$ cân tại E .

□

Câu 6. Trong hình vuông cạnh 10cm, người ta đặt ngẫu nhiên 8 đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng có độ dài 2cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm nằm trên 2 đoạn thẳng khác nhau trong 8 đoạn thẳng đó mà khoảng cách của chúng không vượt quá $\frac{14}{3}$ cm.

Lời giải.

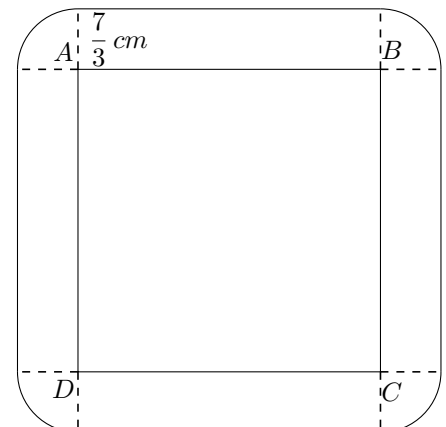
Với mỗi đoạn thẳng và hình vuông đã cho, xét các hình bao như hình vẽ.

Tổng diện tích của 8 hình bao quanh đoạn thẳng là

$$S_1 = 8 \left[\frac{28}{3} + \left(\frac{7}{3} \right)^2 \pi \right] \approx 211,50(\text{cm}^2).$$

Diện tích hình bao hình vuông là

$$S_2 = 100 + \frac{280}{3} + \left(\frac{7}{3} \right)^2 \pi \approx 210,44(\text{cm}^2).$$



Do $S_1 > S_2$ mà các hình bao đoạn thẳng nằm hoàn toàn trong hình bao hình vuông nên tồn tại 2 đoạn thẳng d_1, d_2 có hình bao giao nhau.

Gọi I là điểm thuộc phần giao đó thì trên d_1, d_2 tồn tại hai điểm E, F thuộc hai đoạn thẳng sao cho $IE \leq \frac{7}{3}\text{cm}$, $IF \leq \frac{7}{3}\text{cm}$. Khi đó $EF \leq IE + IF \leq \frac{14}{3}\text{cm}$. □

————— **HẾT** —————

25 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI, VÒNG 1

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải hệ:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy(x + y) = 4 \\ (xy + 1)(x^2 + y^2) = 4 \end{cases}$$
- b) Giải phương trình: $\sqrt{7x + 2} - \sqrt{5 - x} = \frac{8x - 3}{5}$

Lời giải.

a)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy(x + y) = 4 & (1) \\ (xy + 1)(x^2 + y^2) = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy(x + y) = 4 \\ (xy + 1)(x^2 + y^2) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 4 & (3) \\ (xy + 1)(x^2 + y^2) = 4 & (4) \end{cases}$$

$$(3) - (4) \Leftrightarrow [(x + y) - (xy + 1)](x^2 + y^2) = 0$$

Vì $(x + y)(x^2 + y^2) = 4 \neq 0$ nên $(x^2 + y^2) \neq 0$

Vậy $x + y = xy + 1 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Trường hợp 1: $x = 1$

$$(1) \Leftrightarrow 1 + y^3 + y(1 + y) = 4 \Leftrightarrow y = 1.$$

Trường hợp 2: $y = 1$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 1)$

- b) Điều kiện $\frac{-2}{7} \leq x \leq 5$

Phương trình đã cho $\sqrt{7x + 2} - \sqrt{5 - x} = \frac{7x + 2 - (5 - x)}{5}$

$$\Leftrightarrow 5(\sqrt{7x + 2} - \sqrt{5 - x}) = (\sqrt{7x + 2} - \sqrt{7x + 2} + \sqrt{5 - x})$$

$$\Leftrightarrow 5(\sqrt{7x + 2} - \sqrt{5 - x})(\sqrt{7x + 2} + \sqrt{5 - x} - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x + 2} = \sqrt{5 - x} & (1) \\ \sqrt{7x + 2} + \sqrt{5 - x} = 5 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{7x + 2} + \sqrt{5 - x} = 5$$

$$(1) \Leftrightarrow 7x + 2 = 5 - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{8} (tm)$$

$$(2) \sqrt{7x + 2} + \sqrt{5 - x} = 5$$

Ta có hệ
$$\begin{cases} \sqrt{7x + 2} - \sqrt{5 - x} = \frac{8x - 3}{5} \\ \sqrt{7x + 2} + \sqrt{5 - x} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{7x + 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{8x - 3}{5} + 5 \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{7x + 2} = \frac{4x + 11}{5} \text{ đk: } x \geq -\frac{11}{4}$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Rightarrow 7x + 2 = \frac{1}{25}(16x^2 + 88x + 121)$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 87x + 71 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(16x - 71) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{71}{16} \end{cases} \text{ (tmdk)}$$

Thử lại $x = \frac{71}{16}$ không phải là nghiệm của phương trình.

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình } S = \left\{1; \frac{3}{8}\right\}$$

□

Câu 2.

- a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2 + mxy^2 = 3m \\ 2 + m(x^2 + y^2) = 6m \end{cases}$$

- b) Với x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $0 < x \leq y \leq 2$; $2x + y \geq 2xy$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2(x^2 + 1) + y^2(y^2 + 1)$.

Lời giải.

$$\text{a) } \begin{cases} 2 + mxy^2 = 3m \\ 2 + m(x^2 + y^2) = 6m \end{cases} \Rightarrow m(x^2 + y^2 - xy^2 = 3) = 3m$$

$$\text{Để thấy } m \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - xy^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2(1 - x) = 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1 - y^2) = 2$$

Để x, y nguyên $\Leftrightarrow (x - 1)$ và $(x + 1 - y^2)$ là ước của 2.

$$\text{TH1: } \begin{cases} x - 1 = 1 \\ x + 1 - y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1; -1 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x - 1 = 2 \\ x + 1 - y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \sqrt{3}; -\sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} x - 1 = -1 \\ x + 1 - y^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}; -\sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} x - 1 = -2 \\ x + 1 - y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1; -1 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$\text{Với } (x; y) = (2; 1) \Rightarrow m = 2$$

$$\text{Với } (x; y) = (-1; 1); (-1; -1) \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Vậy với $m = 2$ hoặc $m = \frac{1}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm (x, y) nguyên.

$$\text{b) } P = x^4 + y^4 + x^2 + y^2$$

$$\text{Ta có bất đẳng thức } a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } 2x + y \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \geq 2 \text{ (vì } x, y \text{ dương)}$$

$$\text{Áp dụng } (*) \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right)^2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq 2 - \frac{4}{y^2} \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng (*)} \Rightarrow \frac{1}{x^4} + \frac{16}{y^4} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} \right)^2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x^4} \geq 2 - \frac{16}{y^4} \quad (2)$$

$$\text{Có } x \leq y \leq 2 \text{ nên } \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) (y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 4 + x^2 - \frac{4x^2}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 + 2x^2 - \frac{4x^2}{y^2} = 4 + x^2 \left(2 - \frac{4}{y^2} \right) \leq 4 + x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 5 \text{ do (1)}$$

$$\text{Tương tự } \left(1 - \frac{x^4}{y^4} \right) (y^4 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow y^4 \leq 16 + x^4 - \frac{16x^4}{y^4}$$

$$\Leftrightarrow y^4 + x^4 \leq 16 + x^4 \left(2 - \frac{16}{y^4} \right) \leq 16 + x^4 \cdot \frac{1}{x^4} = 17 \text{ (do 2)}$$

$$\Rightarrow P \leq 17 + 5 = 22$$

Dấu = xảy ra khi $x = 1; y = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = 22$ khi $x = 1$ và $y = 2$.

□

Câu 3.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) với $AB < AC$. Phân giác của góc BAC cắt BC tại D và cắt (O) tại E khác A . M là trung điểm của đoạn thẳng AD . Đường thẳng BM cắt (O) tại P khác B . Giả sử các đường thẳng EP và AC cắt nhau tại N .

- Chứng minh tứ giác $APNM$ nội tiếp và N là trung điểm của cạnh AC .
- Giả sử đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác EMN cắt đường thẳng AC tại Q khác N . Chứng minh rằng B và Q đối xứng với nhau qua AE .
- Giả sử (K) cắt đường thẳng BM tại R khác M . Chứng minh rằng RA vuông góc với RC .

Lời giải.

a)

Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{ECA}$ (AD là phân giác $\widehat{BAC}$)

Lại có $\widehat{BPE} = \widehat{BAE}$ (cùng chắn cung BE).

Từ đó suy ra $\widehat{ECA} = \widehat{BPE} \Leftrightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MPN}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APNM$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{APM} = \widehat{ANM}$ (cùng chắn $\widehat{AM}$)

Mặt khác $\widehat{APM} = \widehat{APB} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ACB} \Rightarrow MN \parallel BC$

Vì M là trung điểm của AD

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ADC$

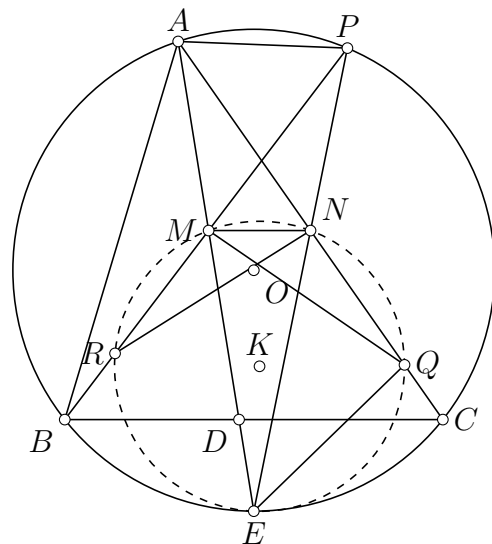
$\Rightarrow N$ là trung điểm của AC .

b) Vì tứ giác $MNQE$ nội tiếp (K) suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{MEQ}$

Mà $\widehat{ANM} = \widehat{APB} \Rightarrow \widehat{AEQ} = \widehat{APB}$

Xét (O) có $\widehat{APB} = \widehat{AEB} \Rightarrow \widehat{AEQ} = \widehat{AEB}$.

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AEQ$ có



$$\left. \begin{array}{l} AE \text{ chung} \\ \widehat{AEQ} = \widehat{AEB} \text{ (cmt)} \\ \widehat{BAE} = \widehat{QAE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEB = \triangle AEQ \text{ (g-c-g)}$$

$\Rightarrow AB = AQ$ và $BE = EQ \Rightarrow AE$ là trung trực của BQ hay B, Q đối xứng qua AE .

c) Vì tứ giác $ENMR$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ENR} = \widehat{EMR}$
 Ta lại có $\widehat{EMR} = \widehat{AMR} = \widehat{ANP} = \widehat{QNE}$.
 Suy ra $\widehat{ENR} = \widehat{ENQ}$ (1)
 Ta có $\widehat{REN} = \widehat{PMN} = \widehat{PAN} = \widehat{PEC}$ hay $\widehat{REN} = \widehat{QEN}$.
 Từ đó ta chứng minh được $\triangle REN = \triangle CEN$ (g-c-g).
 Suy ra $RN = NC = NA \Rightarrow ARC$ vuông tại R hay $AR \perp RC$

□

Câu 4.

Số nguyên a được gọi là số "đẹp" nếu với mọi cách sắp xếp theo thứ tự tùy ý của 100 số 1, 2, 3, ..., 100 luôn tồn tại 10 số liên tiếp có tổng không nhỏ hơn a . Tìm số đẹp lớn nhất.

Lời giải.

Tổng của 100 số tự nhiên từ 1 tới 100 là 5050.

Chia 100 số thành 10 bộ 10 số liên tiếp thì trung bình tổng của 10 bộ này là 505.

Nên tồn tại ít nhất 1 bộ 10 số nguyên tố liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 505.

Ta chứng minh số a lớn nhất có thể bằng 505 bằng cách chọn ra ví dụ mà tổng 10 số liên tiếp bất kì nhỏ hơn hoặc bằng 505, khi đó mọi số a lớn hơn 505 đều không thỏa mãn.

Thật vậy, xét cách sắp xếp sau:

100, 1, 99, 2, 98, 3, ..., 51, 50 (chia thành các cặp có tổng bằng 101, viết số lớn đứng trước rồi xếp các cặp bằng nhau theo thứ tự giảm dần của số lớn hơn).

Nếu 10 số liên tiếp gồm 5 cặp số như vậy thì tổng 10 số này là 505. Nếu không 10 số này sẽ gồm số đầu là số nhỏ hơn trong 1 cặp và kết thúc là 1 số lớn hơn trong 1 cặp khác.

Các số này thuộc 6 cặp khác nhau là $x, 101 - x, x - 1, 102 - x, \dots, x - 4, 105 - x, x - 5, 106 - x$.

□

———— HẾT ————

26 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHTN HÀ NỘI, V2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ 4x^2y + 8xy^2 + 5x + 10y = 1 \end{cases}$
- 2) Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 6x + 5} = \frac{64x^3 + 4x}{5x^2 + 6x + 6}$

Lời giải.

- 1) Đặt $z = 2y$, $a = x + z$, $b = xz$, hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} a^2 - 2b = 5 \\ 2ab + 5a = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a^2 - 5 \\ a^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ xz = -2 \end{cases}$$

Giải hệ ta được nghiệm của hệ phương trình $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (2; -\frac{1}{2})$.

- 2) $\sqrt{5x^2 + 6x + 5} = \frac{64x^3 + 4x}{5x^2 + 6x + 6} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 6x + 5} - 4x = \frac{64x^3 + 4x}{5x^2 + 6x + 6} - 4x$
 $\Leftrightarrow -\frac{(x-1)(11x+5)}{\sqrt{5x^2 + 6x + 5} + 4x} = \frac{4x(11x+5)(x-1)}{5x^2 + 6x + 6}$
 $\Leftrightarrow x = 1, x = -\frac{5}{11}$ (loại), hoặc $\frac{-1}{\sqrt{5x^2 + 6x + 5} + 4x} = \frac{4x}{5x^2 + 6x + 6}$ (vô nghiệm do $x > 0$). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

□

Câu 2.

- 1) Với x, y là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 40.
- 2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^4 + 2x^2 = y^3$.

Lời giải.

- 1) Ta có $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} = \frac{x^2 - y^2}{-1} = \frac{x^2 + y^2 - 2}{5}$ và x, y là các số lẻ, $x = 2k + 1, y = 2m + 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4(k - m)(k + m + 1) \vdots 8$, $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$, $y^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$, mặt khác $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{5}$ cho nên $x^2 \equiv 1 \pmod{5}$, $y^2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{5}$.
- 2) Ta có $(x^2 + 1)^2 = (y + 1)(y^2 - y + 1) = (y + 1)((y + 1)^2 - 3(y + 1) + 3)$. Gọi d là ước chung của $y + 1$ và $(y + 1)^2 - 3(y + 1) + 3$, dễ thấy $d = 1$ hoặc $d = 3$, $x^2 + 1$ không chia hết cho 3 cho nên $d = 1$. Ta có $y + 1 = a^2$, $y^2 - y + 1 = b^2$ (*).

(*) $\Leftrightarrow y^2 - y + 1 = b^2 \Leftrightarrow (2b - 2y + 1)(2b + 2y - 1) = 3$, ta có hai trường hợp

- i) $\begin{cases} 2b + 2y - 1 = 3 \\ 2b - 2y + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow a^2 = 2$ (loại)
- ii) $\begin{cases} 2b + 2y - 1 = 1 \\ 2b - 2y + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0.$

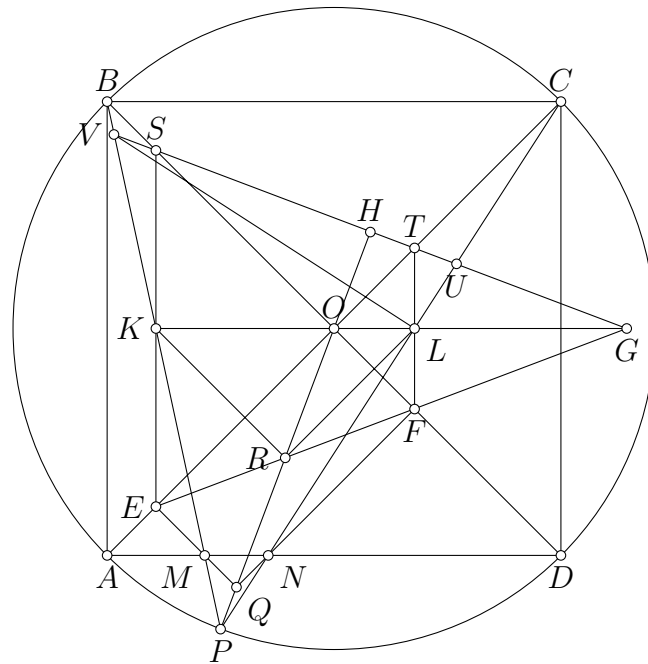
Vậy nghiệm của phương trình $x = 0, y = 0$.

□

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D . Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt đường thẳng AD tại M, N . Đường trung trực của AM cắt các đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K . Đường trung trực của DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L .

- 1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.
- 2) Chứng minh rằng đường thẳng PO đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF .
- 3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng BD tại S , đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T , đường thẳng ST cắt các đường thẳng PC, PB tại U và V . Chứng minh rằng bốn điểm K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



- 1) Vì tam giác CND vuông tại D nên L là trung điểm của NC và O là trung điểm của AC suy ra $OL \parallel AD$, tương tự $OK \parallel AD$, vậy O, K, L thẳng hàng.
- 2) Gọi Q là giao điểm của EM và PO . Ta có tam giác EAM vuông cân tại E nên $\widehat{EMA} = 45^\circ$. Do đó $\widehat{EMA} = \widehat{BDA} = 45^\circ$ suy ra $MQ \parallel BO$. Tương tự $NF \parallel CO$. Ta có $\frac{PM}{PB} = \frac{PQ}{PO}$. Mặt khác $MN \parallel BC$ nên $\frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$ suy ra $\frac{PN}{PC} = \frac{PQ}{PO}$ hay $QN \parallel OC$. Vậy Q, N, F thẳng hàng. Từ đó tứ giác $OFQE$ là hình chữ nhật nên PO đi qua trung điểm R của EF .
- 3) Theo tính chất đối xứng thì ST, EF, KL đồng quy tại G (trường hợp P là điểm chính giữa cung AD thì ST, EF, KL song song với nhau nên dễ suy ra U, V, K, L cùng thuộc một đường tròn). Gọi H là giao điểm của PO và ST . Theo 2) thì $RO = RF$ và $LO = LF$ nên RL là phân giác của $\widehat{FRO}$ mà GL là phân giác của $\widehat{TGR}$. Từ đó L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác GHR mà $\widehat{RLG} = 135^\circ$ suy ra $\widehat{RHG} = 90^\circ$. Vậy $UV \perp PO$.
Ta có tam giác OPC cân tại O nên $\widehat{OPC} = \widehat{OCP} = \widehat{ABP} = \widehat{VKS}$. Mà $\widehat{HPU} + \widehat{VUL} = 90^\circ$ và $\widehat{SKO} = 90^\circ$ nên $\widehat{VUL} + \widehat{VKL} = 180^\circ$, do đó K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.

□

Câu 4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ luôn tồn tại một các sắp xếp bộ n số $1, 2, \dots, n$ thành $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho $x_j \neq \frac{x_i + x_k}{2}$ với mọi bộ chỉ số (i, j, k) mà $1 \leq i < j < k \leq n$.

Lời giải.

Dãy $x_1, x_2, \dots, x_s$ ($s \geq 3$) được gọi là dãy tốt nếu $x_j \neq \frac{x_i + x_k}{2}$ với mọi bộ chỉ số (i, j, k) mà $1 \leq i < j < k \leq s$. Nếu dãy $x_1, x_2, \dots, x_s$ ($s \geq 3$) là dãy tốt dãy $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_s$ và $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_s - 1$ cũng là dãy tốt.

Từ nhận xét trên nếu $x_1, x_2, \dots, x_s$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3, \dots, s$ ($s \geq 3$) thì dãy $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_s, 2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_s - 1$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3, \dots, 2s$ (chú ý rằng $\frac{2x_k + 2x_m - 1}{2}$ không là số nguyên)

- $1, 3, 2$ là dãy tốt của các số $1, 2, 3$.
- Với $n \geq 3$ luôn tồn tại k để $3 \cdot 2^{k-1} < n \leq 3 \cdot 2^k$.

Theo nhận xét trên, ta xây dựng được dãy tốt từ các số $1, 2, 3, \dots, 3 \cdot 2^k$ sau đó bỏ đi các số $n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 3 \cdot 2^k$ ta nhận được dãy tốt từ các số $1, 2, 3, \dots, n$. (chú ý dãy vẫn tốt nếu bỏ đi các số hạng bất kì). □

———— HẾT ————

27 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KIÊN GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{y} + 1 + \sqrt{\sqrt{y} + 1}} + \frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{\sqrt{y} + 1}}{\sqrt{y} + 1 - \sqrt{\sqrt{y} + 1}}$ với $x, y > 0$.

Lời giải.

Đặt $a = \sqrt{x} + 1 > 0, b = \sqrt{\sqrt{y} + 1} > 0, b^2 = \sqrt{y} + 1$, thay vào biểu thức và thực hiện phép tính rút gọn ta được kết quả $P = \frac{2(a-1)}{b^2-1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ ($a-1 = \sqrt{x}$ và $b^2-1 = \sqrt{y}$). $\square$

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m phương trình $6x^2 - 2(m-2)x - m - 1 = 0$ luôn có hai nghiệm x_1, x_2 và giá trị của biểu thức $Q = (2x_1 + 1)(2x_2 + 1)$ không phụ thuộc vào giá trị của m .

Lời giải.

Tính $\Delta' = (m+1)^2 + 9 > 0$. Ta có $S = \frac{-b}{a} = \frac{m-2}{3}, P = \frac{c}{a} = \frac{-m-1}{6}$. Thực hiện phép tính trên Q ta được $Q = 4P + 2S + 1 = \frac{-5}{3}$. $\square$

Câu 3.

- a) Giải phương trình $\frac{1}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2+7x+10} + \frac{1}{x^2+x-20} + \frac{1}{x^2-5x+4} = \frac{-2}{7}$.
b) Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}) + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2}{2016}.$$

Lời giải.

- a) Tách các mẫu thành nhân tử rồi đưa về hiệu:

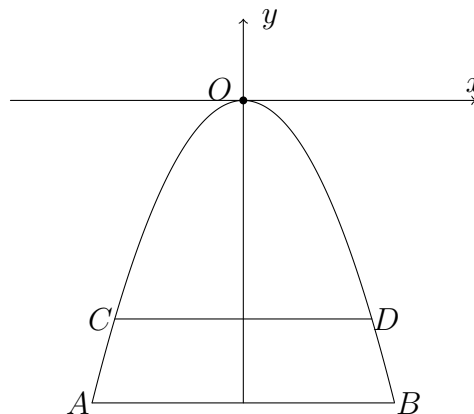
$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right),$$

$$\frac{1}{x^2+x-20} = \frac{1}{(x-4)(x+5)} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+5} \right).$$

Thay vào phương trình và giản ước các hạng tử đối nhau, thu gọn ta được phương trình bậc hai $9x^2 + 9x - 116 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, 82 \\ x = -4, 8. \end{cases}$

- b) Do $a, b, c > 0$, đặt $\sqrt{a} = x, \sqrt{b} = y, \sqrt{c} = z$. Suy ra $\sqrt{ab} = xy, a = x^2, b = y^2$. Thay vào biểu thức và rút gọn ta được $2014(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$. Biểu thức luôn đúng vì $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$. $\square$

Câu 4. Cho parabol có dạng bên dưới với $AB \parallel CD \parallel Ox$, biết $AB = 18,90\text{m}$, $CD = 17,70\text{m}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD bằng $7,55\text{m}$. Tính khoảng cách từ O đến AB .



Lời giải.

Phương trình parabol này có dạng $y = ax^2$. Ta có $y_B = ax_B^2$ và $y_D = ax_D^2$.

Ta có $x_B = 9,45$ và $x_D = 8,85$.

Vì $y_D - y_B = 7,55$ nên $a = \frac{y_D - y_B}{x_D^2 - x_B^2} \approx -0,688$.

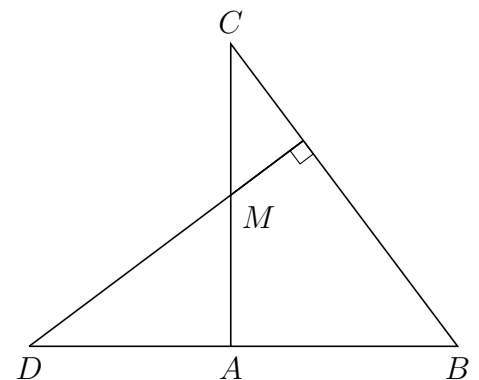
Vậy khoảng cách từ O đến AB là $|y_B| = |a|x_B^2 \approx 61,44\text{m}$.

□

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A với trung điểm cạnh AC là M . Đường thẳng đi qua M và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại điểm D . Cho biết chu vi $\triangle ABC$ bằng 36cm và $2BC = 3MD$. Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.

Gọi ba cạnh của tam giác là a, b, c . Ta có $a + b + c = 36$ và $2BC = 3MA$ hay $\frac{MD}{BC} = \frac{2}{3}$. Vì $\triangle MAD \sim \triangle BAC$ nên $\frac{MA}{c} = \frac{MD}{BC} = \frac{2}{3}$, thay $AM = \frac{b}{2}$, ta tính được $b = \frac{4c}{3}$. Áp dụng định lý Pytago ta tính được $a = \frac{5c}{3}$, kết hợp với trên ta được kết quả $a = 15, b = 12, c = 9$.



□

Câu 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M và đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm L ($L \neq A$). Chứng minh rằng:

a) H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

b) L thuộc đường tròn đường kính AH .

c) $\frac{MF}{ME} = \frac{AC^2 \cdot DB}{AB^2 \cdot DC}$.

Lời giải.

28 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC LÂM ĐỒNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Tính giá trị của biểu thức $A = (\sqrt{10} - \sqrt{2}) \sqrt{4 + \sqrt{6} - 2\sqrt{5}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) \sqrt{4 + \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) \sqrt{3 + \sqrt{5}} \\ &= (\sqrt{5} - 1) \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 4 \end{aligned}$$

□

Câu 2. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $(2x - y - 4)^{2016} + (3x + 2y - 13)^{2016} = 0$.
Tính giá trị của biểu thức $A = (x - y)^{2016} + 2016$.

Lời giải.

Vì $(2x - y - 4)^{2016} \geq 0; (3x + 2y - 13)^{2016} \geq 0$ với mọi x, y nên

$$(2x - y - 4)^{2016} + (3x + 2y - 13)^{2016} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Khi đó: $A = (3 - 2)^{2016} + 2016 = 2017$.

□

Câu 3. Cho $\tan \alpha = 2$, (α là góc nhọn). Tính giá trị biểu thức $A = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} \cot \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \sin \alpha = 2 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } A = \frac{1}{2} + \frac{\frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha}}{2 \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.$$

□

Câu 4. Giải phương trình $36x^2 + \frac{1}{x^2} + 21x + \frac{7}{2x} - 18 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(6x)^2 + 2.6x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 7\left(3x + \frac{1}{2x}\right) - 18 - 2.6x \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$\left(6x + \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{7}{2}\left(6x + \frac{1}{x}\right) - 30 = 0$$

Đặt $t = 6x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 3$. Ta được phương trình:

$$t^2 + \frac{7}{2}t - 30 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 7t - 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

○ Với $t = 4 \Rightarrow 6x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

○ Với $t = -\frac{15}{2} \Rightarrow 12x^2 + 15x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{24}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{24} \right\}$.

□

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x^2 = 2 \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} xy + x^2 = 2 & (1) \\ 2x^2 - y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow 4x^2 - 2y^2 = 2$ (3).

Trừ vế với vế của (3) và (1) ta được: $3x^2 - xy - 2y^2 = 0$ (4).

Dễ thấy $y = 0$ thì hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ (vô lý).

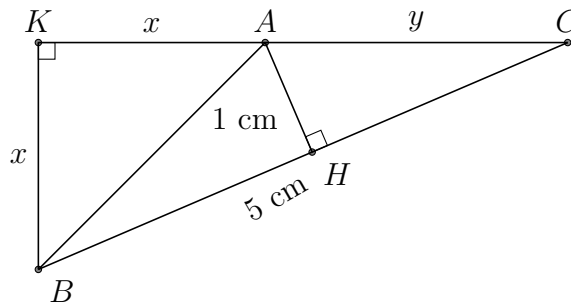
Với $y \neq 0$ khi đó (4) $\Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -\frac{2}{3}y \end{cases}$.

Thế vào (1) $\Rightarrow \begin{cases} 2y^2 = 2 \\ 2\left(-\frac{2}{3}y\right)^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ y^2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S = \{(1; 1), (-1; -1)\}$. □

Câu 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^\circ$, $BC = 5$ cm, đường cao $AH = 1$ cm. Tính độ dài các cạnh AB, AC .

Lời giải.



Kẻ $BK \perp AC$ ở K . Chứng minh được $\triangle AKB$ vuông cân ở K .

Đặt $AK = BK = x$; $AC = y$. Ta có: $x^2 + (x + y)^2 = 5^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + y^2 = 25$ (*).

Lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2}AH \cdot BC \Rightarrow xy = 5$ thế vào (*)

$$\Rightarrow 2x^2 + 10 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 + \left(\frac{5}{x}\right)^2 = 15 \Leftrightarrow 2x^4 - 15x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ x^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = x\sqrt{2} = \sqrt{10} \Rightarrow AC = y = \frac{5}{x} = \sqrt{5} \\ AB = x\sqrt{2} = \sqrt{5} \Rightarrow AC = y = \frac{5}{x} = \sqrt{10} \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} AB = \sqrt{10}; AC = \sqrt{5} \\ AB = \sqrt{5}; AC = \sqrt{10} \end{cases}$. □

Câu 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x + y)^2 = (x - 1)(y + 1)$.

Lời giải.

Ta có: $(x+y)^2 = (x-1)(y+1) \Leftrightarrow (x-1+y+1)^2 = (x-1)(y+1)$.

Đặt $\begin{cases} x-1=a \\ y+1=b \end{cases}$. Ta có phương trình:

$$(a+b)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{2} = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{(1; -1)\}$. □

Câu 8. Cho x, y là các số dương. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Lời giải.

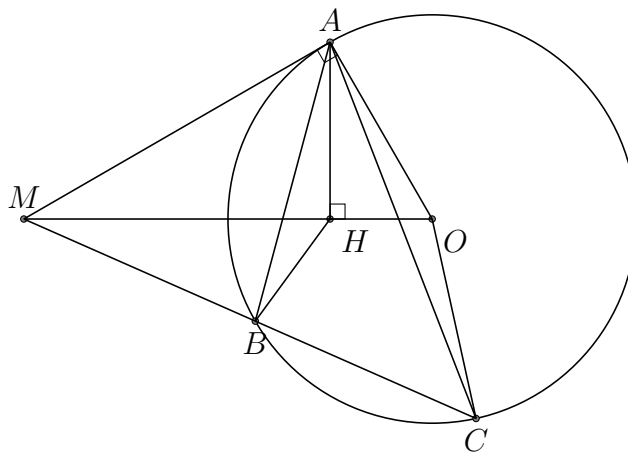
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x} \\ y^2 + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{x} \\ y^2 = \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1. \quad \square$$

Câu 9. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ tiếp tuyến MA (với A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC (cát tuyến MBC không đi qua tâm O và điểm B nằm giữa hai điểm M và C) đến đường tròn (O) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên OM . Chứng minh rằng tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

Lời giải.



Ta có: MA là tiếp tuyến $\Rightarrow OA \perp MA \Rightarrow MA^2 = MH \cdot MO$ (1).

Xét hai tam giác $\triangle MAB$ và $\triangle MAC$ có $\begin{cases} \widehat{AMB} \text{ chung} \\ \widehat{MAB} = \widehat{ACM} \end{cases} \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MCA$ (g-g).

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB \cdot MC \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MH \cdot MO = MB \cdot MC \Rightarrow \frac{MH}{MB} = \frac{MC}{MO}.$$

Lại có $\widehat{HMB}$ là góc chung của $\triangle MBH$ và $\triangle MOC \Rightarrow \triangle MBH \sim \triangle MOC$ (g-c-g)
 $\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{BHM} \Rightarrow BHOC$ là tứ giác nội tiếp. $\square$

Câu 10. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 3 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 + 3 > 0$, $\forall m$, suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

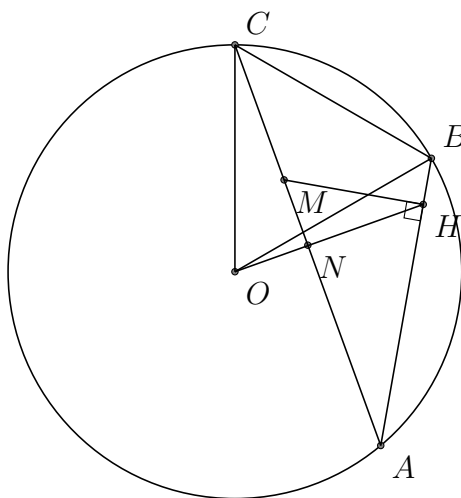
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -3 \end{cases} \quad \text{Từ } |x_1| + |x_2| = 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 48$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 12 = 48 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases} \quad \square$$

Câu 11. Cho BC là dây cung của đường tròn $(O; R)$ và $BC = R$. Gọi A là một điểm trên cung lớn BC sao cho AC không là đường kính (A không trùng với B, C). Trên dây cung AC lấy các điểm M, N sao cho $AC = 2AN = \frac{3}{2}AM$. Kẻ MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng ba điểm H, N, O thẳng hàng.

Lời giải.



$$\text{Ta có: } 2AN = \frac{3}{2}AM \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Đặt } AM = 4x \Rightarrow AN = 3x \ (x > 0). \text{ Khi đó } MN = x.$$

$$\text{Tam giác } OBC \text{ đều} \Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ.$$

$$MH = MA \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}MA = 2x.$$

$$\text{Ta có: } \frac{MN}{MH} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}; \frac{MH}{MA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN}{MH} = \frac{MH}{MA}.$$

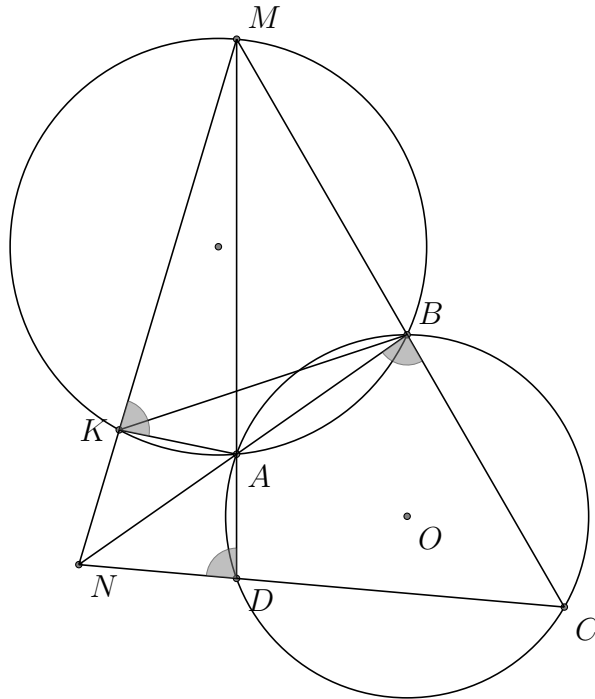
$$\text{Lại có } \widehat{NMH} \text{ là góc chung của } \triangle MNH \text{ và } \triangle MHA \Rightarrow \triangle MNH \sim \triangle MHA \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MNH} = \widehat{MHA} = 90^\circ.$$

$$\text{Mặt khác } ON \perp AC \Rightarrow \widehat{ONM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ONM} + \widehat{MNH} = 180^\circ \Rightarrow O, N, H \text{ thẳng hàng.} \quad \square$$

Câu 12. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại M , hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại N . Chứng minh $MA.MD = MN^2 - NA.NB$.

Lời giải.



Gọi K là giao điểm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ với MN .

$\triangle NKB$ và $\triangle NAM$ có:
$$\begin{cases} \widehat{KNA} \text{ chung} \\ \widehat{KBN} = \widehat{AMN} \text{ cùng chắn cung } AK \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle NKB \sim \triangle NAM$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{NB}{NM} = \frac{NK}{NA} \Rightarrow NA.NB = MN.NK$ (1).

Lại có $ABCD$ và $ABMK$ là các tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{NDA} = \widehat{ABC}$; $\widehat{ABC} = \widehat{AKM}$

$\Rightarrow \widehat{NDA} = \widehat{AKM}$

Mặt khác $\widehat{AMK}$ là góc chung của $\triangle MAK$ và $\triangle MND$.

$\Rightarrow \triangle MAK \sim \triangle MND$ (g-g) $\Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MK}{MD} \Rightarrow MA.MD = MN.MK$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA.MD + NA.NB = MN.MK + MN.NK = MN^2$

$\Rightarrow MA.MD = MN^2 - NA.NB \Rightarrow$ điều phải chứng minh. □

————— HẾT —————

29 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LAM SƠN, V1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các giá trị của x để có: $A \geq 0$.

Lời giải.

- Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3) + 11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 4\sqrt{x} + 3 + 11\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{3x + 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

- Ta có

$$A \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x > 9 \end{cases}$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x > 9$.

□

Câu 2.

- Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m^2 - 1)x + 2m$ (m là tham số) và $(d_2): y = 3x + 4$. Tìm các giá trị của tham số m để các đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.
- Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đó có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0$.

Lời giải.

- (d_1) và (d_2) song song với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 3 \\ 2m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy $m = -2$.

- Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - 2m + 5 = m^2 - 4m + 6 = (m-2)^2 + 2 > 0$ với mọi m , nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo Định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 5. \end{cases}$$

Ta có $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow [x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 - 2x_1 + 4](x_2 - 2) \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (4 - 2x_1)(x_2 - 2) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow (2 - x_1)(x_2 - 2) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x_2 - 4 - x_1x_2 + 2x_1 \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 - 4 \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(2m - 2) - (2m - 5) - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 4m - 4 - 2m + 5 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Câu 3.

- a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x} + y^2 = 3 \\ 3\sqrt{x} - 2y^2 = 1 \end{cases}$
- b) Giải phương trình: $x^2 + 4x - 7 = (x + 4)\sqrt{x^2 - 7}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x \geq 0$.
- Hpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x} + 2y^2 = 6 \\ 3\sqrt{x} - 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{x} = 7 \\ 3\sqrt{x} - 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ 3 - 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.
- b) Điều kiện: $x \geq \sqrt{7}$ hoặc $x \leq -\sqrt{7}$.
- Pt $\Leftrightarrow (x^2 - 7) + 4(x + 4) - 16 = (x + 4)\sqrt{x^2 - 7}$.
- Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 7} = a \geq 0 \\ x + 4 = b. \end{cases}$
- Phương trình trở thành
- $$a^2 + 4b - 16 = ab$$
- $$\Leftrightarrow a^2 - 16 + 4b - ab = 0$$
- $$\Leftrightarrow (a + 4)(a - 4) - b(a - 4) = 0$$
- $$\Leftrightarrow (a - 4)(a + 4 - b) = 0$$
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = b - 4. \end{cases}$$
- Do đó $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 7} = 4 \\ \sqrt{x^2 - 7} = x + 4 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 7} = 4 \\ \sqrt{x^2 - 7} = x \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{23}.$

□

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ với góc $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Tia phân giác góc $\widehat{BCD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O (khác C). Kẻ đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với CO . Đường thẳng (d) cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại M, N .

- a) Chứng minh rằng: $\widehat{OBM} = \widehat{ODC}$.
- b) Chứng minh $\triangle OBM = \triangle ODC$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN .
- c) Gọi K là giao điểm của OC và BD ; I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Chứng minh rằng: $\frac{ND}{MB} = \frac{IB^2 - IK^2}{KD^2}$.

Lời giải.

Câu 5. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)} + \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{(yz+1)^2}{z^2}}{\frac{(zx+1)}{x}} + \frac{\frac{(zx+1)^2}{x^2}}{\frac{(xy+1)}{y}} + \frac{\frac{(xy+1)^2}{y^2}}{\frac{(yz+1)}{z}} \\ &= \frac{\left(y + \frac{1}{z}\right)^2}{z + \frac{1}{x}} + \frac{\left(z + \frac{1}{x}\right)^2}{x + \frac{1}{y}} + \frac{\left(x + \frac{1}{y}\right)^2}{y + \frac{1}{z}} \\ &\geq \frac{\left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}{\left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \\ &\geq x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

$$\text{Suy ra } P \geq x + y + z + \frac{9}{x+y+z} = \left[x + y + z + \frac{9}{4(x+y+z)} \right] + \frac{27}{4(x+y+z)}.$$

$$\text{Ta lại có } \left[x + y + z + \frac{9}{4(x+y+z)} \right] \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3; \quad \frac{27}{4(x+y+z)} \geq \frac{27}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Do đó } P \geq 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Vậy GTNN của } P \text{ là } \frac{15}{2} \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{2}.$$

□

———— HẾT ————

30 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA, VÒNG 2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Chứng minh rằng $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2015\sqrt{2014}} + \frac{1}{2016\sqrt{2015}} > \frac{1931}{1975}$.
- b) Với $a \geq \frac{3}{8}$, chứng minh rằng $\sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}} + \sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}} = 1$.

Lời giải.

- a) $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2015\sqrt{2014}} + \frac{1}{2016\sqrt{2015}} > \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2015.2016} = \frac{2015}{2016} > \frac{1931}{1975}$.
- b) Đặt $A = \sqrt[3]{3a-1+a\sqrt{8a-3}} + \sqrt[3]{3a-1-a\sqrt{8a-3}}$.

$$\begin{aligned} A^3 &= 6a - 2 + 3A\sqrt[3]{(3a-1)^2 - a^2(8a-3)} = 6a - 2 + 3A\sqrt[3]{-8a^3 + 12a^2 - 6a + 1} \\ &= 6a - 2 + 3A\sqrt[3]{(1-2a)^3} = 6a - 2 + 3A(1-2a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^3 - 1 = 3(2a-1)(1-A) \Rightarrow (A-1)[A^2 + A + 1 + 3(2a-1)] = 0$$

$$\text{Xét } A^2 + A + 1 + 3(2a-1) = A^2 + A + 6a - 2 \geq A^2 + A + \frac{18}{8} - 2 > 0 \Rightarrow A = 1.$$

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^8y^8 + y^4 = 2x \\ 1+x = x(1+y)\sqrt{xy} \end{cases}$

Lời giải.

- a) Nhận xét: $x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Ta có

$$\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{x+\frac{3}{x}+1} + \frac{5}{x+\frac{3}{x}-5} = -\frac{3}{2}$$

Đặt $t = x + \frac{3}{x} - 2 \Rightarrow x + \frac{3}{x} + 1 = t + 3$ và $x + \frac{3}{x} - 5 = t - 3$. Phương trình trở thành

$$\frac{4}{t+3} + \frac{5}{t-3} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -7 \end{cases}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$ (vô nghiệm).
- Với $t = -7 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

- b) Điều kiện $xy \geq 0$.

$$1+x = x(1+y)\sqrt{xy} \Rightarrow (1+x)^2 = x^2(1+y)^2xy \Rightarrow (xy-1)(x^2y^2+2x^2y+xy+x^2+2x+1) = 0.$$

Vì $x^8y^8 + x^4 = 2x \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$. Ta có

$$x^8y^8 + x^4 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{y^4} + 1 = \frac{2}{y} \Leftrightarrow (y-1)(y^4+y^3+y^2+y+2) = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

□

Câu 3.

- a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+1)(x+2)(x+8)(x+9) = y^2$.
 b) Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $2016^x + 2017^y = 2018^z$.

Lời giải.

a) $(x+1)(x+2)(x+8)(x+9) = y^2 \Leftrightarrow (x^2 + 10x + 9)(x^2 + 10x + 16) = y^2$.

Đặt $x^2 + 10x + \frac{25}{2} = a \Rightarrow a^2 - \frac{49}{2} = y^2 \Rightarrow (y-a)(y+a) = \frac{49}{4} \Rightarrow (2y-2a)(2y+2a) = 49$
 $\Rightarrow 2y-2a$ và $2y+2a$ thuộc ước của 49. Ta xét các trường hợp:

• $\begin{cases} 2y-2a=1 \\ 2y+2a=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2a+1 \\ y=\frac{25}{2} \end{cases}$ (vô lí).

• $\begin{cases} 2y-2a=-1 \\ 2y+2a=-49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2a-1 \\ y=-\frac{25}{2} \end{cases}$ (vô lí).

• $\begin{cases} 2y-2a=49 \\ 2y+2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2a+49 \\ y=\frac{25}{2} \end{cases}$ (vô lí).

• $\begin{cases} 2y-2a=-49 \\ 2y+2a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2a-49 \\ y=-\frac{25}{2} \end{cases}$ (vô lí).

• $\begin{cases} 2y-2a=-7 \\ 2y+2a=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2a-7 \\ y=0 \end{cases}$

Xét $2a-7=0 \Leftrightarrow 2x^2+20x+18=0 \Leftrightarrow x=-1, x=-9$ (thỏa mãn).

• $\begin{cases} 2y-2a=7 \\ 2y+2a=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=2a+7 \\ y=0 \end{cases}$.

Xét $2a+7=0 \Leftrightarrow 2x^2+20x+32=0 \Leftrightarrow x=-2, x=-8$ (thỏa mãn).

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) \in \{(-1; 0), (-9; 0), (-2; 0), (-8; 0)\}$.

- b) Xét $x \geq 1$: vì $2016^x \equiv 0 \pmod{4}$ và $2017^y \equiv 1 \pmod{4}$ nên $2018^z \equiv 1 \pmod{4}$ (vô lí).

Xét $x = 0$: vì $2016^x + 2017^y = 1 + 2017^y \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 2018^z \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow z = 1$.

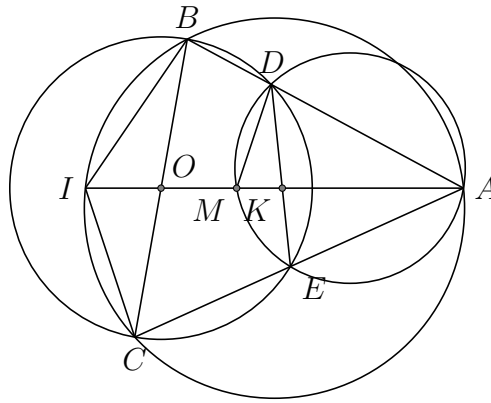
Vậy các số tự nhiên cần tìm là $(x; y; z) = (0; 1; 1)$.

□

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định sao cho $OA = 2R$. Gọi BC là đường kính quay quanh O sao cho BC không đi qua A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt AO tại I (I khác A). Các đường thẳng AB, AC lần lượt cắt (O) tại D, E . Gọi K là giao điểm của DE và AO .

- a) Chứng minh bốn điểm K, E, C, I cùng nằm trên một đường tròn.
 b) Tính độ dài đoạn AI theo R .
 c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A khi BC quay quanh O .

Lời giải.



- a) Có $\widehat{ABC} = \widehat{AIC}$ và $\widehat{ABC} + \widehat{DEC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KIC} + \widehat{KEC} = 180^\circ$ (đpcm).
- b) Ta có $R^2 = OB \cdot OC = OA \cdot OI \Rightarrow OI = \frac{R}{2} \Rightarrow AI = \frac{5}{2}R$.
- c) Gọi M là giao điểm của đường tròn (ADE) và AI. Ta có $\widehat{AMD} = \widehat{AED} = \widehat{AIC} = \widehat{ABO} \Rightarrow DMOB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow AD \cdot AB = AM \cdot AO = AO^2 - R^2$ không đổi $\Rightarrow AM$ không đổi $\Rightarrow M$ cố định $\Rightarrow (ADE)$ luôn qua M cố định.

□

Câu 5. Một số tự nhiên gọi là *số thú vị* nếu số đó có 10 chữ số khác nhau và là bội của số 11111. Hỏi có bao nhiêu số thú vị?

Lời giải.

Gọi A là số thú vị $\Rightarrow$ tổng các chữ số của A bằng 45 $\Rightarrow A : 99999$. Gọi $A = 99999k$ (với k là số tự nhiên) $\Rightarrow 10235 \leq k \leq 98766$. Như vậy, ta đi tìm số k sao cho khi nhân k với 99999 thì các chữ số từ 0 đến 9, mỗi số có mặt đúng một lần.

Mặt khác ta có kết quả: khi lấy $k = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ nhân với 99999 thì ta thu được tích bằng giá trị của $k - 1$ và viết thêm phần bù 9 của $k - 1$ vào sau số $k - 1$.

Ví dụ: với $k = 10235 \Rightarrow k - 1 = 10234 \Rightarrow$ bù 9 của $k - 1$ là 89765 $\Rightarrow 10235.99999 = 1023489765$. Chú ý rằng với $k = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ thì $k - 1$ là số mà không tồn tại hai chữ số có tổng bằng 9. Như vậy, bài toán được quy về việc đi tìm số các số tự nhiên k thỏa mãn $10235 \leq k \leq 98766$ và $k - 1$ là số tự nhiên không tồn tại hai chữ số có tổng bằng 9.

Vì $k - 1$ là số tự nhiên không tồn tại hai chữ số có tổng bằng 9 nên nếu chữ số a_i xuất hiện trong $k - 1$ thì chữ số $9 - a_i$ không thể xuất hiện trong $k - 1$, do vậy ta xét các cặp số (0; 9), (1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5).

Ta lập số $k - 1$ bằng cách duy nhất mỗi chữ số trong mỗi cặp (giả sử xét luôn chữ số 0 là chữ số hàng chục nghìn) $\Rightarrow$ số lượng số $k - 1$ là $2^5 \cdot 5! = 3840$. Vì số lượng các số có chữ số hàng chục nghìn tương ứng với 0, 1, 2, ..., 9 là bằng nhau $\Rightarrow$ số lượng số có số 0 đứng đầu là 384 $\Rightarrow$ số lượng số $k - 1$ cần tìm là $3840 - 384 = 3456$ số.

Vậy có 3456 số thú vị.

□

———— HẾT ————

31 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC LÀO CAI

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tính giá trị của P với $x = 4 - 2\sqrt{3}$.
3. Tìm x để $P < \frac{5}{2}$.
4. Tìm x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

1. Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{3x - 6\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}. \end{aligned}$$

2. Khi $x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} - 1$.

$$\text{Ta có: } P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 3(2 - \sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3}.$$

3. Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có:

$$P < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 6\sqrt{x} < 5\sqrt{x} + 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 10 \Leftrightarrow x < 100.$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $P < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < 100$ và $x \neq 4$.

4. Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có: $P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = 3 - \frac{6}{\sqrt{x} + 2}$.

$$P \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x} + 2} \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 2 \text{ là ước của } 6 \\ \sqrt{x} + 2 \geq 2 \end{cases}.$$

Do đó: $\sqrt{x} + 2 \in \{2; 3; 6\} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{0; 1; 4\} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 16\}$.

Vậy P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $x \in \{0; 1; 16\}$.

□

Câu 2.

1. Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1) (x là ẩn). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}}$ đạt giá trị lớn nhất.
2. Cho đường thẳng $(d) : y = 3x + 6$ và đường thẳng $(d') : y = (m^2 - 2m)x + 2m$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) song song với (d') .

Lời giải.

1. Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$.

$$\text{Áp dụng định lí Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}.$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 + 2m$.

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = (16 + 2m)^2 - 2(-m)^2 = 2m^2 + 64m + 256.$$

$\frac{1}{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 64m + 256 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Ta có với $m \geq -4$, $2m^2 + 64m + 256 = 2(m + 4)^2 + 48(m + 4) + 32 \geq 32$.

Suy ra $2m^2 + 64m + 256$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $m = -4$.

Vậy $\frac{1}{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{2}}{8}$ khi $m = -4$.

$$2. (d) \text{ song song với } (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 = 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy với $m = -1$ hai đường thẳng (d) và (d') song song.

□

Câu 3.

$$1. \text{ Cho hệ phương trình } \begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}. \text{ Tìm tất cả các giá trị của tham số } m \text{ để}$$

hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x^3 - y^3 = 64$.

2. Quãng đường AB dài 150 km. Một ô tô đi từ A đến B rồi dừng lại nghỉ 15 phút và đi tiếp 50 km nữa để đến C với vận tốc lớn hơn vận tốc khi đi từ A đến B là 15 km/h. Tính vận tốc của ô tô khi đi trên quãng đường AB . Biết tổng thời gian kể từ khi ô tô xuất phát từ A đến khi tới C là 3 giờ 25 phút.

Lời giải.

$$1. \begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ y = 2x - m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x = (m+1)^3 (*) \\ y = 2x - m - 5 \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq -1$.

Với $m \neq -1$, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (m+1; m-3)$.

$$\text{Ta có: } x^3 - y^3 = 64 \Leftrightarrow (m+1)^3 - (m-3)^3 = 64 \Leftrightarrow 12m^2 - 24m - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $m = 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

2. Gọi x (km/h) là vận tốc ô tô khi đi từ A đến B ($x > 0$).

Vận tốc ô tô khi đi từ B đến C : $x + 15$ (km/h). Thời gian ô tô đi từ A đến B : $\frac{150}{x}$ (giờ).

Thời gian ô tô đi từ B đến C : $\frac{50}{x+15}$ (giờ). Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{150}{x} + \frac{50}{x+15} + \frac{1}{4} = \frac{41}{12} \Leftrightarrow 19x^2 - 915x - 13500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ x = -\frac{225}{19} \end{cases}. \text{ Kết hợp với điều kiện}$$

ta có vận tốc ô tô đi từ A đến B là 60 (km/h).

□

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{8a^2+1} + \frac{1}{8b^2+1} + \frac{1}{8c^2+1} \geq 1$.

Lời giải.

Với $x > 0$, $\frac{1}{8x^2 + 1} \geq 2\frac{1}{x+1} - 1$ (1).

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow 2x(2x-1)^2 \geq 0$ đúng với $\forall x > 0$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

Áp dụng (1) ta có:

$$\frac{1}{8a^2 + 1} \geq 2\frac{1}{a+1} - 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{8b^2 + 1} \geq 2\frac{1}{b+1} - 1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{8c^2 + 1} \geq 2\frac{1}{c+1} - 1 \quad (4)$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) ta được:

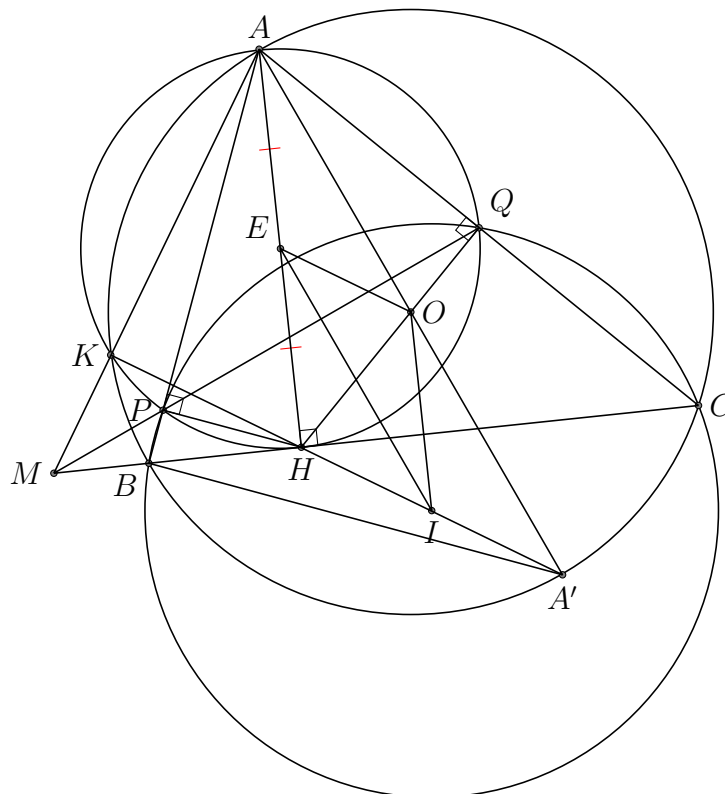
$$\frac{1}{8a^2 + 1} + \frac{1}{8b^2 + 1} + \frac{1}{8c^2 + 1} \geq 2\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) - 3 = 2.2 - 3 = 1.$$

Ta có điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$. □

Câu 5. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh BC . Gọi P, Q lần lượt là chân đường cao kẻ từ H đến các cạnh AB, AC . Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M , đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP .

1. Chứng minh rằng tứ giác $OADI, BPQC$ nội tiếp.
2. Chứng minh rằng $MP.MQ = MB.MC$ và $MB.MC = MK.MA$.
3. Chứng minh tứ giác $AKPQ$ nội tiếp.
4. Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Lời giải.



1. Xét tứ giác $APHQ$ có $\widehat{APH} = \widehat{AQH} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $APHP$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

Vì tứ giác $APHQ$ nội tiếp nên $\widehat{AQP} = \widehat{AHP}$.

Mặt khác $\widehat{AHP} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{BAH}$).

Từ đó suy ra: $\widehat{AQP} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{AQP} = \widehat{PBC}$.

Mà $\widehat{AQP} + \widehat{PQC} = 180^\circ$ nên $\widehat{PBC} + \widehat{PQC} = 180^\circ$ hay tứ giác $BPQC$ nội tiếp.

2. Vì tứ giác $BPQC$ nội tiếp nên $\widehat{MBP} = \widehat{MQC}$ (cùng bù với $\widehat{PBC}$).

Xét hai tam giác $\triangle MBP$ và $\triangle MQC$ có:

$$\begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \widehat{MBP} = \widehat{MQC} \end{cases} \Rightarrow \triangle MBP \sim \triangle MQC \text{ (g-g)}.$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MQ} = \frac{MP}{MC} \Leftrightarrow MB \cdot MC = MP \cdot MQ.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\triangle MBK \sim \triangle MAC$ (g-g).

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MK}{MC} \Leftrightarrow MB \cdot MC = MK \cdot MA.$$

3. Theo chứng minh trên ta có: $MB \cdot MC = MP \cdot MQ = MK \cdot MA \Rightarrow \frac{MK}{MQ} = \frac{MP}{MA}$.

$$\text{Xét hai tam giác } \triangle MPQ \text{ và } \triangle MAQ \text{ có: } \begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \frac{MK}{MQ} = \frac{MP}{MA} \end{cases} \Rightarrow \triangle MPK \sim \triangle MAQ \text{ (c-g-c)}.$$

Suy ra $\widehat{KAQ} + \widehat{KPQ} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AKPQ$ nội tiếp.

4. Vì tứ giác $APHQ$ nội tiếp đường tròn đường kính AH nên $AKQP$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH \Rightarrow \widehat{AKH} = 90^\circ$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O ta có: $\widehat{A'KA} = 90^\circ \Rightarrow K, H, A'$ thẳng hàng.

Gọi I' là trung điểm HA' . Ta chứng minh I' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BPQC$.

Thật vậy:

OI' là đường trung bình của tam giác $A'HA$ nên $OI' \parallel AH \Rightarrow OI' \perp BC$

$\Rightarrow OI'$ là trung trực đoạn BC (1).

Gọi E là trung điểm $AH \Rightarrow EI' \parallel AO$.

$$\text{Vì tứ giác } BPQC \text{ nội tiếp ta có } \begin{cases} \widehat{APQ} = \widehat{ACB} \\ \widehat{ACB} = \widehat{AA'B} \end{cases} \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{AA'B} \Rightarrow \widehat{APQ} + \widehat{PAA'} = 90^\circ.$$

Suy ra $AO \perp PQ \Rightarrow EI \perp PQ$ nên EI' là trung trực đoạn PQ (2).

Mà $BPQC$ nội tiếp. Kết hợp với (1) và (2) ta có I' là tâm đường tròn ngoại tiếp $BPQC$.

Suy ra I' trùng I . Khi đó I là trung điểm HA' .

Từ đó K, H, I thẳng hàng.

□

———— HẾT ————

32 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH (VÒNG 1)

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức $A = \sqrt{x-1} + \frac{2}{3-x}$.
- Tính giá trị biểu thức $B = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ với $x = 3 - \sqrt{3}$.
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông có cạnh bằng 5 cm.
- Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng $y = -x + 2$ với parabol $y = x^2$.

Lời giải.

- Điều kiện xác định của biểu thức là $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 3. \end{cases}$
- Với $x = 3 - \sqrt{3}$ thì $B = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = |3 - \sqrt{3} - 3| = \sqrt{3}$.
- Gọi $ABCD$ là hình vuông $AB = 5$ cm. Đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ có tâm là điểm $O = AC \cap BD$. Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tiếp $ABCD$ là $R = OA = \frac{AC}{2}$.
Mà $AC^2 = AB^2 + AD^2 = 5\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.
- Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vậy tọa độ các giao điểm là $A(1; 1)$, $B(-2; 4)$.

□

Câu 2. Cho biểu thức $P = \frac{3(x+2\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ (Với $x \geq 0$; $x \neq 1$).

- Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$.
- Chứng minh rằng nếu $x \geq 0$; $x \neq 1$ thì $P \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải.

- Điều kiện: $x \geq 0$, $x \neq 1$.
$$P = \frac{3(x+2\sqrt{x}) - (\sqrt{x}+2)^2 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3x+6\sqrt{x}-x-4\sqrt{x}-4-x+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \frac{x+2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}.$$

- Do $\sqrt{x}+2 > 0$, $\forall x \geq 0$, $x \neq 1$ nên

$$P \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}+3) \leq 3(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

□

Câu 3.

- Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + 2m - 2 = 0$ (1) (Với m là tham số).

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 4 + x_1x_2$.

- b) Tìm m để phương trình có nghiệm lớn hơn 2.
- 2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + x - y = 0 \\ \sqrt{2x + y - 2} + 2 - 2x = 0. \end{cases}$

Lời giải.

- 1) $\Delta = m^2 + 3 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$. Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 x_2 = 2m - 2. \end{cases}$

- a) Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 4 + x_1 x_2 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Xét hai trường hợp

- Chỉ có đúng một nghiệm lớn hơn 2. Nghĩa là

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < 0 \quad (\text{Vô lý}).$$

- Cả hai nghiệm đều lớn hơn 2. Nghĩa là

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ x_1 + x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m + 1 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

- 2) Điều kiện: $2x + y - 2 \geq 0$.

Biến đổi phương trình thứ nhất

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 - xy + x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 2xy) + (xy - y^2) + (x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(2x + y + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -2x - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $y = x$ phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{3x - 2} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2.$$

- Với $y = -2x - 1$ thì $2x + y - 2 = -3 < 0$ (Không thỏa mãn điều kiện).

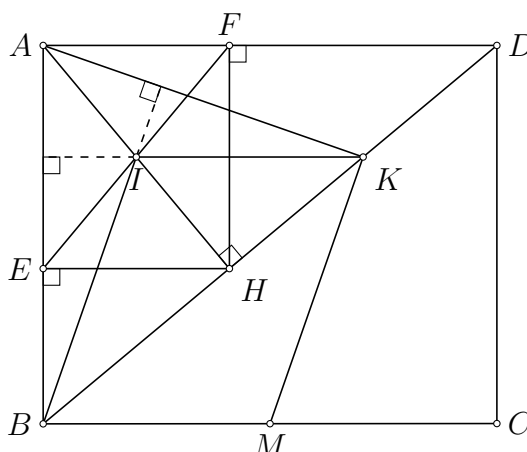
Vậy nghiệm hệ là $(x; y) = (2; 2)$.

□

Câu 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $AH \perp BD$ tại H và $HE \perp AB$ tại E và $HF \perp AD$ tại F . Gọi K, M lần lượt là trung điểm của HD, BC và I là giao điểm của AH với EF .

- Chứng minh rằng I là trực tâm của $\triangle ABK$.
- Chứng minh rằng $ABMK$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng $AH^3 = BE \cdot BD \cdot DF$.

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{EAE} = \widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ nên $AFHE$ là hình chữ nhật.
 $\Rightarrow I$ là trung điểm AH , do đó IK là đường trung bình của $\triangle AHD$. Tức là $IK \parallel AD$.
 $\Rightarrow KI \perp AB$. Mà $AI \perp BK$ nên I là trực tâm $\triangle ABK$.
- b) Do IK là đường trung bình của $\triangle AHD$ nên $IK = \frac{1}{2}AD \Rightarrow IK = BM$ và $IK \parallel BM$.
 $\Rightarrow KIBM$ là hình bình hành, nên $BI \parallel MK$.
 Mà I là trực tâm $\triangle ABK$ nên $BI \perp AK$.
 $\Rightarrow MK \perp AK \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$, mà $\widehat{ABM} = 90^\circ$ nên $ABMK$ nội tiếp đường tròn đường kính AM .
- c) Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được

$$\begin{aligned} BE \cdot BD \cdot DF \cdot AH &= (BD \cdot AH) \cdot BE \cdot DF \\ &= (AB \cdot AD) \cdot BE \cdot DF = (AB \cdot BE)(AD \cdot DF) \\ &= HB^2 \cdot HD^2 = (HB \cdot HD)^2 = AH^4. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BE \cdot BD \cdot DF = AH^3.$$

□

Câu 5. Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4x^2 - yz + 2} + \frac{1}{4y^2 - zx + 2} + \frac{1}{4z^2 - xy + 2}.$$

Lời giải.

Vì $xy + yz + zx = 1$ nên

$$4x^2 - yz + 2 = 4x^2 - yz + 2(xy + yz + zx) = 4x^2 + 2xy + yz + 2xz = (2x + y)(2x + z).$$

Tương tự cũng có

$$4y^2 - zx + 2 = (2y + x)(2y + z); \quad 4z^2 - xy + 2 = (2z + x)(2z + y).$$

Do đó, theo BDT Cô si ta có các biến đổi sau

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(2x + y)(2x + z)} + \frac{1}{(2y + x)(2y + z)} + \frac{1}{(2z + x)(2z + y)} \\ &= \frac{yz}{(2xz + yz)(2xy + yz)} + \frac{xz}{(2yz + xz)(2xy + xz)} + \frac{xy}{(2yz + xy)(2xz + xy)} \\ &\geq \frac{4yz}{(2xz + 2xy + 2yz)^2} + \frac{4xz}{(2yz + 2xy + 2xz)^2} + \frac{4xy}{(2yz + 2xz + 2xy)^2} \\ &= \frac{4(yz + xz + xy)}{4} = 1. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

————— **HẾT** —————

33 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH VÒNG 2**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Đơn giản biểu thức $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ với $x > 0$.
- b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{47}{60}$.
 Tính giá trị biểu thức: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Lời giải.

- a) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} = \sqrt{x+1} + 1 - \sqrt{x+1} + 1 = 2$
- b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) = \frac{47}{10} \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{17}{10}$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{1-3x} = 2\sqrt{x^2+1}$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 3x - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 - x - 4y + 5 = 0 \end{cases}$

Lời giải.

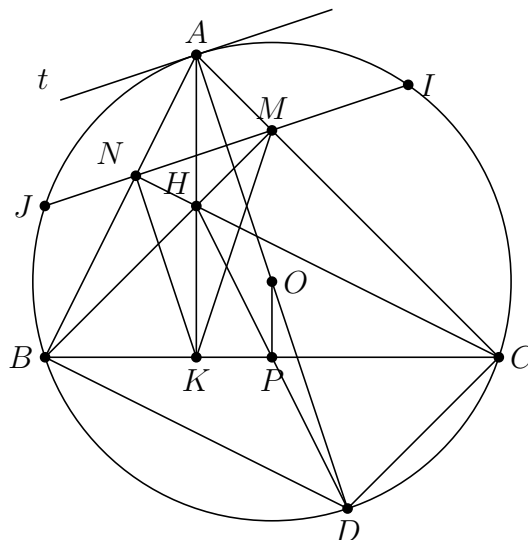
- a) Điều kiện xác định: $x \leq \frac{1}{3}$.
 PT $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+3x+1} - \sqrt{1-3x} = 2(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-3x}) \Leftrightarrow \frac{2(x^2+3x)}{\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{1-3x}} = \frac{2(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-3x}}$
 PT $\Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-3$.
- b) Cộng hai phương trình của hệ ta có $2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1, y=1$.

□

Câu 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AK, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh: $\widehat{NKH} = \widehat{MKH}$.
- b) Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm I, J . Chứng minh AO đi qua trung điểm của IJ .
- c) Gọi P là trung điểm BC , diện tích tứ giác $AMHN$ là S . Chứng minh $2OP^2 > S$.

Lời giải.



- a) Các tứ giác $BNHK$, $CMHK$ nội tiếp và $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$, cho nên $\widehat{NKH} = \widehat{ABM} = \widehat{ACN} = \widehat{MKH}$.
- b) Ta cần chứng minh $IJ \perp AO$. Gọi At là tiếp tuyến tại A của (O) , ta có $\widehat{tAB} = \widehat{ACB}$, mặt khác tứ giác $BCMN$ nội tiếp cho nên $\widehat{ACB} = \widehat{ANM} \Rightarrow \widehat{tAB} = \widehat{ANM} \Rightarrow At \parallel IJ$ mà $At \perp AO \Rightarrow IJ \perp AO$. (DPCM)
- c) Gọi D là điểm đối xứng với A qua O , dễ thấy tứ giác $HBDC$ là hình bình hành và OP là đường trung bình của tam giác AHD cho nên $AH = 2OP$.
 Tam giác ANH vuông tại N , $S_{ANH} = \frac{AN \cdot NH}{2} \leq \frac{AN^2 + NH^2}{4} = \frac{AH^2}{4} = OP^2$, chứng minh tương tự $S_{AMH} \leq OP^2 \Rightarrow 2OP^2 \geq S$, tam giác ABC nhọn nên dấu bằng không thể xảy ra, ta có ĐPCM.

□

Câu 4.

- a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $xyz \neq 0$ và $x^5 + 8y^3 + 7z^2 = 0$.
- b) Tìm tất cả các số nguyên không âm a, b, c thỏa mãn $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc$ và $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ chia hết $a + b + c + 1$.

Lời giải.

- a) Xét bộ ba các số nguyên có dạng $(t^6, -t^{10}, t^{15})$ với $t \in \mathbb{Z}$, ta có $(t^6)^5 + 8(-t^{10})^3 + 7(t^{15})^2 = 0$.
 Vậy phương trình tồn tại vô hạn bộ ba số nguyên (x, y, z) .
- b) Ta có $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc \Rightarrow (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = 3abc$.
 $a^3 + b^3 + c^3 + 1 = (a+b+c)^3 + 1 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc$
 $= \underbrace{(a+b+c)^3 + 1}_{\text{chia hết cho } a+b+c+1} - 3(a+b+c+1)(ab+bc+ca) + (a+b+c)^2$, cho nên $(a+b+c)^2$ chia hết cho $a+b+c+1 \Rightarrow a+b+c+1 = 1$ hoặc $a+b+c+1 = -1$, mặt khác a, b, c không âm cho nên $a+b+c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$.

□

Câu 5.

- a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $(x - y)(x - z) = 1$ và $y \neq z$. Chứng minh: $\frac{1}{(x - y)^2} + \frac{1}{(y - z)^2} + \frac{1}{(z - x)^2} \geq 4$.
- b) Trên bảng ban đầu ghi số 2 và số 4. Ta thực hiện cách viết thêm các số lên bảng như sau: nếu trên bảng đã có hai số, giả sử là a, b , $a \neq b$, ta viết thêm lên bảng số có giá trị là $a + b + ab$. Hỏi với cách thực hiện như vậy có thể xuất hiện số 2016 được không? Giải thích.

Lời giải.

- a) Đặt $a = x - y$, $b = x - z$, ta có $ab = 1$, BĐT tương đương với $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - 2} + \frac{1}{b^2} \geq 4 \iff a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2 + b^2 - 2} \geq 4 \iff a^2 + b^2 - 2 + \frac{1}{a^2 + b^2 - 2} \geq 2$. (ĐPCM)
- b) Dễ thấy tất cả các số ghi trên bảng là các số nguyên dương. Giả sử xuất hiện 2016, ta có $a + b + ab = 2016 \iff (a + 1)(b + 1) = 2017$, do 2017 nguyên tố và $a, b > 0$ suy ra $a + 1 = 1$ hoặc $b + 1 = 1$ (vô lý).

□

———— HẾT ————

34 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH, VÒNG 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $T = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(x\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}} \right)$.

- Rút gọn biểu thức T .
- Tìm giá trị của x thỏa mãn $\frac{1}{2}T = 2\sqrt{x} + 13$.

Lời giải.

Cho biểu thức $T = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(x\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}} \right)$.

- Rút gọn biểu thức T : Với $x > 0; x \neq 1$.

$$T = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{x-1} \cdot (x\sqrt{x} - \sqrt{x}) = \frac{4\sqrt{x}}{x-1} \cdot \sqrt{x} \cdot (x-1) = 4x.$$

Vậy $T = 4x$.

- Với $x > 0; x \neq 1$, ta có: $\frac{1}{2}T = 2\sqrt{x} + 13 \Leftrightarrow 2x = 2\sqrt{x} + 13 \Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x} - 13 = 0$.

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \geq 0, \text{ ta được: } 2t^2 - 2t - 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t_2 = \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{28+6\sqrt{3}}{4} = \frac{14+3\sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{14+3\sqrt{3}}{2} \text{ thì } \frac{1}{2}T = 2\sqrt{x} + 13.$$

□

Câu 2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + y^2 + xy$.

Lời giải.

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + y^2 + xy \Leftrightarrow x^2 - 2y^2x + xy + 2y^2 - x - y = 1$$

$$\Leftrightarrow x(-2y^2 + y + x) - (-2y^2 + y + x) = 1 \Leftrightarrow (-2y^2 + y + x)(x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1=1 \\ -2y^2+x+y=1 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ -2y^2+x+y=1 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=21 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=-1 \\ -2y^2+x+y=-1 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -2y^2+x+y=-1 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} y=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ \begin{cases} y=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 1)$ và $(2; 1)$.

□

Câu 3. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3

giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Lời giải.

Gọi thời gian làm riêng xong công việc của người thợ thứ nhất là x (giờ), của người thợ thứ hai là y (giờ). Điều kiện: $x, y > 16$.

Trong 1 giờ người thợ thứ nhất làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 giờ người thợ thứ hai làm được: $\frac{1}{y}$ (công việc).

Trong 1 giờ cả hai người thợ làm được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc).

Ta được phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16}$ (1).

Người thợ thứ nhất làm trong 3 giờ được $\frac{3}{x}$ (công việc).

Người thợ thứ hai làm trong 6 giờ được $\frac{6}{y}$ (công việc).

Theo đề ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Giải hệ ta được:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48. \end{cases}$$

Vậy thời gian làm riêng xong công việc của người thợ thứ nhất là 24 giờ, của người thứ hai là 48 giờ. $\square$

Câu 4. Cho đường tròn tâm O và dây AB không phải là đường kính. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB tại K (D thuộc cung nhỏ AB). M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M không trùng với B và C). DM cắt AB tại F .

- Chứng minh tứ giác $CKFM$ nội tiếp.
- Chứng minh $DF \cdot DM = AD^2$.
- Tia CM cắt đường thẳng AB tại E . Chứng tỏ rằng tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) đi qua trung điểm của EF .
- Chứng minh $\frac{FB}{EB} = \frac{KF}{KA}$.

Lời giải.

- Chứng minh tứ giác $CKFM$ nội tiếp.
 $CD \perp AB \Rightarrow \widehat{CKF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Lại có $\widehat{CMF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{CKF} + \widehat{CMF} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABEF$ nội tiếp.

- b) Chứng minh $DF \cdot DM = AD^2$.

Xét $\triangle DKF$ và $\triangle DMC$ có:

$$\widehat{DKF} = \widehat{DMC} = 90^\circ$$

$$\widehat{CKM} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle DKF \sim \triangle DMC$$

(g.g).

$$\Rightarrow \frac{DF}{DK} = \frac{CD}{DM}$$

$$\Rightarrow DF \cdot DM = DK \cdot CD$$

(1).

Lại có: $\widehat{DAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $\widehat{AKC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại A có đường cao AK nên $AK^2 = DK \cdot CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $DF \cdot DM = AD^2$.

- c) Chứng minh tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) đi qua trung điểm của EF .

Gọi giao điểm của tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M với AE là I .

Ta có: $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90^\circ$ (vì $\widehat{OMI} = 90^\circ$).

$\widehat{E}_2 + \widehat{C}_3 = 90^\circ$ (vì $\widehat{CKE} = 90^\circ$), mà $\widehat{C}_3 = \widehat{M}_3$ (vì $OC = OM$ nên $\triangle OMC$ cân tại C).

suy ra $\widehat{E}_2 = \widehat{M}_2 \Rightarrow \triangle IME$ cân tại I suy ra $IM = IE$ (3).

Ta có: $\widehat{M}_2 + \widehat{IMF} = \widehat{DME} = 90^\circ$, $\widehat{E}_2 + \widehat{F}_2 = 90^\circ$ (vì $\widehat{DME} = 90^\circ$), mà $\widehat{E}_2 = \widehat{M}_2$ (cmt)

suy ra $\widehat{IMF} = \widehat{F}_2 \Rightarrow \triangle IMF$ cân tại I suy ra $IM = IF$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $IE = IF$.

Vậy tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) đi qua trung điểm của EF .

- d) Chứng minh $\frac{FB}{EB} = \frac{KF}{KA}$.

Ta có: $\widehat{A}_1 = \widehat{M}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DB) và $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (đối đỉnh)

suy ra $\triangle ADF \sim \triangle MBF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{FB}{FM} = \frac{FD}{FA} \Rightarrow FB \cdot FA = FM \cdot FD$ (5).

Ta có: $\widehat{DKF} = \widehat{EMF} = 90^\circ$ và $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (đối đỉnh)

suy ra $\triangle FDK \sim \triangle FME$ (g.g) $\Rightarrow \frac{FM}{FE} = \frac{FK}{FD} \Rightarrow FE \cdot FK = FM \cdot FD$ (6).

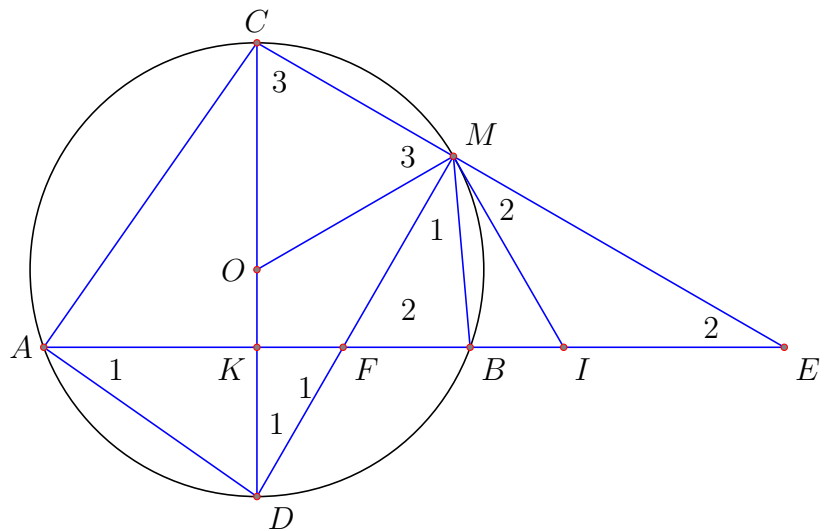
Từ (5) và (6) suy ra

$$FB \cdot FA = FE \cdot FK \Rightarrow \frac{FB}{FE} = \frac{FK}{FA} \Rightarrow \frac{FB}{FE - FB} = \frac{FK}{FA - FK} \Rightarrow \frac{FB}{EB} = \frac{FK}{KA}.$$

□

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-2016}}{x+1} + \frac{\sqrt{x-2017}}{x-1}$.

Lời giải.



Điều kiện: $x \geq 2017$.

$$A = \frac{\sqrt{x-2016}}{x+1} + \frac{\sqrt{x-2017}}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-2016) \cdot 2017}}{(x+1) \cdot \sqrt{2017}} + \frac{\sqrt{(x-2017) \cdot 2016}}{(x-1) \cdot \sqrt{2016}}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$A \leq \frac{x-2016+2017}{2(x+1) \cdot \sqrt{2017}} + \frac{x-2017+2016}{2(x-1) \cdot \sqrt{2016}} = \frac{x+1}{2(x+1) \cdot \sqrt{2017}} + \frac{x-1}{2(x-1) \cdot \sqrt{2016}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2016}} + \frac{1}{\sqrt{2017}} \right).$$

$$A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2016}}{2016} + \frac{\sqrt{2017}}{2017} \right) = \frac{2017 \cdot \sqrt{2016} + 2016 \cdot \sqrt{2017}}{2 \cdot 2016 \cdot 2017} = \frac{2017 \cdot \sqrt{2016} + 2016 \cdot \sqrt{2017}}{8132544}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} 2017 = x - 2016 \\ 2016 = x - 2017 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4033$ (thỏa điều kiện).

Vậy $A_{\max} = \frac{2017 \cdot \sqrt{2016} + 2016 \cdot \sqrt{2017}}{8132544}$ khi $x = 4033$. □

———— **HẾT** ————

35 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{a}{a+1} + \sqrt{1 + a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}}$ với $a \neq -1$.

Rút gọn biểu thức P và tính giá trị của P khi $a = 2016$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{a+1} + \sqrt{1 + a^2 + \frac{a^2}{(a+1)^2}} = \frac{a}{a+1} + \sqrt{(1 + a^2 + 2a) - 2a + \frac{a^2}{(a+1)^2}} \\ &= \frac{a}{a+1} + \sqrt{(1+a)^2 - 2(a+1)\frac{a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^2}} = \frac{a}{a+1} + \sqrt{\left[(a+1) - \frac{a}{a+1}\right]^2} \\ &= \frac{a}{a+1} + \left| (a+1) - \frac{a}{a+1} \right|. \end{aligned}$$

Nhận xét: $a+1 - \frac{a}{a+1} = \frac{a^2 + a + 1}{a+1} > 0 \Leftrightarrow a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$ do $a^2 + a + 1 = (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$.

* Với $a > -1$ thì $P = \frac{a}{a+1} + (a+1) - \frac{a}{a+1} = a+1$.

* Với $a < -1$ thì $P = \frac{a}{a+1} - (a+1) + \frac{a}{a+1} = \frac{-(a^2+1)}{a+1}$.

Vậy $a = 2016$ thì $P = 2017$. □

Câu 2.

a) Tìm các số nguyên dương k và số thực x sao cho $(k-1)x^2 + 2(k-3)x + k-2 = 0$.

b) Tìm các số nguyên dương x và số nguyên tố p sao cho $x^5 + x^4 + 1 = p^2$.

Lời giải.

a) * Nếu $k = 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{-1}{4}$.

* Nếu $0 \leq k \neq 1$ thì phương trình đã cho là phương trình bậc hai. Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (k-3)^2 - (k-1)(k-2) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{7}{3}$.

Khi đó $x = \frac{3-k \pm \sqrt{7-3k}}{k-1}$.

Với $k = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$.

Với $k = 2 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

b) Ta có $x^5 + x^4 + 1 = p^2 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) = p^2$.

Vì p là số nguyên tố, x nguyên dương nên chỉ có 3 trường hợp:

Trường hợp 1: xét $x^2 + x + 1 = x^3 - x + 1 = p$ giải được 1 nghiệm nguyên dương $x = 2$ thế vào $p = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: xét $x^3 - x + 1 = 1$ được $x = 1$ suy ra $p = \sqrt{3}$ (loại).

Trường hợp 3: xét $x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$ không có nghiệm dương.

Vậy có một cặp $(x; p) = (2; 7)$. □

Câu 3. Giải các phương trình sau:

- a) $(17 - 6x)\sqrt{3x - 5} + (6x - 7)\sqrt{7 - 3x} = 2 + 8\sqrt{36x - 9x^2 - 35}$.
 b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{10x - 20} - \sqrt{x - 3}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện: $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Ta có: $\begin{cases} a = \sqrt{3x - 5} \geq 0 \\ b = \sqrt{7 - 3x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2(*)$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$(2b^2 + 3)a + (2a^2 + 3)b = a^2 + b^2 + 8ab \Leftrightarrow 2ab(a + b) + 3(a + b) = (a + b)^2 + 6ab$$

$$\Leftrightarrow 2ab(a + b - 3) = (a + b)(a + b - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a + b = 2ab \end{cases}$$

- Với $a + b = 2$ kết hợp với (*) ta có $ab = \frac{7}{3}$.

Khi đó a, b là nghiệm phương trình $X^2 - 2X + \frac{7}{3} = 0$ (Vô nghiệm).

- Với $a + b = 2ab$ kết hợp với (*) ta có $2 + 2ab = 4a^2b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 1 + \sqrt{3} \\ ab = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Chỉ có $ab = 1 + \sqrt{3}$ thỏa mãn, từ đó suy ra $a + b = 1 + \sqrt{3}$.

Do đó a, b là nghiệm phương trình $X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 1 + \sqrt{3} = 0$ (Vô nghiệm).

Kết luận: phương trình đã cho vô nghiệm.

- b) Điều kiện: $x \geq 3$. Bình phương hai vế phương trình đã cho ta có: $x^2 - 3x + 2 = 11x - 23 - 2\sqrt{10(x^2 - 3x + 2)} \Rightarrow 2\sqrt{10(x^2 - 3x + 2)} = -x^2 + 14x - 25$
 $\Rightarrow 40(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 14x + 25)^2 \Rightarrow x^4 - 28x^3 + 206x^2 - 500x + 385 = 0$
 $\Rightarrow (x^2 - 8x + 11)(x^2 - 20x + 35) = 0$.

Với $x^2 - 8x + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + \sqrt{5} \\ x = 4 - \sqrt{5} \end{cases}$ (Thử lại thỏa mãn).

Với $x^2 - 20x + 35 = 0$ có nghiệm không thỏa mãn điều kiện.

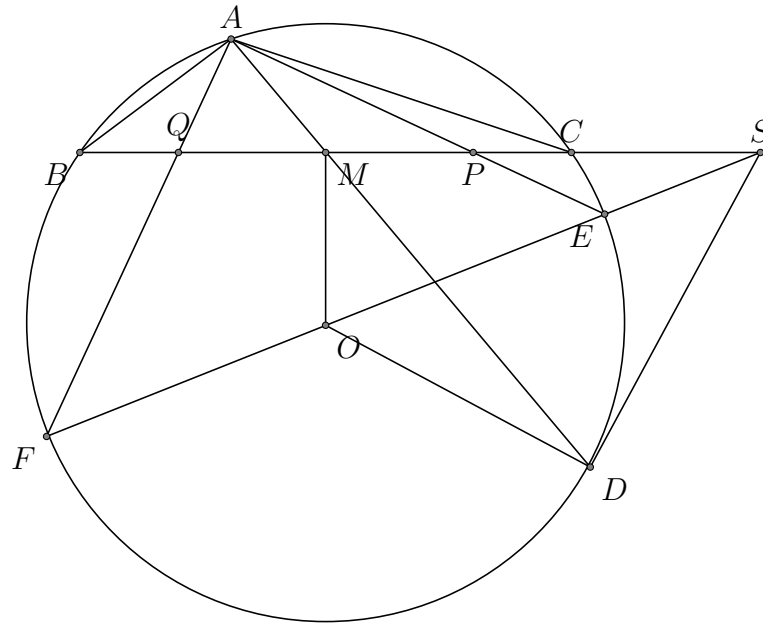
Kết luận: phương trình đã cho có nghiệm $x = 4 + \sqrt{5}$ và $x = 4 - \sqrt{5}$.

□

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} > 90^\circ$, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn tâm (O) . Trung tuyến AM của $\triangle ABC$ cắt (O) tại điểm thứ hai D . Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường thẳng BC tại S . Trên cung nhỏ DC của (O) lấy điểm E , đường thẳng SE cắt (O) tại điểm thứ hai là F . Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AE, AF với BC .

- a) Chứng minh rằng $MODS$ là tứ giác nội tiếp.
 b) Chứng minh rằng $QB = PC$.

Lời giải.

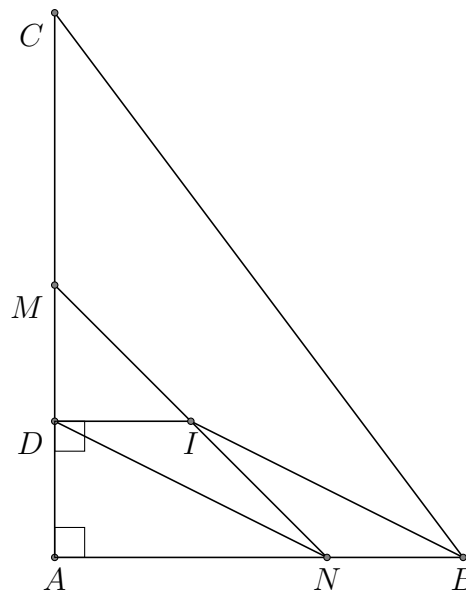


- a) Vì (O) có M là trung điểm dây cung BC nên $\widehat{OMS} = 90^\circ$.
 Mà (O) có DS là tiếp tuyến nên $\widehat{ODS} = 90^\circ$.
 Vậy $\widehat{OMS} + \widehat{ODS} = 180^\circ$ nên tứ giác $MODS$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Gọi N là trung điểm EF thì N cũng nằm trên đường tròn đường kính OS .
 Khi đó $\widehat{END} = \widehat{SND} = \widehat{AMQ}$.
 Theo tính chất góc chắn cung trong (O) ta có: $\widehat{QAM} = \widehat{NED}$.
 Từ đó suy ra $\triangle QAM \sim \triangle DEN \Rightarrow \frac{QM}{ND} = \frac{AM}{NE} \Rightarrow QM = \frac{AM \cdot ND}{NE}$ (1).
 Chứng minh tương tự ta có $PM = \frac{AM \cdot ND}{NF}$ (2).
 Từ (1), (2) kết hợp với $NE = NF$ suy ra ta có:
 $QM = PM \Rightarrow BM - QB = CM - PC \Rightarrow QB = PC$ (Do $BM = MC$).

□

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB < AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp $\triangle ABC$ và tiếp xúc với cạnh AC tại D . Gọi M là trung điểm của AC , đường thẳng IM cắt AB tại N . Chứng minh rằng tứ giác $IBND$ là hình bình hành

Lời giải.



Ta có $ID \perp AC \Rightarrow ID \parallel BN$ (1).

Gọi r, S lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, diện tích của $\triangle ABD$.

Ta có: $2r = AB + AC - BC$ và $2S = r(AB + BC + AC) = AB.AC$.

Ta cần chứng minh $BN = ID = r$.

Thật vậy ta có:

$$\text{Do } ID \parallel AB \Rightarrow \frac{ID}{NA} = \frac{MD}{MA} \Rightarrow NA = \frac{ID.MA}{MD} = \frac{r.\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}AC - r} = \frac{r.AC}{AC - 2r}.$$

$$\text{Do } BN = AB - NA = AB - \frac{r.AC}{AC - 2r} = \frac{AB.AC - 2AB.r - r.AC}{AC - 2r}.$$

$$\text{Xét đẳng thức } \frac{AB.AC - 2AB.r - r.AC}{AC - 2r} = r \Leftrightarrow AB.AC - 2AB.r - r.AC = AC.r - 2r^2$$

$$\Leftrightarrow AB.AC - 2r(AB + AC) + 2r^2 = 0 \Leftrightarrow AB.AC - 2r(2r - BC) + 2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2S - 2r(AB + BC + AC) + 2r.BC + 2r^2 = 0 \Leftrightarrow 2S - 4S + 2r(BC + r) = 0$$

$$\Leftrightarrow S = r(BC + r) \Leftrightarrow \frac{2S}{r} = 2BC + 2r \Leftrightarrow AB + BC + AC = 2BC + AB + AC - BC$$

$$\Leftrightarrow AB + BC + AC = AB + BC + AC \text{ (mệnh đề đúng)}.$$

Vậy $BN = r = ID$ (2).

Từ (1), (2) suy ra tứ giác $IBND$ là hình bình hành. □

Câu 6. Người ta dùng một số quân cờ hình *tetromino* gồm 4 ô vuông kích thước 1×1 , hình chữ L , có thể xoay hoặc lật ngược như hình 1 để ghép phủ kín một bàn cờ hình vuông kích thước $n \times n$ (n là số nguyên dương) gồm n^2 ô vuông kích thước 1×1 như hình 2 theo quy tắc sau: i) Với mỗi quân cờ sau khi ghép vào bàn cờ, các ô vuông của nó phải trùng với các ô vuông của bàn cờ. ii) Không có hai quân cờ nào mà sau khi ghép vào bàn cờ chúng kê lên nhau.

a) Khi $n = 4$, hãy chỉ ra một cách ghép phủ kín bàn cờ (có thể minh họa bằng hình vẽ).

b) Tìm tất cả các giá trị của n để có thể ghép phủ kín bàn cờ.

Lời giải.

a) Hình vuông 4×4 được phủ bởi 4 ô *tetromino* (các ô đánh số 1 là ô *tetromino* thứ nhất, ..., các ô đánh số 4 là ô *tetromino* thứ tư).

b) Ta sẽ chứng minh chỉ có hình vuông $4n \times 4n$ mới được phủ bởi các *tetromino*. Thật vậy:

* Nếu hình vuông có cạnh lẻ, suy ra số ô là số lẻ, không chia hết cho 4. Vậy không thể nào

1	4	4	4
1	4	3	3
1	1	2	3
2	2	2	3

Bảng 2: 4 x 4

có thể phủ hết bằng các ô *tetromino*.

* Ta xét trường hợp $(4n+2) \times (4n+2) = 16n^2 + 16n + 4$. Ta sẽ cần $4n^2 + 4n + 1$ ô *tetromino*.

Đánh số ô vuông $(4n+2) \times (4n+2)$ bằng các số 1 và -1 xen kẽ theo hàng.

Ví dụ với $n = 6$: Vậy sẽ có $8n^2 + 8n + 2$ số 1 và $8n^2 + 8n + 2$ số -1.

1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1

Bảng 3: 6 x 6

Nhận xét:

Ô *tetromino* khi phủ lên bàn sẽ phủ ba số 1, một số -1 hoặc ba số -1, một số 1.

Gọi x là số ô *tetromino* phủ ba số 1, một số -1; y là số ô *tetromino* phủ ba số -1, một số 1.

Ta có $3x + y = 8n^2 + 8n + 2$ (số số 1) là số chẵn, suy ra $x + y$ chẵn (do $2x$ chẵn). Lại có tổng số ô *tetromino* là $4n^2 + 4n + 1$ là lẻ, vậy $x + y$ là lẻ (mâu thuẫn). Vậy với hình vuông cạnh $4n + 2$ không thể phủ hết các ô *tetromino*.

□

———— HẾT ————

36 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN NINH THUẬN

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Giải bất phương trình và hệ phương trình sau:

a) Giải bất phương trình $4x - 3 > 2(x - 1)$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có: $4x - 3 > 2(x - 1) \Leftrightarrow 4x - 2x > 3 - 2 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Nghiệm của bất phương trình là: $x > \frac{1}{2}$

b) Ta có: $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + 3(3x - 5) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 11x = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{11} \\ y = \frac{14}{11} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{23}{11}; \frac{14}{11}\right)$.

□

Câu 2. Cho biểu thức $P = \sqrt{x(x - 6) + 9}$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7}$.

Lời giải.

a) Ta có :

$$P = \sqrt{x(x - 6) + 9} = \sqrt{x^2 - 6x + 9} \\ = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$$

b) Với $x = \sqrt{7}$ ta có : $P = \left| \sqrt{7} - 3 \right| = 3 - \sqrt{7}$

□

Câu 3. Cho hàm số bậc hai : $y = ax^2$ (1).

a) Xác định hệ số a biết đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm $A(2; 2)$

b) Vẽ đồ thị hàm số (1) khi $a = \frac{1}{2}$

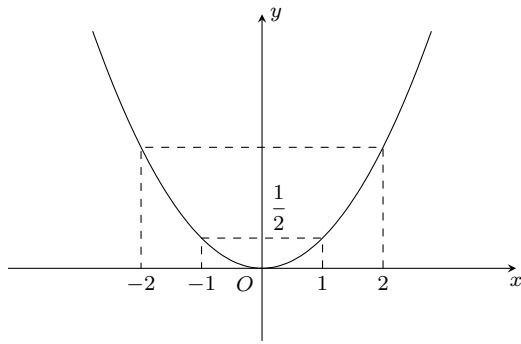
Lời giải.

a) Vì đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm $A(2; 2)$ nên ta có : $2 = a.2^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

b) Khi $a = \frac{1}{2}$ thì hàm số trở thành $y = \frac{1}{2}x^2$. Ta có bảng giá trị của hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị của hàm số:

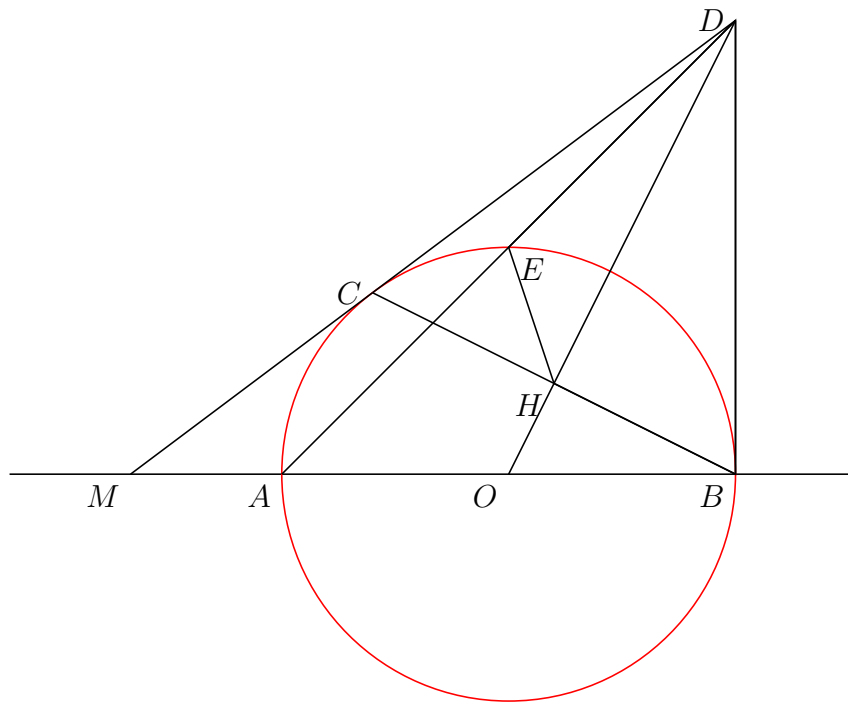


□

Câu 4. Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm M nằm ngoài đường tròn (O) . Qua M kẻ đường thẳng đi qua tâm O cắt đường tròn (O) tại điểm A và B ($MA < MB$). Tiếp tuyến MC (C là tiếp điểm) với đường tròn (O) cắt tiếp tuyến tại B với đường tròn (O) ở D ; BC và OD cắt nhau tại H ; AD cắt đường tròn (O) tại E ($E \neq A$).

- Chứng minh rằng tứ giác $BDEF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Chứng minh $AE \cdot AD = 4R^2$.
- Tính diện tích tam giác BCD theo R khi $\widehat{BMD} = 30^\circ$

Lời giải.



- Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $DB = DC$; $OB = OC = R$. Suy ra OD là đường trung trực của BC nên $OD \perp BC \Rightarrow \widehat{BHD} = 90^\circ$.
Lại có: $\widehat{AEB} = \widehat{BED} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BED} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $BDEF$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Trong tam giác ABD ($\widehat{ABD} = 90^\circ$) có $BD \perp AE$ nên ta có:
 $AD \cdot AE = AB^2 \Leftrightarrow AD \cdot AE = 4R^2$

c) Ta có: $\widehat{BMD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MOC} = 60^\circ$ (do tam giác MOC vuông) $\Rightarrow \triangle OAC$ đều $\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CBD} = 60^\circ$. Suy ra tam giác BCD đều.

Mặt khác: $\triangle ABC$ vuông tại C , ta có:

$$BC = AC \cdot \sin 60^\circ = 2R \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Vậy diện tích tam giác BCD là:

$$S = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}$$

□

Câu 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 - x^2 - 7y^2 = 4xy$

Lời giải.

Ta có: $x^2y^2 - x^2 - 7y^2 = 4xy \Leftrightarrow x^2y^2 - 3y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow y^2(x^2 - 3) = (x + 2y)^2$ (1).

- Nếu $y = 0 \Rightarrow y = 0$ nên $(0, 0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
- Nếu $y \neq 0$ thì $x^2 - 3$ phải là số chính phương. Giả sử $x^2 - 3 = k^2 (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x - k)(x + k) = 3 = 1 \cdot 3 = -1 \cdot (-3)$.

Vì $x - k < x + k$ suy ra:

$$\left[\begin{cases} x - k = 1 \\ x + k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = 2 \\ k = 1 \end{cases} \right. \right. \\ \left[\begin{cases} x - k = 1 \\ x + k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = -2 \\ k = 1 \end{cases} \right. \right.$$

Lần lượt thay $x = 2$ và $x = -2$ vào phương trình (1) ta được $y = -2$ và $y = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên: $(0, 0)$, $(2, -2)$ và $(-2, 2)$

□

———— HẾT ————

37 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, VŨNG TÀU

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{x-1} - 1)^2 + \sqrt{4x-3+4\sqrt{x-1}}$ với $x \geq 1$.
 b) Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = x\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}$.
 c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ x^2 + y^2 = 18. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Với $x \geq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{x-1} - 1)^2 + \sqrt{4x-3+4\sqrt{x-1}} \\ &= x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{(2\sqrt{x-1} + 1)^2} \\ &= x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} + 1 \\ &= x + 1. \end{aligned}$$

Vậy $A = x + 1$.

- b) Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -1$. Ta có:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 3x + 2} &= x\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{x+1}\sqrt{x+2} - x\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x(1 - \sqrt{x+2}) - \sqrt{x+1}(1 - \sqrt{x+2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+2})(x - \sqrt{x+1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x+2} = 0 \\ x - \sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 1 \\ \sqrt{x+1} = x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm: $S = \left\{-1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

- c) Điều kiện xác định: $xy \geq 0$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ x^2 + y^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ (x + y)^2 - 2xy = 18. \end{cases}$$

Đặt $a = x + y$; $b = \sqrt{xy}$ ($b \geq 0$), ta được hệ phương trình mới: $\begin{cases} a = b + 3 \\ a^2 - 2b^2 = 18. \end{cases}$

Thế $a = b + 3$ từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai, ta được phương trình:

$$(3 + b)^2 - 2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow a = 6.$$

Do đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 6 \\ \sqrt{xy} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (3; 3)$.

□

Câu 2.

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ thỏa mãn $p^2 - 5q^2 = 4$.
 b) Cho đa thức $f(x) = x^2 + bx + c$. Biết b, c là các hệ số dương và $f(x)$ có nghiệm. Chứng minh $f(2) \geq 9\sqrt[3]{c}$.

Lời giải.

- a) Ta có $p^2 - 5q^2 = 4 \Leftrightarrow p^2 - 4 = 5q^2 \Leftrightarrow (p - 2)(p + 2) = 5q^2$.

Vì $0 < p - 2 < p + 2$ và q nguyên tố nên $p - 2$ chỉ có thể nhận các giá trị 1, 5, q, q^2 .

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$p - 2$	$p + 2$	p	q
1	$5q^2$	3	1
5	q^2	7	3
q	$5q$	3	1
q^2	5	3	1

Do p, q là các số nguyên tố nên chỉ có cặp $(p; q) = (7; 3)$ thỏa mãn.

- b) Vì $f(x)$ có nghiệm nên ta có $\Delta = b^2 - 4c \geq 0 \Rightarrow b \geq 2\sqrt{c}$.

Ta có: $f(2) = 4 + 2b + c \geq 4 + 4\sqrt{c} + c = (\sqrt{c} + 2)^2$.

Mà $\sqrt{c} + 2 = \sqrt{c} + c + c \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{c}}$. (Bất đẳng thức Cauchy).

Do đó, ta có: $f(2) \geq (3\sqrt[3]{\sqrt{c}})^2 = 9\sqrt[3]{c}$.

□

Câu 3. Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{y+2} + \frac{y^2}{z+2} + \frac{z^2}{x+2} \geq 1.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta được:

$$\frac{x^2}{y+2} + \frac{y+2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+2} \cdot \frac{y+2}{9}} = \frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{x^2}{y+2} \geq \frac{6x - y - 2}{9}.$$

Tương tự, ta có: $\frac{y^2}{z+2} \geq \frac{6y - z - 2}{9}$; $\frac{z^2}{x+2} \geq \frac{6z - x - 2}{9}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được: $\frac{x^2}{y+2} + \frac{y^2}{z+2} + \frac{z^2}{x+2} \geq \frac{5(x+y+z) - 6}{9}$.

Lại có $(x+y+z)^3 \geq 27xyz$ và $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, suy ra $\frac{(x+y+z)^3}{9} \geq 3xyz = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$
 $\Leftrightarrow x+y+z \geq 3$.

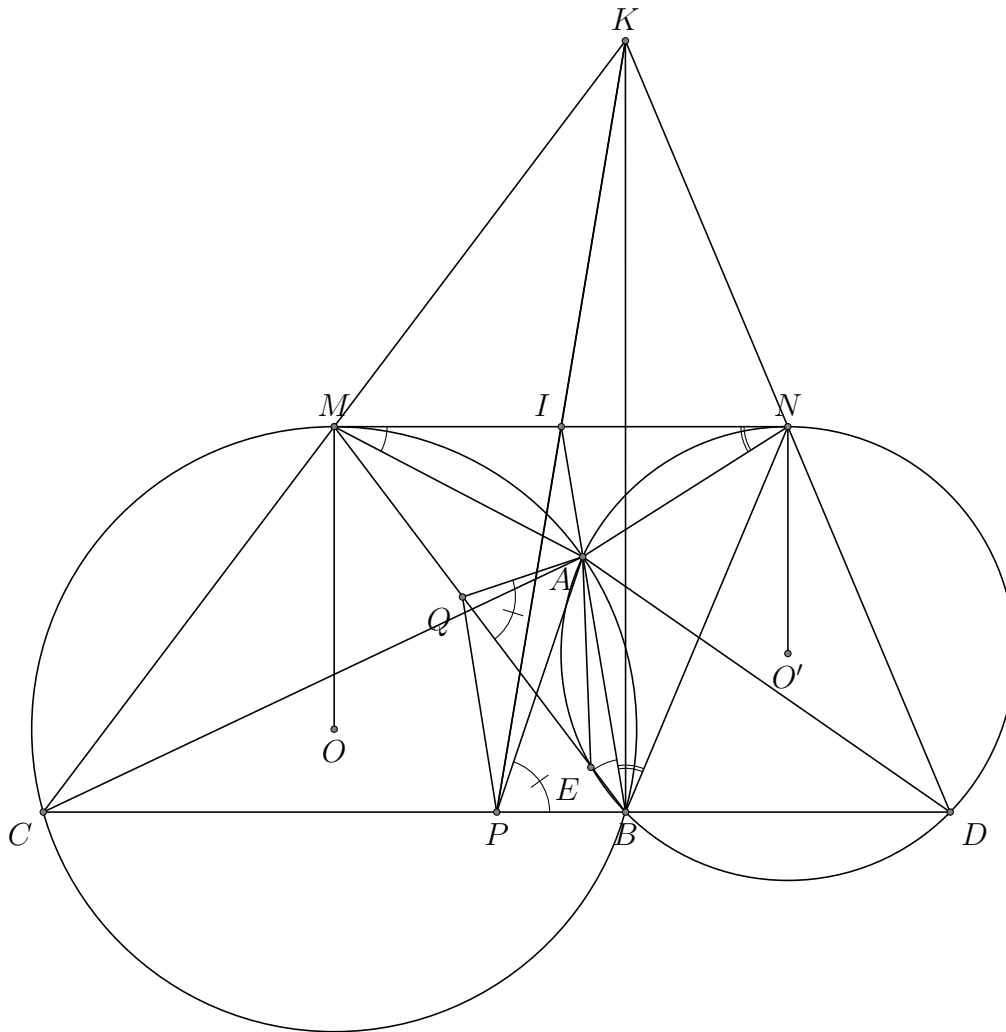
Do đó, ta có: $\frac{x^2}{y+2} + \frac{y^2}{z+2} + \frac{z^2}{x+2} \geq 1$.

□

Câu 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B ($OO' > R > R'$). Trên nửa mặt phẳng bờ là OO' có chứa điểm A , kẻ tiếp tuyến chung MN của hai đường tròn trên (với M thuộc (O) và N thuộc (O')). Biết BM cắt (O') tại điểm E nằm trong đường tròn (O) và đường thẳng AB cắt MN tại I .

- Chứng minh $\widehat{MAN} + \widehat{MBN} = 180^\circ$ và I là trung điểm của MN .
- Qua B , kẻ đường thẳng (d) song song với MN , (d) cắt (O) tại C và cắt (O') tại D (với C, D khác B). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CD và EM . Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACD và các điểm A, B, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh tam giác BIP cân.

Lời giải.



- Ta có: $\widehat{IMA} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn cung AM trong đường tròn (O)); $\widehat{INA} = \widehat{ABN}$ (cùng chắn cung AN trong đường tròn (O')).
Suy ra $\widehat{MAN} + \widehat{MBN} = \widehat{MAN} + \widehat{ABM} + \widehat{ABN} = \widehat{MAN} + \widehat{IMA} + \widehat{INA} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác).
Hai tam giác IMA và IBM có $\widehat{IMA} = \widehat{ABM}$ (cmt) và $\widehat{BIM}$ chung.
 $\Rightarrow \triangle IMA \sim \triangle IBM \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{IA}{IM} \Rightarrow IM^2 = IA \cdot IB$.
Tương tự, ta có: $\triangle INA \sim \triangle IBN \Rightarrow IN^2 = IA \cdot IB$.

Do đó, ta có: $IM = IN$ hay I là trung điểm của MN .

- b) Hai tam giác AME và ACD có $\widehat{AME} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn cung AB trong đường tròn (O)) và $\widehat{AEM} = \widehat{ADC}$ (vì tứ giác $AEBD$ nội tiếp đường tròn (O')).

$\Rightarrow \triangle AME \sim \triangle ACD$ (đpcm).

Ta có: $\triangle AME \sim \triangle ACD \Rightarrow \widehat{AEQ} = \widehat{ADP}$ và $\frac{AE}{AD} = \frac{EM}{DC} = \frac{EQ}{DP}$.

$\Rightarrow \triangle AQE \sim \triangle APD \Rightarrow \widehat{AQE} = \widehat{APD}$.

Suy ra tứ giác $ABPQ$ nội tiếp được trong một đường tròn hay các điểm A, B, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

- c) Gọi K là giao điểm CM và DN . Vì $CDNM$ là hình thang nên ba điểm P, I, K thẳng hàng.

$MN \parallel BC \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow \triangle BMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MCB} = \widehat{MBC}$.

Do $MN \parallel BC$ nên $\widehat{MCB} = \widehat{KMN}$ (hai góc đồng vị); $\widehat{MBC} = \widehat{BMN}$ (hai góc sole trong).

Suy ra $\widehat{KMN} = \widehat{BMN}$.

Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{KNM} = \widehat{BNM}$. Do đó, ta có: $\triangle BMN = \triangle KMN$.

$\Rightarrow MB = MK, NB = NK$. Suy ra MN là đường trung trực của $KB \Rightarrow BK \perp CD, IK = IB$.

Tam giác KBP vuông tại B có $IK = IB$ nên I là trung điểm của KP .

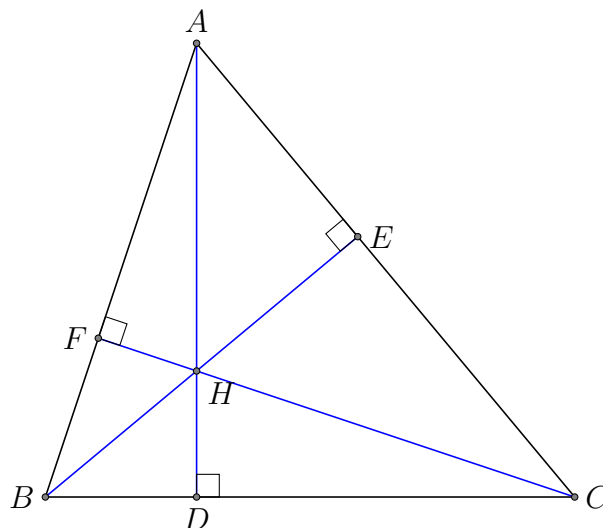
Vậy tam giác BIP cân tại I .

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Chứng minh rằng

$$\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{CA} + \frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}.$$

Lời giải.



Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao tương ứng kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

Đặt $x = \frac{HA}{BC}, y = \frac{HB}{CA}, z = \frac{HC}{AB}$.

Hai tam giác BHD và ACD có $\widehat{BDH} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ và $\widehat{HDB} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$).

$$\Rightarrow \triangle BHD \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{HB}{AC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow xy = \frac{HA}{BC} \cdot \frac{HB}{AC} = \frac{HA}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{HA \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}.$$

Tương tự, ta có: $yz = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$; $zx = \frac{S_{CHA}}{S_{ABC}}$.

Suy ra $xy + yz + zx = \frac{S_{AHB} + S_{BHC} + S_{CHA}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$.

Lại có $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ nên $(x + y + z)^2 \geq 3 \Rightarrow x + y + z \geq \sqrt{3}$.

Vậy $\frac{HA}{BC} + \frac{HB}{CA} + \frac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$. □

———— HẾT ————

38 ĐỀ THI VÀO LỚP 10, CHUYÊN LONG AN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{10}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5}{2x+3\sqrt{x}+1}$ với điều kiện $x \geq 0$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm tất cả các số tự nhiên x để P là số nguyên tố.

Lời giải.

- Ta có $P = \frac{2\sqrt{x}+1+10(\sqrt{x}+1)-5}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{12\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}+1)} = \frac{6}{\sqrt{x}+1}$.
- Vì P là số nguyên tố nên $\sqrt{x}+1=2$ hoặc $\sqrt{x}+1=3$. Vậy $x=1, x=4$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 2m + 5 = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 26$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m^2 - 2m + 1 + 2m - 5 = m^2 - 4$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0$ (*)

Với $m^2 - 4 \geq 0$, theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1x_2 = -2m + 5 \end{cases}$

$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 26 \Leftrightarrow 2m - 2 - 4m + 10 = 26 \Leftrightarrow m = -9$.

So với (*) thì $m = -9$ thỏa yêu cầu đề bài.

□

Câu 3. Giải phương trình: $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$.

Lời giải.

$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1} \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1 + x + 1) = 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)}$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x+1}{x^2-x+1} - 5\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} = 2 \\ \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} = 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\bullet \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

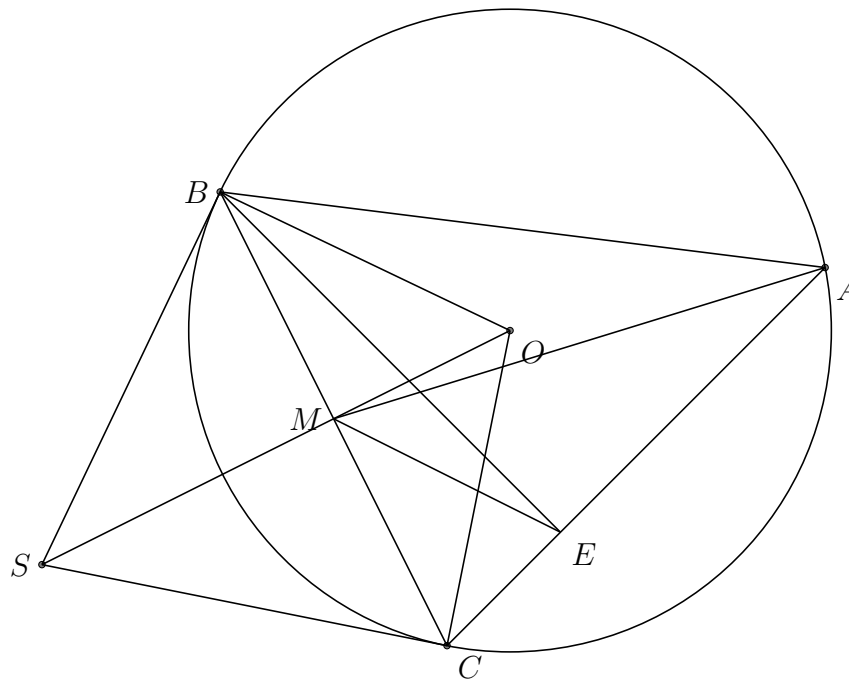
Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}, x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$.

□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao BE và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S , BC và OS cắt nhau tại M .

- Chứng minh: $AB.BM = AE.BS$.
- Chứng minh: $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$.

Lời giải.



- a) Ta có : $\widehat{AEB} = 90^\circ$, $\widehat{BMS} = 90^\circ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
 $\widehat{BAE} = \widehat{SBM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo $\widehat{BC}$).

Suy ra: tam giác ABE đồng dạng tam giác BSM .

Suy ra $\frac{AB}{BS} = \frac{AE}{BM}$ hay $AB \cdot BM = AE \cdot BS$.

- b) Vì $\frac{AB}{BS} = \frac{AE}{BM}$; $MB = ME = \frac{BC}{2}$ nên $\frac{AB}{BS} = \frac{AE}{ME}$ (1)

$$\widehat{ABS} = \widehat{ABO} + 90^\circ; \widehat{AEM} = \widehat{BEM} + 90^\circ \quad (2).$$

Vì tam giác ABE đồng dạng tam giác BSM nên $\widehat{ABE} = \widehat{BSM} = \widehat{OBM}$.

Suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{EBM} = \widehat{BEM}$ (3).

Từ (2), (3) suy ra $\widehat{ABS} = \widehat{AEM}$ (4).

Từ (1), (4) ta có tam giác ABS đồng dạng tam giác AEM .

Suy ra: $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$.

□

Câu 5. Số A được tạo thành bởi các chữ số viết liền nhau gồm các số nguyên dương từ 1 đến 60 theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $A = 12345678910 \cdots 585960$. Ta xóa 100 chữ số của số A sao cho số tạo thành bởi các chữ số còn lại là số nhỏ nhất (không thay đổi trật tự các chữ số ban đầu). Hãy tìm số nhỏ nhất được tạo thành đó.

Lời giải.

Số chữ số của A là $9 + (60 - 10 + 1) \cdot 2 = 111$ chữ số.

Suy ra xóa 100 chữ số thì còn lại 11 chữ số.

Để số mới có 11 chữ số nhỏ nhất thì ta phải chọn 5 chữ số đầu tiên bên trái là chữ số 0 (nghĩa là xóa hết các chữ số khác 0 từ 1 đến 50).

11 chữ số còn lại sau khi xóa 100 chữ số là 00000123450.

Vậy số cần tìm là: 123450.

□

Câu 6. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b) = c$.

Tương tự: $\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq a$, $\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq b$.

Suy ra $Q = \frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \geq 1$.

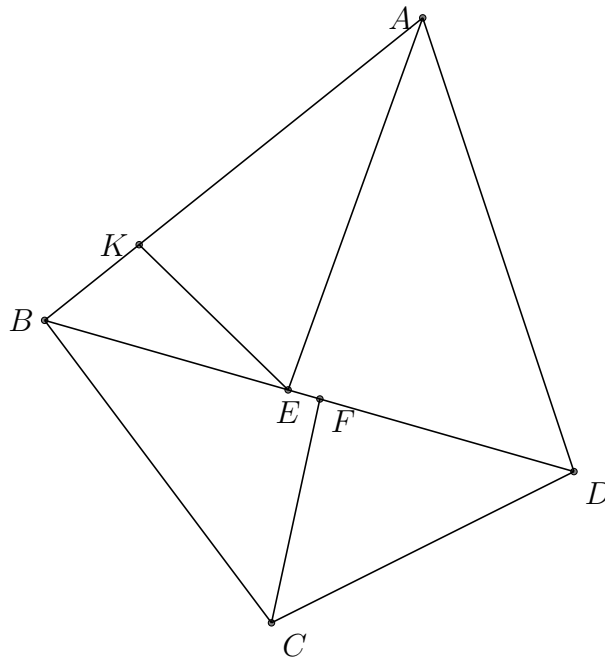
Giá trị nhỏ nhất của Q là 1. Khi đó $a = b = c$

□

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BCD} = 90^\circ$. Đường phân giác trong của $\widehat{BAD}$ cắt BD tại E . Đường phân giác trong của $\widehat{BCD}$ cắt BD tại F .

Chứng minh: $\frac{\sqrt{3}}{AE} + \frac{\sqrt{2}}{CF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{DA}$.

Lời giải.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của E lên AB .

$$S_{\triangle ABE} = \frac{KE \cdot AB}{2} = \frac{AE \cdot \sin 30^\circ \cdot AB}{2} = \frac{AE \cdot AB}{4}.$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{AE \cdot AD}{4}.$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot \sin 60^\circ \cdot AD}{2} = \frac{\sqrt{3} AB \cdot AD}{4}.$$

Ta có: $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABD}$.

$$\text{Suy ra: } \frac{\sqrt{3}}{AE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \quad (1).$$

$$\text{Tương tự như trên ta tìm được } \frac{\sqrt{2}}{CF} = \frac{1}{CB} + \frac{1}{CD} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có: } \frac{\sqrt{3}}{AE} + \frac{\sqrt{2}}{CF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{DA}.$$

□

———— **HẾT** ————

39 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

Cho biểu thức $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn A

b) Tìm x để $A = \frac{5}{4}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - 4} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} A = \frac{5}{4} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 5\sqrt{x} - 10 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow x = 100. \end{aligned}$$

Vậy $x = 100$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 2.

Cho phương trình $x^2 - mx + m - 2 = 0$, trong đó m là tham số.

a) Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = m^2 - 4(m - 2) = (m - 2)^2 + 4 > 0 \forall m$. Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = m - 2$.

$$\text{Từ } \begin{cases} x_1 - x_2 = 2\sqrt{5} \\ x_1 + x_2 = m \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} x_1 = \frac{m + 2\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{m - 2\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Thay vào tích của hai nghiệm ta được

$$\frac{(m - 2\sqrt{5})(m + 2\sqrt{5})}{4} = m - 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 20 = 4m - 8$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 6, m = -2.$$

Vậy $m = 6, m = -2$ là những giá trị cần tìm.

□

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa $a + b + c = 3$.

a) Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq 3$.

b) Chứng minh rằng: $a^2b + b^2c + c^2a \leq 4$.

Lời giải.

a) Ta có: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. Suy ra $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9 \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$.

b) Không mất tính tổng quát ta giả sử a nằm giữa b và c . Khi đó

$$\begin{aligned} b(a-b)(a-c) &\leq 0 \Leftrightarrow b(a^2 - ab - ac + bc) \leq 0 \Rightarrow a^2b + b^2c \leq ab(b+c) \\ \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a &\leq ab(b+c) + c^2a = a(b^2 + bc + c^2) \\ &\leq a(b+c)^2 = \frac{1}{2}2a(b+c) \cdot (b+c) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a+2b+2c}{3} \right)^3 = 4. \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh. □

Câu 4.

Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp r và độ dài các đường cao là x, y, z .

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r}$.

b) Cho biết $r = 1$ và x, y, z là các số nguyên dương. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

a) Đặt độ dài 3 cạnh tam giác a, b, c và độ dài 3 đường cao tương ứng là x, y, z thì ta có

$$ax = by = cz = (a+b+c)r.$$

Suyra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r}$.

b) Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Giả sử $x \leq y \leq z$, khi đó $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$.

+) $x = 1$ ta có $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ (vô nghiệm).

+) $x = 2$ ta có $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{y} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \leq y \leq 4$. Thử lại ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

+) $x = 3$ ta có $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{y} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow z = 3$.

Do $x = y = z = 3$ nên $\triangle ABC$ đều. □

Câu 5. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (ω) tâm O , vẽ đến (ω) hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD, C nằm giữa M và D . Gọi H là giao điểm MO và AB .

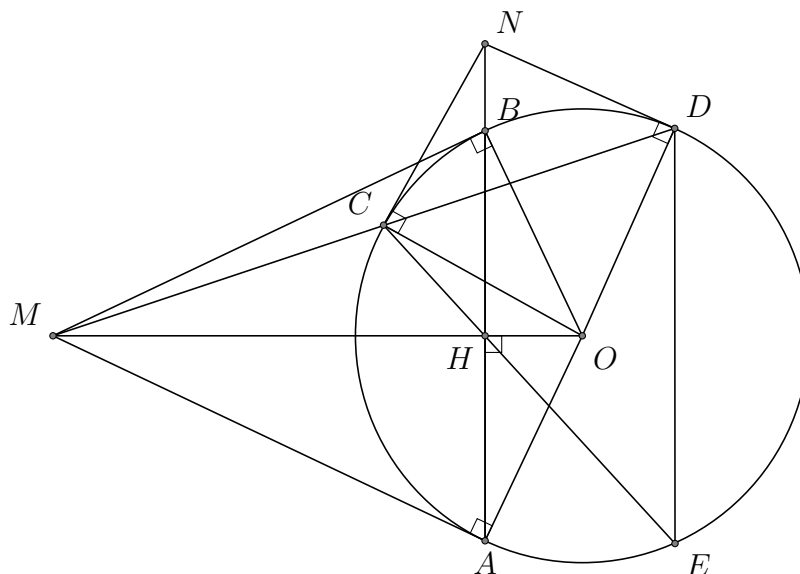
a) Chứng minh: $MA^2 = MC.MD$

b) Chứng minh: Tứ giác $CDOH$ nội tiếp.

c) Chứng minh: Đường thẳng AB và hai tiếp tuyến của (ω) tại C và D đồng qui.

d) Đường thẳng CH cắt (ω) tại điểm thứ hai $E \neq C$. Chứng minh: $AB \parallel DE$

Lời giải.



- a) Xét hai tam giác MAC và MAD ta có $\widehat{M}$ là góc chung, $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ nên $\triangle MAC \sim \triangle MDA$. Suy ra $MA^2 = MC.MD$
- b) Ta có MA là tiếp tuyến nên $MA \perp AO$, $MA = MB$ và $OA = OB$ nên $MO \perp AB$. Trong tam giác MAO , $MH.MO = MA^2$ do đó $MH.MO = MC.MD$. Suy ra $\triangle MCH \sim \triangle MOD$. Do đó $\widehat{MCH} = \widehat{MOD}$ suy ra $CDOH$ là tứ giác nội tiếp.
- c) Giả sử tiếp tuyến của (ω) tại C cắt AB tại N $\widehat{NCO} = \widehat{NHO} = 90^\circ$ nên tứ giác $NCHO$ nội tiếp. Mà $CDOH$ cũng nội tiếp nên C, H, O, D, N cùng nằm trên một đường tròn. Trong tứ giác $NHOD$ nội tiếp, $NH \perp HO$ nên $ND \perp DO$ Do đó ND là tiếp tuyến của (ω) . Hay hai tiếp tuyến của (ω) tại C và D cùng với AB đồng qui.
- d) Ta có $\widehat{DEC} = \widehat{CDN}$ và $\widehat{CDN} = \widehat{CHN}$. Suy ra AB và DE song song.

☐

— HẾT —

40 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỰY NINH BÌNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{2x - 11\sqrt{x} + 15}{(x - 4\sqrt{x} + 3)} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
 b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 11 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

- a) Ta có điều kiện xác định: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} - 3)(2\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} \\ &= 5 - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3} \\ &= \frac{4\sqrt{x} - 14}{\sqrt{x} - 3}. \end{aligned}$$

- b) Với $x = 11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$ ta có

$$P = \frac{4(3 + \sqrt{2}) - 14}{3 + \sqrt{2} - 3} = \frac{4\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = 4 - \sqrt{2}.$$

□

Câu 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - 2m + 3$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $2(x_1^2 + x_2^2) + 3(x_1 + x_2) = 18$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d là: $x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0$

Ta có $\Delta' = m^2 + 2m - 3 > 0$ suy ra $m > 1$ hoặc $m < -3$.

Theo định lí Vi-et: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 \cdot x_2 = -2m + 3$ nên $2(x_1^2 + x_2^2) + 3(x_1 + x_2) = 18$
 $\Leftrightarrow 4m^2 + 7m - 15 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (loại) và $m = \frac{5}{4}$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y + 4 = 2z(x + 3) \\ 3y^2 + 2z + 4 = 2x(y + 3) \\ 3z^2 + 2x + 4 = 2y(z + 3). \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Phương trình tương đương $(\sqrt{x^2 + 12} - 4) - (\sqrt{x^2 + 5} - 3) = 3x - 6$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = 3(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \cdot \left[\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 = 0 \end{cases} \text{ phương trình này vô nghiệm.}$$

Vậy pt đã cho có 1 nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Cộng vế-vế của 3 phương trình, ta được

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x + 2y + 2z + 12 = 2xz + 2yz + 2xy + 6x + 6y + 6z$$

$$\Leftrightarrow (x - z)^2 + (y - z)^2 + (x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

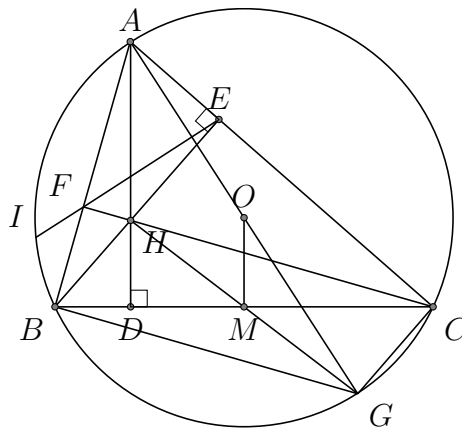
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

□

Câu 4. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R , dây cung BC cố định khác đường kính, A là một điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BF, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp và $AO \perp EF$.
- Tia EF cắt đường tròn tâm O tại I , tia AO cắt đường tròn tâm (O) tại G . Gọi M là trung điểm BC , D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh $AI^2 = 2AD \cdot OM$.
- Trong trường hợp $\triangle ABC$ cân tại A , gọi x là khoảng cách từ O đến đường thẳng BC . Tìm x để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải.



a) Xét tứ giác $BCEF$ có

$$\widehat{BEC} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BFC} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Mà hai góc cùng nhìn cạnh BC nên $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{GAC} = \widehat{GBC}$ (góc nội tiếp chắn cung GC)

$\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp)

suy ra $\widehat{GAC} + \widehat{AEF} = 90^\circ$ hay $AO \perp EF$.

- b) Ta có $\begin{cases} EB \perp AC \\ GC \perp AC \end{cases} \Rightarrow EB \parallel GC$, tương tự $GB \parallel CF$ suy ra tứ giác $BHCG$ là hình bình hành, do đó M là trung điểm HG .

Ta có OM là đường trung bình tam giác AGH , suy ra $2OM = AH$

Suy ra $AI^2 = 2AD \cdot OM \Leftrightarrow AI^2 = AD \cdot AH$

Ta lại có $\triangle AFH \sim \triangle ADB$ (g.g) $\Leftrightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH \cdot AD = AF \cdot AB$ (2)

Ta chứng minh $AF \cdot AB = AI^2$ (1).

Thật vậy, $\triangle AFI \sim \triangle AIB$ (g.g) vì:

$$\begin{cases} \widehat{IAF} \text{ chung} \\ \widehat{AIB} = \widehat{AFI} \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $AI^2 = AD \cdot AH = 2AD \cdot OM$.

- c) Ta có Gọi N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC , đặt $EB = EC = m$, áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $ABNC$, ta có: $AB \cdot NC + AC \cdot NB = AN \cdot BC$ suy ra $AB + AC = AE \cdot \frac{BC}{m}$. Do đó $AB + AC$ lớn nhất khi AN lớn nhất, suy ra AN là đường kính, suy ra tam giác ABC cân. Vậy tam giác ABC có chu vi lớn nhất khi ABC cân tại A .
 Khi đó $x = OM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}R = \frac{R}{2}$.

□

Câu 5.

- a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}.$$

- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$.

Lời giải.

- a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Ta có

$$\frac{4}{ab+a+2} = \frac{4}{ab+1+a+1} + \frac{4}{ab+abc+a+1} = \frac{4}{ab(c+1)+(a+1)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{4}{x+y} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ta có

$$\frac{4}{ab(c+1)+(a+1)} \leq \frac{1}{ab(a+1)} + \frac{1}{a+1} = \frac{abc}{ab(c+1)} + \frac{1}{a+1} = \frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} \quad (1)$$

Tương tự ta có

$$\frac{4}{bc+b+2} = \frac{4}{bc(a+1)+(b+1)} \leq \frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1} \quad (2)$$

$$\frac{4}{ac+c+2} = \frac{4}{ac(b+1)+(c+1)} \leq \frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3) ta được

$$\begin{aligned} \frac{4}{ab+a+2} + \frac{4}{bc+b+2} + \frac{4}{ca+c+2} &\leq \frac{a+1}{a+1} + \frac{b+1}{b+1} + \frac{c+1}{c+1} = 3 \\ \Rightarrow \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} &\leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$

Ta có $4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 = (2y)^2 \Rightarrow 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 = (2x^2 + x)^2 + 2x^2 + (x + 2)^2$
 $\Rightarrow (2x^2 + x)^2 < (2y)^2$.

Với $x = 0$ ta được $y = 1$ ta được cặp nghiệm nguyên $(0; 1), (0; -1)$.

Với $x \neq 0$, ta có $4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 \leq 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 4x^2 = (2x^2 + x + 2)^2$.

Do đó $(2x^2 + x)^2 \leq (2y)^2 \leq (2x^2 + x + 2)^2$

$\Rightarrow (2y)^2 = (2x^2 + x + 1)^2$

$\Rightarrow 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 = (2x^2 + x + 1)^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$. Do đó, ta được các cặp nghiệm nguyên là $(-1, 1); (-1, -1); (3, 11); (3, -11)$.

Vậy các cặp nghiệm nguyên cần tìm là: $(0, 1); (0, -1); (-1, 1); (-1, -1); (3, 11); (3, -11)$.

□

———— HẾT ————

41 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

a) Giải phương trình $\sqrt{5-3x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x^2-4x+4}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2xy + 4x + 3y + 6 = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 12x + 4y + 9 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

a) Điều kiện $-1 \leq x \leq \frac{5}{3}$.

Bình phương hai vế và rút gọn ta thu được phương trình

$$2\sqrt{-3x^2+2x+5} = 3x^2 - 2x - 2.$$

Đặt $t = \sqrt{-3x^2+2x+5}$, $t \geq 0$ ta có phương trình

$$2t = -t^2 + 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (do } t \geq 0 \text{)}.$$

Suy ra $\sqrt{-3x^2+2x+5} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

b) Ta có

$$2xy + 4x + 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x(y+2) + 3(y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

• $x = -\frac{3}{2}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0, y = -4.$$

• $y = -2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$4x^2 + 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, x = -\frac{5}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(-\frac{3}{2}; 0\right), \left(-\frac{3}{2}; -4\right), \left(-\frac{1}{2}; -2\right), \left(-\frac{5}{2}; -2\right)$.

□

Câu 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $(x^2 - 2) \mid (xy + 2)$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2 = x^2 + xy - (xy + 2)$, nên

$$x^2 - 2 \mid (xy + 2) \Leftrightarrow x(x+y) \mid (xy + 2), \text{ hay } k = \frac{x(x+y)}{xy+2} \in \mathbb{Z}.$$

• $x = 2u$, $u \in \mathbb{Z}^+$, ta có $k = \frac{u(2u+y)}{uy+1}$.

Do $(u, uy+1) = 1$ nên $2u+y \mid uy+1$, suy ra

$$2u+y \geq uy+1 \Leftrightarrow (u-1)(y-2) \leq 1. \quad (1)$$

Vì u, y là các số nguyên dương nên từ (1) ta có các trường hợp sau

$$\begin{aligned}
 &+ u = 1, \text{ khi đó } \frac{2u+y}{uy+1} = \frac{y+2}{y+1} = 1 + \frac{1}{y+1}. \text{ Vì } y+1 \geq 2 \text{ nên ta loại trường hợp này.} \\
 &+ y = 1, \text{ khi đó } \frac{2u+y}{uy+1} = \frac{2u+1}{u+1} = 2 - \frac{1}{u+1} \text{ (loại).} \\
 &+ y = 2, \text{ ta có } \frac{2u+y}{uy+1} = \frac{2u+2}{2u+1} = 1 + \frac{1}{2u+1} \text{ (loại).} \\
 &+ \begin{cases} u = 2 \\ y = 3 \end{cases}, \text{ khi đó } \frac{2u+y}{uy+1} = \frac{4+3}{2 \cdot 3 + 1} = 1 \text{ (thỏa).}
 \end{aligned}$$

- x lẻ, khi đó $(x, xy+2) = 1$ nên $x+1 \mid xy+2$, suy ra

$$x + y \geq xy + 2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) + 1 \leq 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy $(x; y) = (4; 3)$. □

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c}{4a}.$$

Lời giải.

Ta có

$$P = \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{c}{b}\right)^2} + \frac{c}{4a}.$$

Đặt $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{b}$ ta có $\frac{c}{a} = xy$ và

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{xy}{4}.$$

Ta chứng minh

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}. \quad (1)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (2+2x+2y+x^2+y^2)(1+xy) \geq (1+2x+x^2)(1+2y+y^2) \\
 &\Leftrightarrow 1-2xy-x^2y^2+x^3y+xy^3 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (1-xy)^2 + xy(x-y)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$P \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{xy}{4} = \left(\frac{1}{1+xy} + \frac{xy+1}{4} \right) - \frac{1}{4} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

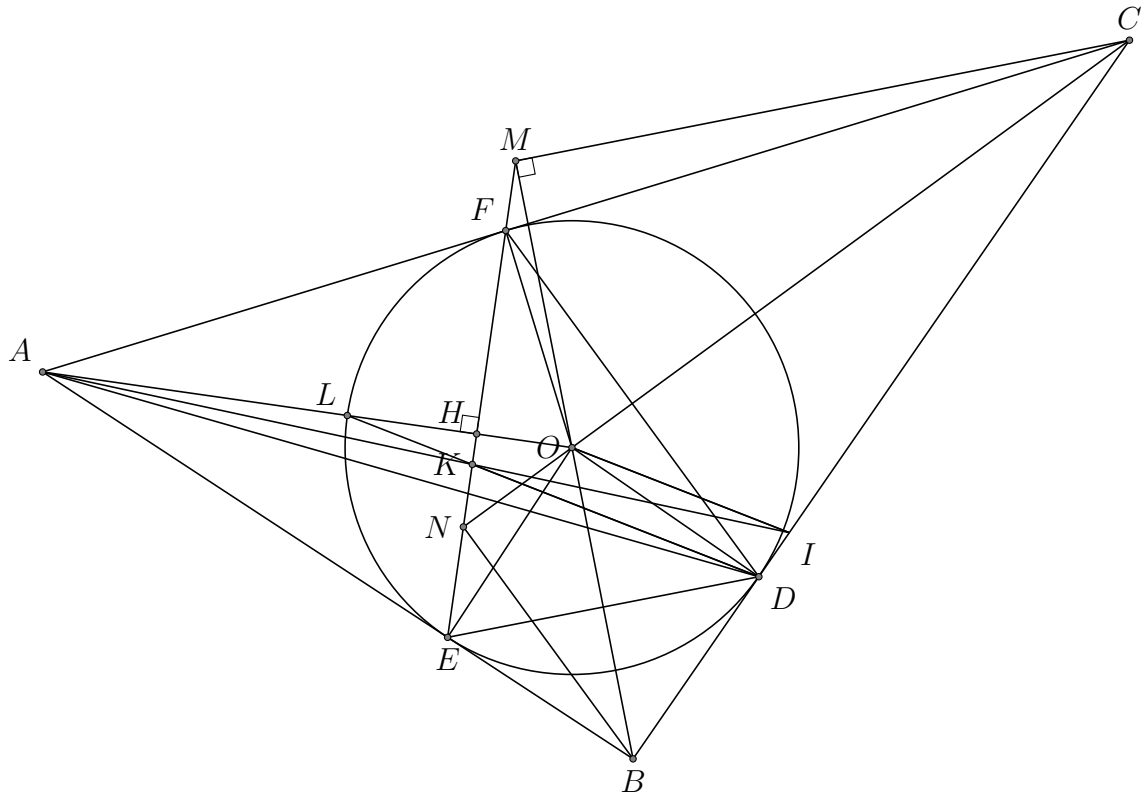
Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$, hay $a = b = c$. Vậy $P_{\min} = \frac{3}{4}$. □

Câu 4. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Kẻ các tiếp tuyến AE, AF của (O) (E, F là các tiếp điểm). Điểm D di động trên cung lớn EF sao cho $DE < DF$, D không trùng với E và tiếp tuyến tại D của (O) lần lượt cắt tia AE, AF lần lượt tại B, C .

- Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng OB, OC . Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp một đường tròn.
- Kẻ các tia phân giác DK của góc $\widehat{EDF}$, OI của góc $\widehat{BOC}$ (K thuộc EF , I thuộc BC). Chứng minh $OI \parallel DK$.

c) Chứng minh đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Ta có OB , OC lần lượt là phân giác của các góc B và C của tam giác ABC . Do đó

$$\widehat{NOB} = 180^\circ - \widehat{BOC} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2}. \quad (1)$$

Mặt khác, tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{AEF} = \frac{1}{2}(180^\circ - A) = \frac{B+C}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AEN} = \widehat{NOB}$, hay tứ giác $BENO$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ONB} = \widehat{OEB} = 90^\circ$, hay $\widehat{CNB} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{BNC} = 90^\circ$. Từ đó ta có $BCMN$ nội tiếp.

b) Ta có

$$\widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{EDB} - \widehat{FDC} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \frac{B+C}{2}.$$

Do đó

$$\widehat{KDC} = \widehat{KDF} + \widehat{FDC} = \frac{1}{2}\widehat{EDF} + \widehat{FDC} = \frac{B}{4} + \frac{C}{4} + 90^\circ - \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{B}{4} - \frac{C}{4}.$$

và

$$\widehat{IOC} = \frac{B}{2} + \widehat{BOI} = \frac{B}{2} + \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{B}{2} + \frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) = 90^\circ + \frac{B}{4} - \frac{C}{4}.$$

Từ đó suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{IOC}$, nên $OI \parallel DK$.

c) Gọi L , H lần lượt là giao điểm của AO với (O) và EF . Ta có A , L , O thẳng hàng; L , K , D thẳng hàng; $AO \perp EF$ tại H .

Vì $DK \parallel OI$ nên $\widehat{DOI} = \widehat{ODK}$. Mà $\widehat{KLO} = \widehat{ODK}$ nên $\widehat{DOI} = \widehat{KLH}$.

Kết hợp với $\widehat{ODI} = \widehat{LHK} = 90^\circ$ ta có

$$\Delta LHK \sim \Delta ODI \Rightarrow \frac{LK}{OI} = \frac{LH}{OD}. \quad (3)$$

ΔOFA vuông tại F , $FH \perp OA$ tại H nên $OA \cdot OH = OF^2$. Suy ra

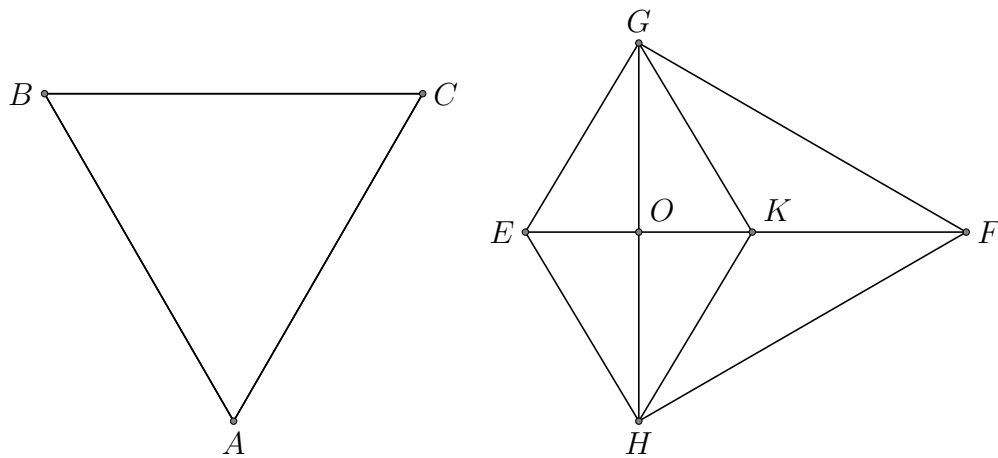
$$\frac{OF}{OA} = \frac{OH}{OF} \Rightarrow \frac{OL}{OA} = \frac{OH}{OL} \Rightarrow \frac{AL}{AO} = \frac{LH}{OL} = \frac{LH}{OD}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $\frac{AL}{AO} = \frac{LK}{OI}$. Kết hợp với $LK \parallel OI$ ta có A, K, I thẳng hàng, hay KI luôn đi qua một điểm cố định A .

□

Câu 5. Mỗi điểm trong mặt phẳng được gán với một trong hai màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác đều có ba đỉnh cùng màu và có độ dài cạnh bằng $\sqrt{3}$ hoặc 3.

Lời giải.



Dựng tam giác đều ABC có cạnh bằng $\sqrt{3}$.

- Nếu A, B, C cùng màu thì ta có đpcm.
- Nếu A, B, C được tô hai màu. Giả sử A, B được tô khác màu.

Dựng tam giác cân ABD với $DB = DA = 2\sqrt{3}$ và D có màu khác với một trong hai điểm A, B . Do đó tồn tại một đoạn thẳng có độ dài bằng $2\sqrt{3}$ và hai điểm mút khác màu. Ta giả sử đoạn đó là EF . Gọi K là trung điểm của EF , khi đó K cùng màu với một trong hai điểm E, F . Giả sử E, K màu xanh và F màu đỏ.

Dựng hình thoi $EGKH$ với $\widehat{EGK} = 60^\circ$, khi đó các tam giác EGK, EHK đều cạnh $\sqrt{3}$. Ta có $GH = 3$ và $FG = FH = 3$. Do đó nếu G, H có 1 điểm cùng màu với E thì tam giác EKG hoặc EKH thỏa yêu cầu bài toán. Còn nếu G, H không có điểm nào cùng màu với E , khi đó G, H cùng màu với F nên tam giác GHF thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy bài toán được chứng minh.

□

———— HẾT ————

42 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC QUẢNG BÌNH

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}-4}{a-2\sqrt{a}} + \frac{3}{\sqrt{a}-2} \right) (a - \sqrt{a} - 2)$ với $a > 0, a \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P khi $a = \frac{(3\sqrt{2}+4)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$.

Lời giải.

$$a) P = \frac{\sqrt{a}-4+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1) = \frac{4(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} = \frac{4(a-1)}{\sqrt{a}}.$$

$$b) a = \frac{(3\sqrt{2}+4)\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(3+2\sqrt{2})\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(3+2\sqrt{2})\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{3}-1} = 3+2\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{4(3+2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{8(1+\sqrt{2})}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = 8.$$

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $\frac{1}{x^2} + \sqrt{2x+2017} = \frac{1}{x} + \sqrt{3x+2016}$.

b) Cho phương trình $x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 8 = 0$ (1) (m là tham số). Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$[x_1^2 - (4m+1)x_1 + m^2][x_2^2 - (4m+1)x_2 + m^2] = 25.$$

Lời giải.

a) ĐKXD: $x \geq -672; x \neq 0$.

$$\frac{1}{x^2} + \sqrt{2x+2017} = \frac{1}{x} + \sqrt{3x+2016}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \sqrt{3x+2016} - \sqrt{2x+2017}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x^2} = \frac{x-1}{\sqrt{3x+2016} + \sqrt{2x+2017}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{3x+2016} + \sqrt{2x+2017}} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm vì } VT < 0; VP > 0)$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad (\text{TM ĐKXD}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

b) $\Delta' = (-2m-1)^2 - (m^2+8) = 3m^2+4m-7$.

$$\text{Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì } \Delta' > 0 \text{ hay } 3m^2+4m-7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Khi đó áp dụng Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(2m + 1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 8. \end{cases}$

Theo giả thiết $[x_1^2 - (4m + 1)x_1 + m^2][x_2^2 - (4m + 1)x_2 + m^2] = 25$

$$\Leftrightarrow (x_1 x_2)^2 - (4m + 1)x_1 x_2 (x_1 + x_2) + m^2(x_1^2 + x_2^2) + (4m + 1)^2 x_1 x_2 - (4m + 1)m^2(x_1 + x_2) + m^4 = 25$$

Hay

$$(m^2 + 8)^2 - 2(m^2 + 8)(4m + 1)(2m + 1) + m^2[4(2m + 1)^2 - 2(m^2 + 8)] + (m^2 + 8)(4m + 1)^2 - 2(4m + 1)m^2(2m + 1) + m^4 = 25$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 32m + 31 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(\text{loại}) \\ m = 31(\text{TM}). \end{cases}$$

Vậy $m = 31$.

□

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

$$\text{Có } \sqrt{a^3 + b} \geq \sqrt{2\sqrt{a^3 b}} = \sqrt{2}\sqrt[4]{a^3 b}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt{a^3 + b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + a}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3 b}} + \frac{1}{\sqrt[4]{b^3 c}} + \frac{1}{\sqrt[4]{c^3 a}} \right).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{\sqrt[4]{a^3 b}} = \frac{1}{\sqrt[4]{ab}\sqrt{a}} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}} + \frac{1}{2a} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{2a}.$$

$$(\text{Áp dụng BĐT } \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a+b}{2ab}).$$

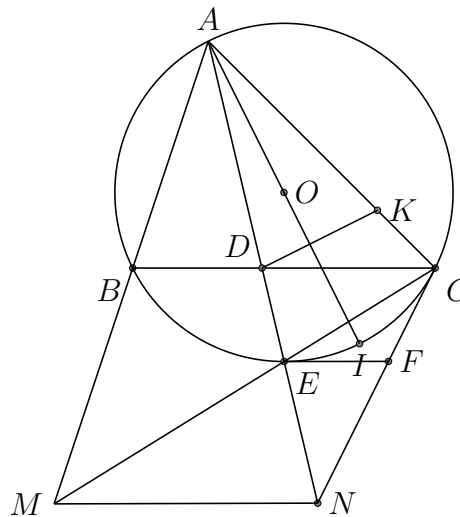
$$\text{Vậy } \frac{1}{\sqrt{a^3 + b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + a}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b + c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Đường phân giác của góc BAC cắt BC tại D , cắt đường tròn (O) tại E . Gọi M là giao điểm của AB và CE . Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AD tại N và tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt CN tại F .

- Chứng minh tứ giác $MACN$ nội tiếp được trong một đường tròn.
- Gọi K là điểm trên cạnh AC sao cho $AB = AK$. Chứng minh $AO \perp DK$.
- Chứng minh rằng $\frac{1}{CF} = \frac{1}{CN} + \frac{1}{CD}$.

Lời giải.



- a) AE là phân giác $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$.
 Vì CN là tiếp tuyến tại C của đường tròn suy ra $\widehat{MCN} = \widehat{EAC}$.
 Do đó $\widehat{MCN} = \widehat{BAE}$.
 Tứ giác $MACN$ có $\widehat{MAN} = \widehat{MCN}$ nên nội tiếp được trong một đường tròn.
- b) Gọi AI là đường kính của đường tròn (O) .

$$\text{C}\acute{o} \widehat{CAO} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{CI} \text{ .}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{\text{sd}AC}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ABC} + \widehat{CAO} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{AI} = 90^\circ.$$

Có $\triangle ABD = \triangle AKD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{AKD} + \widehat{CAO} = 90^\circ.$$

Vậy $AO \perp KD$.

- c) Vì EF là tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) nên $\widehat{CEF} = \widehat{ECF}$.

Do đó $\triangle CEF$ cân tại F , suy ra $FE = FC$.

Mặt khác $\widehat{CEF} = \widehat{BAE} = \widehat{BCE}$ nên $EF \parallel DC$.

Suy ra $\frac{NF}{CN} = \frac{EF}{DC} \Rightarrow \frac{CF}{CN} = 1 - \frac{EF}{CD} = 1 - \frac{CF}{CD}$.

$$\text{Hay } \frac{1}{CF} = \frac{1}{CN} + \frac{1}{CD}.$$

☐

Câu 5. Trong 100 số tự nhiên từ 1 đến 100 hãy chọn n số ($n > 2$) sao cho hai số phân biệt bất kỳ được chọn có tổng chia hết cho 6. Hỏi có thể chọn n số thỏa mãn điều kiện trên với n lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Để hai số phân biệt bất kỳ trong các số được chọn có tổng chia hết cho 6 thì có 2 trường hợp xảy ra:

+ TH1: Mỗi số được chọn đều chia hết cho 6.

Do $100 : 6 = 16$ dư 4 nên có 16 số như vậy.

+ TH2: Mỗi số được chọn đều thỏa mãn chia cho 6 dư 3.

Có 17 số như vậy.

Vậy n lớn nhất bằng 17.

□

———— HẾT ————

43 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ, VÒNG 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

- a) Tìm x để $P(x)$ xác định và rút gọn $P(x)$.
 b) Tìm các giá trị của x để biểu thức $Q(x) = \frac{2\sqrt{x}}{P(x)}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \\ P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= x - \sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

- b) Với $Q = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

$$\text{Với } x > 0; x \neq 1 \text{ suy ra } \begin{cases} 2\sqrt{x} > 0 \\ x - \sqrt{x} + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow Q > 0.$$

$$\text{Ta có } Q = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1}.$$

Vì $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 > 1$ (với $x > 0; x \neq 1$) suy ra $Q < 1$

Vậy $0 < Q < 1$ mà $Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow Q = 1$

$$\text{Với } Q = 1 \text{ thay vào ta được } \begin{cases} x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

□

Câu 2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = mx^2$ ($m > 0$) và đường thẳng $(d): y = 2x - m^2$.

- a) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B . Khi đó chứng minh A và B cùng nằm về một phía với trục tung.
 b) Với m tìm được ở câu a). Gọi x_A, x_B theo thứ tự là hoành độ các điểm A và B . Tìm m để biểu thức $K = \frac{2}{x_A + x_B} + \frac{1}{4x_A x_B + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

- a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) , ta được $mx^2 - 2x + m^2 = 0$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta = 1 - m^3 > 0 \Rightarrow m < 1$.

Kết hợp điều kiện $m > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$ thì d cắt P tại hai điểm phân biệt

Áp dụng hệ thức vi-ét $x_1 \cdot x_2 = m > 0$.

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm cùng 1 phía với trục tung.

b) Ta có $K = m + \frac{1}{4m+1} = \frac{1}{4}(4m+1) + \frac{1}{4m+1} - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}$.
 Dấu = xảy ra khi $m = \frac{1}{4}$

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-1} + 6 = 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x-1}$.
 b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$.

Lời giải.

- a) Đặt $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt{x+2}$; $c = \sqrt{x-1}$ ($x > 1$).

Phương trình tương đương với $ab + ac + 6 = 3a + 2b + 2c \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b + c - 3 = 0 \end{cases}$.

suy ra $\begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2. \end{cases}$

- b) Phương trình tương đương với $x^3 + 2xy^2 + 8y^3 + x^2y = 0$.

Vì $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{x^2}{y^2} + 2\frac{x}{y} + 8 = 0.$$

$\Rightarrow x = -2y$, thay vào ta được $(x, y) = (-2; 1)$ hoặc $(2; -1)$.

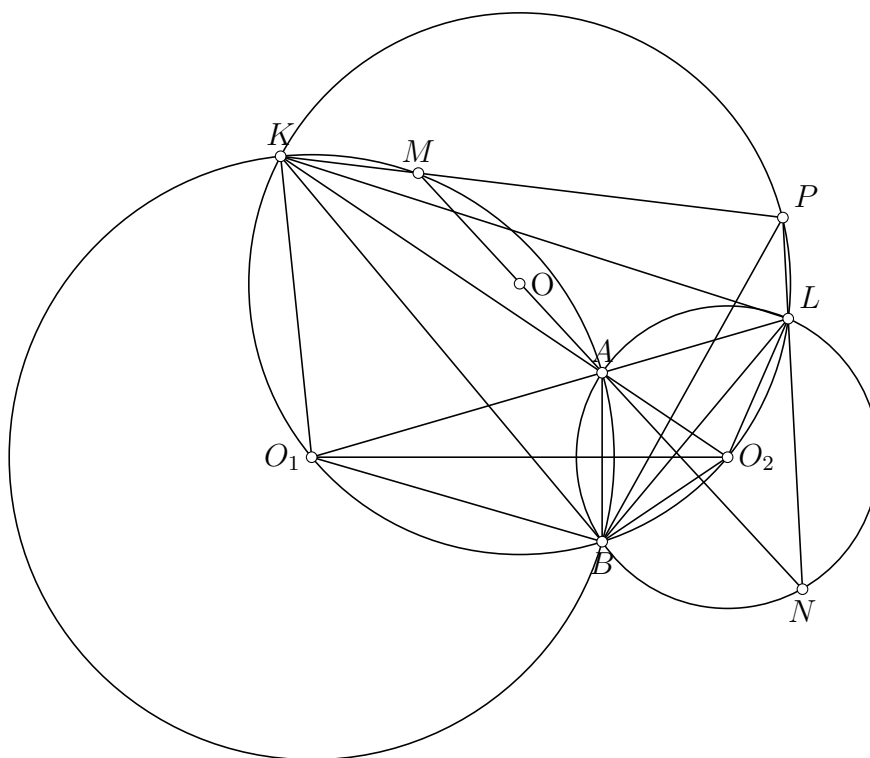
□

Câu 4.

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có bán kính khác nhau, cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho O_1, O_2 thuộc hai nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB . Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác BO_1O_2 cắt (O_1) và (O_2) lần lượt tại K và L khác A, B . Đường thẳng AO cắt (O_1) và (O_2) lần lượt tại M và N (khác A). Hai đường thẳng MK và NL cắt nhau tại P sao cho P và B thuộc hai nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng KL . Chứng minh rằng

- a) Tứ giác $BKPL$ nội tiếp đường tròn.
 b) Điểm A cách đều hai đường thẳng BK và BL .
 c) Điểm P thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi tam giác PKL cân.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{PKB} = 180^\circ - \widehat{MAB} = \widehat{BAN} = \widehat{BLN} = 180^\circ - \widehat{BLP}$
 $\Rightarrow \widehat{PKB} + \widehat{BLP} = 180^\circ$ suy ra tứ giác $BLKP$ nội tiếp.

b) Ta có
 $\widehat{BKO_2} = \widehat{BO_1O_2}$ (chắn cung $\widehat{BO_2}$)
 $= \frac{1}{2} \widehat{BOA} = \widehat{BKA}$
 $\Rightarrow K, A, O_2$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta được L, A, O_1 thẳng hàng.

$$\text{Do đó } \widehat{KBA} = \frac{1}{2} \widehat{KO_1A} = \frac{180^\circ - \widehat{KAO_1}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{LAO_2}}{2} = \frac{\widehat{LO_2A}}{2} = \widehat{LBA}.$$

Suy ra BA là phân giác $\widehat{KBL}$ hay A cách đều BK và BL .

c) Ta có
 $\widehat{PMN} = \widehat{KBA} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{KA} \right)$
 $= \widehat{LBA} = \widehat{PNM} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AL} \right)$

Suy ra $\triangle PMN$ cân tại P .

Nếu $P \in AB \Rightarrow \widehat{PMA} = \widehat{PBK} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AK} \right)$
 $\Rightarrow \triangle PMA \sim \triangle PBK \Rightarrow PM.PK = PA.PB$.

Chứng minh tương tự $PA.PB = PN.PM$

Suy ra $PM.PK = PA.PB = PN.PM \Rightarrow \triangle PKL \sim \triangle PNM \Rightarrow \triangle PKL$ cân.

Nếu $PK = PL \Rightarrow PK.PM = PL.PN$

Gọi A' và A'' là giao điểm của PB với (O_1) và (O_2) .

Suy ra $PK.PM = PA'.PB = PL.PN = PA''.PB$

Suy ra A' trùng A'' trùng $A \Rightarrow P \in AB$.

□

Câu 5.

- a) Cho $x, y > 0$ và $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 6x^2 + 4y^2 + 10xy + \frac{4x}{y} + \frac{3y}{x} + 2016$.
- b) Tìm các bộ số nguyên dương (x, y, z) biết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ và $\sqrt{x - y + z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} M &= (x + y) \left(6x + 4y + \frac{4}{y} + \frac{3}{x} \right) + 2009 \\ &\geq 3 \left(3x + \frac{3}{x} + y + \frac{4}{y} + 3x + 3y \right) + 2009 \\ &\geq 3(6 + 4 + 9) + 2009 = 2066 \end{aligned}$$

Đấu = xảy ra khi $x = 1; y = 2$.

- b) $\sqrt{x - y + z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} \Leftrightarrow y - \sqrt{xy} - \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} - \sqrt{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ y = x \end{cases}$$

TH1: $x = y = z$ suy ra $(x, y, z) = (3; 3; 3)$.

TH2: $y = z \neq x$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 2) = 2$ suy ra $(x, y, z) = (2; 4; 4)$.

TH3: $x = y \neq z$ tìm được $(x, y, z) = (4; 4; 2)$.

Vậy có 3 bộ thỏa mãn $(3; 3; 3)(2; 4; 4)(4; 4; 2)$.

□

———— HẾT ————

44 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC SƠN LA

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{x-2+\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{x+2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$.
- b) Tìm x để $P = \sqrt{x} + \frac{5}{2}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện : $x > 0$
Ta có $P = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.
- b) Với điều kiện $x > 0$.
 $P = \sqrt{x} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{5}{2}$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- b) Trong trường hợp phương trình (1) có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Tìm m để biểu thức $C = 2(x_1 + x_2) - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải.

- a) Ta có: $\Delta = (m+1)^2 - (m^2 + 4) = 2m - 3$.
Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ P = x_1x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$.
Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 > 0 \\ m^2 + 4 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.
- b) Với $m \geq \frac{3}{2}$.

Theo hệ thức Vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$.

Suy ra $C = 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4(m+1) - (m^2 + 4) = -m^2 + 4m = 4 - (m-2)^2 \leq 4$.

Dấu = có khi $m = 2$ (thỏa mãn).

Vậy khi $m = 2$ thì C đạt giá trị lớn nhất là 4.

□

Câu 3. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$

Lời giải.

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}, t \geq 0$. Ta có

$$t^2 = 1 + 2\sqrt{x(1-x)} \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

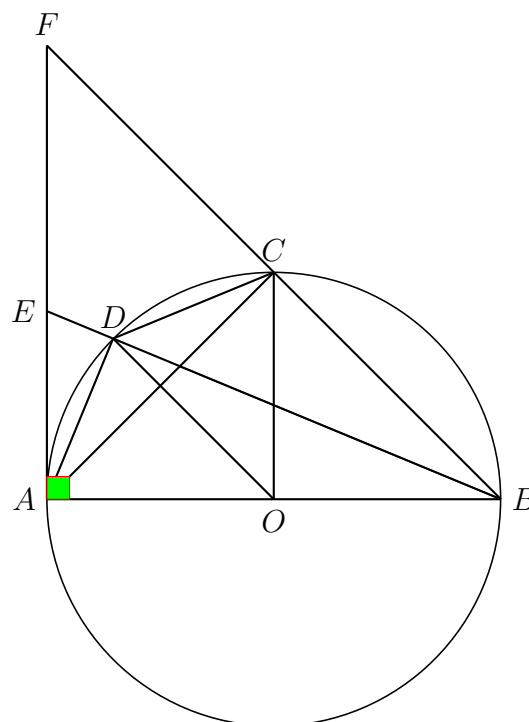
$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -3.$$

So với điều kiện ta được $t = 1$. Khi đó, $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$. $\square$

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB có bán kính R , Ax là tiếp tuyến với đường tròn tại A . Trên Ax lấy điểm F , BF cắt đường tròn tại C , tia phân giác của góc ABF cắt Ax tại E và cắt đường tròn tại D .

- Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
- Chứng minh hệ thức: $BD.BE = BC.BF$.
- Xác định số đo của góc ABC để tứ giác $AOCD$ là hình thoi. Tính diện tích hình thoi $AOCD$ theo R .

Lời giải.



- Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
Ta có: $\widehat{CDB} = \widehat{CAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BC}$).
 $\widehat{CAB} = \widehat{CFA}$ (cùng phụ $\widehat{FAC}$).
 $\Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{CFE}$. Nên $\widehat{CDE} + \widehat{CFE} = \widehat{CDE} + \widehat{CDB} = 180^\circ$. Do đó tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
- Chứng minh hệ thức: $BD.BE = BC.BF$.
 $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)), $\Rightarrow AD \perp BE$.
 $\triangle EAB$ vuông ở A có $AD \perp BE$ nên: $AB^2 = BD.BE$, (1).
 $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow AC \perp BF$.
 $\triangle FAB$ vuông ở A có $AC \perp BF$ nên $AB^2 = BC.BF$, (2).
Từ (1) và (2) suy ra: $BD.BE = BC.BF$. (Cách khác: chứng minh $\triangle BCD \sim \triangle BEF$)

c) Xác định số đo của góc $\widehat{ABC}$ để tứ giác $AOCD$ là hình thoi.

Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ (do BD là phân giác $\widehat{ABC}$)

$\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CD}$. Tứ giác $AOCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow OA = AD = DC = OC \Leftrightarrow AD = DC = R$.

$\Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{DC} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{AC} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$.

Vậy $\widehat{ABC} = 60^\circ$ thì tứ giác $AOCD$ là hình thoi.

Tính diện tích hình thoi $AOCD$ theo R :

$$\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow AC = R\sqrt{3}. \text{ Suy ra } S_{AODC} = \frac{1}{2}OD.AC = \frac{1}{2}.R.R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

□

Câu 5.

a) Chứng minh rằng trong 27 số tự nhiên khác nhau tùy ý nhỏ hơn 100 có thể chọn được hai số có ước số chung lớn nhất khác 1.

b) .Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Lời giải.

a) Từ 0 đến 100 có 26 số nguyên tố. Mỗi số tự nhiên đều biểu diễn được thành tích các thừa số nguyên tố với các số mũ tương ứng (dạng phân tích tiêu chuẩn). Khi phân tích 27 số đã cho ra thừa số nguyên tố dạng tiêu chuẩn sẽ có ít nhất hai số cùng chứa một thừa số nguyên tố với số mũ nào đó. Hai số này có ước chung khác 1.

b) Với $a, b > 0$ ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 \geq 0 &\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Áp dụng kết quả này ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Tương tự,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2y+z} &\leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right); \\ \frac{1}{x+y+2z} &\leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right). \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

□

———— HẾT ————

45 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI - VÒNG 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right)$$

với $0 < a < 1$. Chứng minh rằng $P = -1$.

Lời giải.

Với $0 < a < 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{(1-a)(1+a)} - (\sqrt{1-a})^2} \right) \left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \right) \left(\frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{a} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{2\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a} - (1-a) - (1+a)}{2a} \\ &= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{[-(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})^2]}{2a} \\ &= -\frac{(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})}{2a} \\ &= -\frac{(1+a-(1-a))}{2a} \\ &= -1. \end{aligned}$$

□

Câu 2. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = 2mx - 1$ với m là tham số.

- Tìm tọa độ giao điểm của d và P khi $m = 1$.
- Chứng minh rằng với mọi m , d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi y_1, y_2 là tung độ của A và B . Tìm m sao cho $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$.

Lời giải.

- Khi $m = 1$ ta có $d: y = 2x - 1$ và $(P): y = -x^2$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$-x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 2\sqrt{2};$$

$$\text{Với } x = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy các giao điểm của d và (P) là $(-1 - \sqrt{2}, -3 - 2\sqrt{2}); (-1 + \sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2})$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $-x^2 = 2mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2mx - 1 = 0$ (1)

Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0 \forall m$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 phân biệt với mọi

m hay d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với $\begin{cases} y_1 = 2mx_1 - 1 \\ y_2 = 2mx_2 - 1 \end{cases}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}|y_1^2 - y_2^2| &= |(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)| \\ &= |(2mx_1 - 1 - 2mx_2 + 1)(2mx_1 - 1 + 2mx_2 - 1)| \\ &= |4m(x_1 - x_2)[m(x_1 + x_2) - 1]| \end{aligned}$$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$.

Ta có $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}$.

Vậy $|y_1^2 - y_2^2| = 4|m|(2m^2 + 1) \cdot 2\sqrt{m^2 + 1}$, do đó

$$|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 64m^2(2m^2 + 1)^2(m^2 + 1) = 45 \Leftrightarrow 64(4m^4 + 4m^2 + 1)(m^4 + m^2) = 45$$

Đặt $t = m^4 + m^2, t \geq 0$ ta được phương trình $64t(4t + 1) = 45 \Leftrightarrow 256t^2 + 64t - 45 = 0$. (2)

Giải (2), kết hợp với điều kiện $t \geq 0$ ta được $t = \frac{5}{16}$

$$\text{Từ đó suy ra } m^4 + m^2 = \frac{5}{16} \Leftrightarrow 16m^4 + 16m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{1}{4} \\ m^2 = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

□

Câu 3. Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km. Vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB còn lại bằng $\frac{1}{2}$ vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B người đó nghỉ lại 30 phút rồi trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10 km/h. Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A .

Lời giải.

Gọi vận tốc của xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu là x (km/h), $x > 0$.

Vận tốc của xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $0,5x$ (km/h).

Vận tốc của xe máy khi đi quay trở lại từ B về A là $x + 10$ (km/h).

Tổng thời gian của chuyến đi là $\frac{90}{x} + \frac{30}{0,5x} + \frac{120}{x + 10} + \frac{1}{2} = 8,5$ (1)

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{90}{x} + \frac{60}{x} + \frac{120}{x + 10} = 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{150}{x} + \frac{120}{x + 10} = 8 \\ &\Leftrightarrow 75(x + 10) + 60x = 4x(x + 10) \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 95x - 750 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 30 \text{ (do } x > 0\text{).} \end{aligned}$$

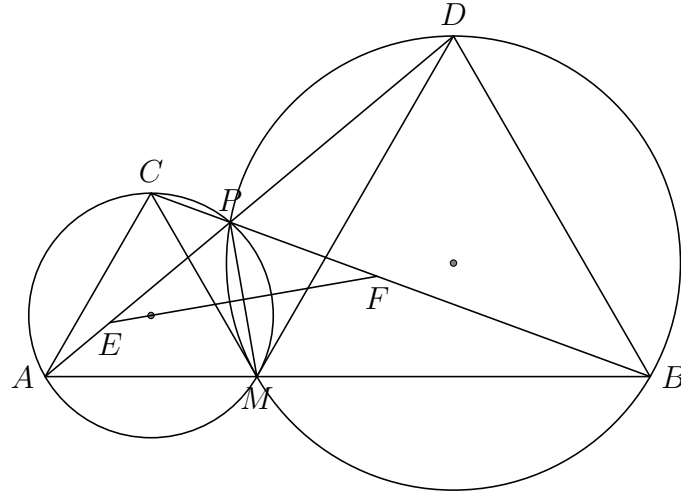
Vậy vận tốc của xe máy trên quãng đường đi từ B về A là $30 + 10 = 40$ (km/h). □

Câu 4. Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A và B . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB dựng hai tam giác đều AMC và BMD . Gọi P là giao điểm của AD và BC .

a) Chứng minh $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.

- b) Chứng minh $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = AB$.
- c) Đường nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ cắt PA và PB tại E và F . Chứng minh $CDEF$ là hình thang.

Lời giải.



- a) Vì $\widehat{CMA} = \widehat{DMB} = 60^\circ$ nên $\widehat{CMB} = \widehat{DMA} = 120^\circ$. Xét $\triangle CMB$ và $\triangle AMD$ ta có
- $$\begin{cases} CM = AM \\ \widehat{CMB} = \widehat{DMA} \Rightarrow \triangle CMB = \triangle AMD \\ MB = MD \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} \widehat{MCB} = \widehat{MAD} \\ \widehat{MBC} = \widehat{MDA} \end{cases}$.

Do đó $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.

- b) Vì $AMPC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CPM} = 180^\circ - \widehat{CAM} = 120^\circ = \widehat{CMB}$.
 Từ đó suy ra $\triangle CPM \sim \triangle CMB \Rightarrow \frac{CP}{CM} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow CP.CB = CM^2 \Rightarrow CM = \sqrt{CP.CB}$.
 Tương tự ta chứng minh được $DM = \sqrt{DP.DA}$.
 Vậy $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = CM + DM = AM + BM = AB$.

- c) Ta có EF là đường trung trực của PM suy ra $EP = EM$, do đó $\triangle EPM$ cân tại E .
 Mặt khác $\widehat{EPM} = \widehat{ACM} = 60^\circ$ (do $AMPC$ là tứ giác nội tiếp). Từ đó suy $\triangle EPM$ đều, do đó $PE = PM$. Tương tự chứng minh được $PF = PM$.
 Ta có $CM \parallel DB$ nên $\widehat{PCM} = \widehat{PBD}$.
 Mà $BMPD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{PBD} = \widehat{PMD} \Rightarrow \widehat{PCM} = \widehat{PMD}$.
 Ta lại có $\widehat{CPM} = \widehat{DPM} = 120^\circ \Rightarrow \triangle CPM \sim \triangle MPD \Rightarrow \frac{CP}{MP} = \frac{PM}{PD} \Rightarrow \frac{CP}{PF} = \frac{PE}{PD}$.
 Theo định lý Ta-lét đảo ta có $CE \parallel DF \Rightarrow CDEF$ là hình thang.

□

Câu 5. Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq 7.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \geq 0 \\ b(1-b) \geq 0 \\ c(1-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^2 \\ b \geq b^2 \\ c \geq c^2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{5a+4} \geq \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} \Rightarrow \sqrt{5a+4} \geq a+2. \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \begin{cases} \sqrt{5b+4} \geq b+2 \\ \sqrt{5c+4} \geq c+2 \end{cases}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} &\geq a+2 + b+2 + c+2 \\ &\geq a+b+c+6 \\ &\geq 7. \end{aligned}$$

□

———— **HẾT** ————

46 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TOÁN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI VÒNG 2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Chứng minh biểu thức sau nhận giá trị nguyên dương với mọi giá trị nguyên dương của n :

$$P = \left(\sqrt{n^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + n^2} \right) \sqrt{4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1}}$$

Lời giải.

Xét với n nguyên dương, chú ý rằng $\sqrt{n^2 + (n+1)^2} \cdot \sqrt{(n-1)^2 + n^2} = \sqrt{4n^4 + 1}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{n^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + n^2} \right)^2 &= n^2 + (n+1)^2 + 2\sqrt{4n^4 + 1} + (n-1)^2 + n^2 \\ &= 4n^2 + 2 + 2\sqrt{4n^4 + 1} \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} P &= \left(\sqrt{n^2 + (n+1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + n^2} \right) \sqrt{4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1}} \\ &= \sqrt{4n^2 + 2 + 2\sqrt{4n^4 + 1}} \cdot \sqrt{4n^2 + 2 - 2\sqrt{4n^4 + 1}} \\ &= \sqrt{(4n^2 + 2)^2 - (2\sqrt{4n^4 + 1})^2} \\ &= \sqrt{16n^4 + 16n^2 + 4 - (16n^4 + 4)} = 4n \end{aligned}$$

Vì n nguyên dương nên P nguyên dương, ta có điều phải chứng minh. □

Câu 2.

a) Tìm số nguyên dương x, y thỏa mãn: $x^3 - y^3 = 95(x^2 + y^2)$.

b) Tìm các số thực x, y thỏa mãn:

$$\frac{x^2 - 4}{x} + \frac{y^2 - 4}{y} + 8 = 4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1})$$

Lời giải.

a) Trước tiên ta chứng minh $(x^2 + xy + y^2)$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi x và y cùng chia hết cho 5.

Thật vậy, nếu $(x^2 + xy + y^2):5$ thì $(x^3 - y^3):5$. Xét các số dư của x và y khi chia cho 5, ta thấy chỉ có $x \equiv y \pmod{5}$ thỏa mãn. Cho $x \equiv y \equiv k \pmod{5}$, ta có $(x^2 + xy + y^2) \equiv 3k^2 \equiv 0 \pmod{5}$. Vậy $k = 0$ và nhận xét được chứng minh.

Quay trở lại bài toán, vì vế phải dương nên $x > y$. Xét $(x; y) = d$ thì $x_1 = \frac{x}{d}; y_1 = \frac{y}{d}$ nguyên tố cùng nhau và $95(x_1^2 + y_1^2):(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)$.

Giả sử tồn tại q nguyên tố thỏa mãn $(x_1^2 + y_1^2, x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2):q$ thì $x_1y_1:q$. Vậy $x_1:q$ hoặc $y_1:q$. Lại có $(x_1^2 + y_1^2):q$ nên x_1, y_1 cùng chia hết cho q (vô lý).

Vậy $(x_1^2 + y_1^2, x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) = 1$, suy ra $95:(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)$. Lại theo nhận xét đã chứng minh và từ $(x_1, y_1) = 1$, ta có $(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)$ không chia hết cho 5. Vậy $19:(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)$.

Vì $x > y$ nên $x_1 > y_1$. Xét các trường hợp:

Nếu $y_1 = 1$ thì không có x_1 thỏa mãn.

Nếu $y_1 = 2$ thì $x_1 = 3$ (thỏa mãn).

Nếu $y_1 > 2$ thì $19 < 3^2 + 3.4 + 4^2 = 37 \leq (x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2)$.

Đặt $x = 3d$, $y = 2d$, ta có $19d^3 = 95.13d^2 \Rightarrow d = 65$. Vậy $(x, y) = (195, 130)$.

b) Điều kiện xác định: $x \geq 1$, $y \geq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4}{x} + \frac{y^2 - 4}{y} + 8 &= 4(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 4}{x} - 4\sqrt{x-1} + 4 \right) + \left(\frac{y^2 - 4}{y} - 4\sqrt{y-1} + 4 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x - 4 - 4x\sqrt{x-1}}{x} + \frac{y^2 + 4y - 4 - 4y\sqrt{y-1}}{y} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x - 2\sqrt{x-1})^2}{x} + \frac{(y - 2\sqrt{y-1})^2}{y} &= 0 \end{aligned}$$

Vì $x \geq 1$, $y \geq 1$ nên $\frac{(x - 2\sqrt{x-1})^2}{x} + \frac{(y - 2\sqrt{y-1})^2}{y} \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 2$.

Vậy $x = y = 2$.

□

Câu 3. Cho S là tập hợp các số nguyên dương n có dạng $n = x^2 + 3y^2$ trong đó x, y là các số nguyên. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a, b \in S$ thì $ab \in S$.

b) Nếu $N \in S$ và N chẵn thì N chia hết cho 4 và $\frac{N}{4} \in S$.

Lời giải.

a) Nếu $a, b \in S$ thì $a = m^2 + 3n^2$ và $b = p^2 + 3q^2$.

$$\text{Ta có } ab = (m^2 + 3n^2)(p^2 + 3q^2) = (mp + 3nq)^2 + 3(mq - pn)^2.$$

Vậy $ab \in S$.

b) Nếu $N \in S$ thì $N = x^2 + 3y^2$. Dĩ nhiên nếu $2 \mid x$ thì từ N chẵn, ta có $2 \mid y$, trường hợp này hiển nhiên $\frac{N}{4} \in S$.

Xét x, y đều lẻ, ta có $x^2 - 9y^2 \equiv 1 - 9 \equiv 0 \pmod{8}$, do đó $4 \mid x - 3y$ hoặc $4 \mid x + 3y$. Giả sử $4 \mid x - 3y$ (trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Khi đó:

$$\frac{N}{4} = \left(\frac{x - 3y}{4} \right)^2 + 3 \left(\frac{x + y}{4} \right)^2$$

Vậy $\frac{N}{4} \in S$

□

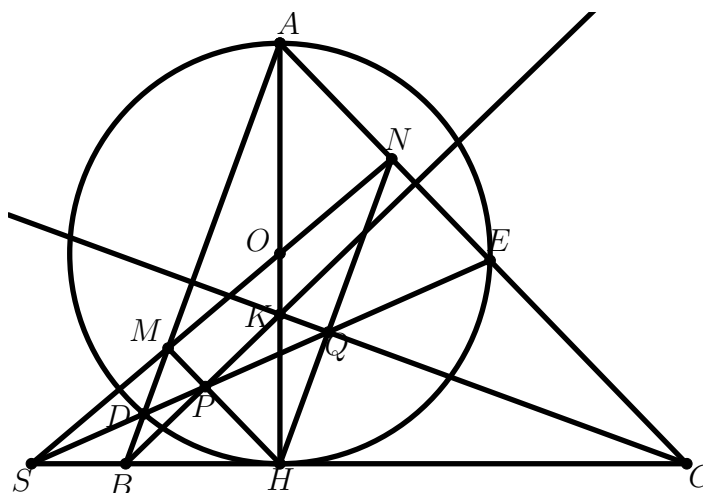
Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn $AB < AC$. Kẻ đường cao AH . Đường tròn (O) đường kính AH cắt cạnh AB, AC tương ứng tại D, E . Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại S .

a) Chứng minh rằng $BDEC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $SB \cdot SC = SH^2$.

c) Đường thẳng SO cắt AB, AC tương ứng tại M, N , đường thẳng DE cắt HM, HN tương ứng tại P, Q . Chứng minh rằng: BP, CQ và AH đồng quy.

Lời giải.



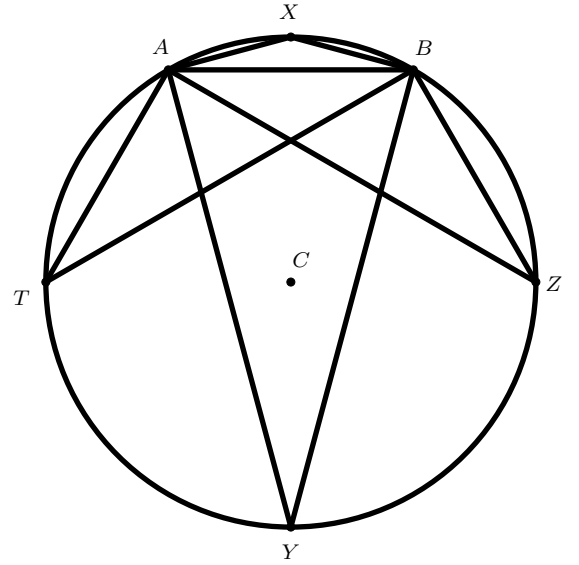
- 1

Lời giải.

Giả sử không tồn tại tam giác cân nào có 3 đỉnh cùng màu. Dễ thấy trên mặt phẳng tồn tại ít nhất 2 đỉnh cùng màu. Giả sử là 2 đỉnh A, B màu xanh. Dựng tam giác đều ABC thì C không thể màu xanh nên không mất tính tổng quát ta giả sử rằng C màu đỏ. Dựng đường tròn tâm C

đi qua A, B như sau:

Trên đường tròn xét 4 điểm X, Y, Z, T là điểm chính giữa cung nhỏ, cung lớn AB và điểm chính giữa hai cung XY . Dễ thấy các tam giác ABX, ABY, ABZ, ABT đều là những tam giác cân. Do đó X, Y, Z, T đều không thể có màu xanh. Mặt khác nếu trong 4 điểm đó có 2 điểm màu đỏ thì cùng với C tạo thành tam giác cân, vô lý. Vậy nhiều nhất chỉ có 1 điểm màu đỏ và điểm còn lại là ít nhất 3 điểm vàng. 3 điểm đó tạo thành tam giác cân, trái với giả sử. Vậy điều giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.



□

———— HẾT ————

47 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐHSP HCM, VÒNG 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

- a) Quảng đường từ A đến B dài 50 km. Một người dự định đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi đi được 2 giờ, do xe bị hỏng nên người ấy phải dừng lại 30 phút để sửa xe. Vì vậy muốn đến B đúng thời gian đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đi xe đạp.
- b) Giải phương trình $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+25} = 0$.

Lời giải.

- a) Gọi vận tốc ban đầu của người đi xe đạp là x km/h. Theo bài ra ta có phương trình

$$(x+2) \left(\frac{50}{x} - \frac{5}{2} \right) = 50 - 2x \Leftrightarrow x = 10.$$

- b) ĐKXD: $x \geq -4$. Phương trình ban đầu tương đương với

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ 2\sqrt{(x+4)(x+9)} = 12 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 12 \\ 3x^2 + 76x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

□

Câu 2.

- a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta luôn có $n^7 - n$ chia hết cho 42.
- b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\frac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên.

Lời giải.

- a) Ta có $n^7 - n = n(n+1)(n-1)$ suy ra $6 \mid n^7 - n$. Ngoài ra, theo định lý Fermat nhỏ thì $7 \mid n^7 - n$. Vì $(6, 7) = 1$ nên $42 \mid n^7 - n$.
- b) $x \in \mathbb{Z}, \frac{x-3}{x^2+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x^2+1) \mid (x-3)(x+3) \Rightarrow (x^2+1) \mid 10 \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 3\}$.

□

Câu 3.

- a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} \geq 2(a+b+c).$$

- b) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq \frac{5}{2}$.

Lời giải.

- a) Ta có $\begin{cases} \sqrt{2(a^2+b^2)} \geq a+b \\ \sqrt{2(b^2+c^2)} \geq b+c \\ \sqrt{2(c^2+a^2)} \geq a+c \end{cases}$. Cộng theo vế các bất đẳng thức ta được điều cần chứng minh.

- b) Áp dụng BDT Cauchy ta được

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} + \left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right) \geq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

□

Câu 4. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$.

- a) Tính giá trị của $xy + yz + zx$ và chứng minh rằng $\frac{2}{3} \leq z \leq 2$.
 b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + z^3$.

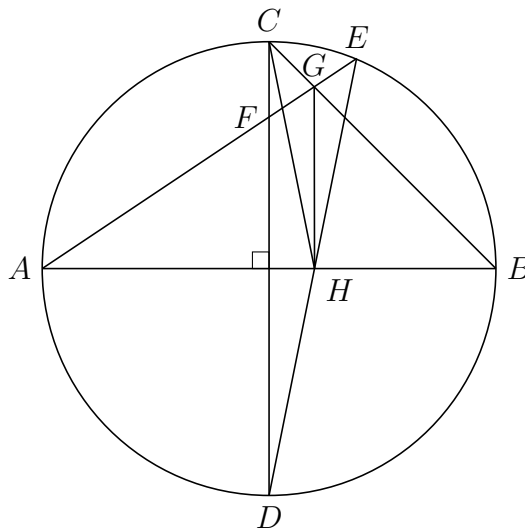
Lời giải.

- a) Ta có: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = 5$
 Ta có $\begin{cases} x + y = 4 - z \\ xy = 5 - 4z + z^2 \end{cases}$ do đó x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - (4 - z)X + 5 - 4z + z^2$.
 Điều kiện phương trình có nghiệm là $3z^2 - 8z + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq z \leq 2$.
 b) Chứng minh tương tự: $\frac{2}{3} \leq x \leq 2, \frac{2}{3} \leq y \leq 2$.
 $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 4$
 + Từ $x, y, z \leq 2$ suy ra $(x - 2)(y - 2)(z - 2) \leq 0 \Leftrightarrow P \leq 10$ ($x = 2, y = z = 1$).
 + Từ $x, y, z \geq \frac{2}{3}$ suy ra $P \geq \frac{86}{9}$ ($x = \frac{2}{3}, y = z = \frac{5}{3}$). □

Câu 5. Cho đường tròn tâm O bán kính R có hai đường kính vuông góc với nhau là AB và CD . Trên cung nhỏ BC lấy điểm E (khác B, C), AE cắt CD tại F . Gọi giao điểm của CB và AE là G , giao điểm của ED và AB là H .

- a) Chứng minh rằng AE là phân giác của góc CED và tứ giác $FOBE$ nội tiếp.
 b) Chứng minh $GH \parallel CD$.
 c) Chứng minh G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE .

Lời giải.

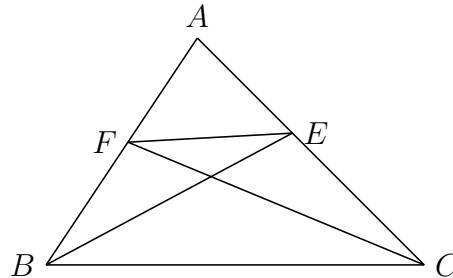


- a) Ta có $AB \perp CD$ nên $\widehat{AC} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{DEA}$. Suy ra AE là tia phân giác $\widehat{CED}$. Tứ giác $FOBE$ nội tiếp.
 b) $\widehat{AC} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{HBG} = \widehat{HEG} \Rightarrow GEBH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{GHO} = \widehat{GEB} = 90^\circ \Rightarrow GH \parallel CD$.
 c) $GH \parallel CD \Rightarrow \widehat{GHE} = \widehat{CDH}, \widehat{CHG} = \widehat{DCH} \Rightarrow HG$ là phân giác $\widehat{CHE}$. Hay G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHE . □

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Gọi BE và CF là các phân giác trong của tam giác ABC .

- a) Chứng minh rằng tam giác AEF có ba góc nhọn.
 b) Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng EF . Gọi H, D, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Chứng minh rằng $MH = MD + MK$.

Lời giải.



- a) Ta có $\frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{AC}{AB+BC} \Rightarrow AE = \frac{AB \cdot AC}{AB+BC}$. Tương tự $AF = \frac{AB \cdot AC}{AC+BC}$. Vì $AB < AC$ nên $AE > AF$.
 $\triangle AEF$ có $AE > AF$ suy ra $\widehat{AFE} > \widehat{AEF}$. Vẽ $FL \parallel BC$ ($L \in AC$) suy ra $\frac{LC}{LA} = \frac{FB}{FA} = \frac{BC}{AB} < \frac{BC}{AC} = \frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{LC}{LA} < \frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{AC}{LA} < \frac{AC}{AE} \Rightarrow LA > AE \Rightarrow \widehat{AFE} < \widehat{AFL} = \widehat{ABC} < 90^\circ$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.
 b) Gọi N, V lần lượt là hình chiếu của E trên BC, AB . Gọi G, J lần lượt là hình chiếu của F trên BC, AC . P là giao điểm của MH và NF . Ta có $EN = EV, FJ = FG$.
 $\frac{MD}{FJ} = \frac{EM}{EF} = \frac{NP}{NF} = \frac{PH}{FG} \Rightarrow MD = PH; \frac{MK}{EV} = \frac{FM}{EF} = \frac{MP}{EN} \Rightarrow MK = MP$.
 Do đó, $MH = PH + MP = MD + MK$.

□

Câu 7. Cho các số tự nhiên a, b, c, d bất kì. Chứng minh rằng tích của 6 số $a - b, b - c, c - d, d - a, a - c, b - d$ là một số nguyên chia hết cho 12.

Lời giải.

Đặt $M = (a - b)(b - c)(c - d)(d - a)(a - c)(b - d)$. Các số a, b, c, d chia cho 3 dư 0, 1 hoặc 2 suy ra tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 3. Do đó, $3 \mid M$.

Ngoài ra, ta cũng dễ chứng minh được $4 \mid M$ mà $(3, 4) = 1$ nên $12 \mid M$.

□

————— **HẾT** —————

48 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC TÂY NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Tính $T = \sqrt{8} + \sqrt{49} - 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $T = \sqrt{8} + \sqrt{49} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 7 - 2\sqrt{2} = 7$. □

Câu 2. Giải phương trình $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4.2.2 = 9$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-(-5) - 3}{4} = \frac{1}{2}$ và $x_2 = \frac{-(-5) + 3}{4} = 2$. □

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc cạnh BC), cho $BH = 2$ và $CH = m$. Xác định m để đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn có tâm là điểm A và có bán kính $R = 4$. Khi đó tính độ dài các cạnh AB và AC .

Lời giải.

Để BC tiếp xúc với đường tròn ($A, R = 4$) thì $AH = 4$.

Mặt khác tam giác ABC vuông tại A nên ta có $AH^2 = BH.CH \Leftrightarrow 4^2 = 2.m \Leftrightarrow m = 8$. □

Câu 4. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 2 = 0$ có nghiệm x_1, x_2 sao cho $T = x_1 + x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta' = (m-1)^2 - m^2 - 2 = -2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$. (1)

Theo định lí Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$$
 (2)

Ta có $T = (x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) - ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) = -2(m - \frac{5}{2})^2 + \frac{21}{2} \leq \frac{21}{2}$ (theo (2)).

Vậy $T_{\max} = \frac{21}{2}$ khi $m = \frac{5}{2}$. □

Câu 5. Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có $\Delta_1 = m^2 - 4n$.

Phương trình $x^2 + nx + m = 0$ có $\Delta_2 = n^2 - 4m$.

Theo bài ra ta có $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow mn = 2(m+n)$. (*) □

Thay (*) vào $\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + n^2 - 4(m+n)$ ta được

$$\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + n^2 - 2mn = (m+n)^2 \geq 0.$$

Vậy ít nhất một trong hai Δ_1, Δ_2 phải lớn hơn hoặc bằng 0, có nghĩa là phương trình đã cho luôn có nghiệm. □

Câu 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 2x = y^3 - 8y \\ 3(x^2 + 1) = y^2 - 3. \end{cases}$$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} x(x^2 + 2) = y(y^2 - 8) & (1) \\ 3(x^2 + 2) = y^2. & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta thấy $y \neq 0$, nên chia tương ứng hai vế phương trình (1) cho hai vế phương trình (2) ta được

$$\frac{x}{3} = y - \frac{8}{y} \Leftrightarrow xy = 3y^2 - 24 \Leftrightarrow y(3y - x) = 24. \quad (3)$$

Từ đó ta cũng có

$$9(x^2 + 2) = 3y^2 = 24 + xy \Rightarrow 9x^2 - xy = 6 \Leftrightarrow x(9x - y) = 6. \quad (4)$$

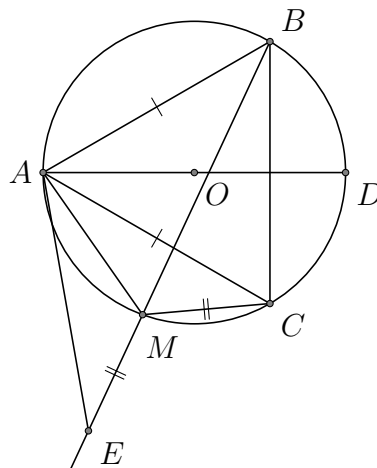
Từ (4) ta thấy $x \neq 0$ và $9x - y \neq 0$, nên chia (3) cho (4) ta được

$$\frac{3y^2 - xy}{9x^2 - xy} = 4 \Leftrightarrow 36x^2 - 3xy - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = -4x. \end{cases}$$

- Với $y = 3x$, thay vào phương trình (2) ta có $3x^2 + 6 = 9x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$
- Với $y = -4x$, thay vào phương trình (2) ta có $3x^2 + 6 = 16x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{6}{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{6}{13}} \\ x = \sqrt{\frac{6}{13}} \end{cases}$ □

Câu 7. Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD . Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ $\widehat{AC}$ của đường tròn (O) (M khác A và C), trên tia BM lấy một điểm E sao cho $ME = MC$ (E ở ngoài đoạn BM). Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AE luôn đi qua B và C .

Lời giải.



Nhận thấy số $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ suy ra góc $\widehat{AMC} = \widehat{AME}$. (1)

Xét hai tam giác AMC và AME có

$$\begin{aligned} & AM \text{ chung,} \\ & \widehat{AMC} = \widehat{AME} \text{ (theo (1)),} \\ & MC = ME \text{ (gt)} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle AME \Rightarrow AE = AC = AB$.

Vậy đường tròn tâm A bán kính AE luôn đi qua B và C .

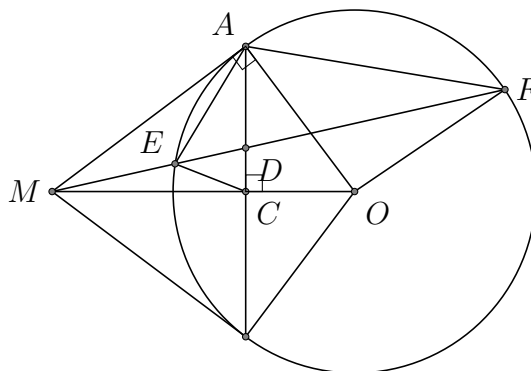
□

Câu 8. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là giao điểm của MO và AB , lấy D thuộc đoạn thẳng AC (D khác A và C). Đường thẳng MD cắt (O) tại hai điểm E và F ($ME < MF$).

a) Chứng minh rằng $MA^2 = ME.MF$.

b) Chứng minh rằng bốn điểm E, C, O, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



a) Xét hai tam giác AME và FMA có

$$\widehat{AME} = \widehat{FMA}$$

$$\widehat{MAE} = \widehat{MFA} \text{ (cùng chắn cung } \widehat{AE})$$

$$\text{Vậy } \triangle AME \sim \triangle FMA \text{ (g-g), suy ra } \frac{AM}{FM} = \frac{ME}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = ME.MF. \quad (1)$$

b) Do tam giác MAO vuông tại A nên ta có $MA^2 = MC.MO$. (2)

Xét hai tam giác MCE và MFO có

$$\widehat{CME} = \widehat{FMO}$$

$$\frac{ME}{MO} = \frac{MC}{MF} \text{ (do (1) và (2))}$$

Vậy $\triangle MCE \sim \triangle MFO$ (c-g-c), suy ra $\widehat{MCE} = \widehat{MFO}$, suy ra tứ giác $COFE$ nội tiếp.

□

Câu 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{9}{1 - (ab + bc + ca)} + \frac{1}{4abc}$.

Lời giải.

Ta có

$$1 - (ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{9}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{\sum a}{4abc} = \frac{9}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{1}{4} \sum \frac{1}{ab} \\ &\geq \frac{9}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{1}{4} \frac{9}{\sum ab} = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{1}{\sum a^2 + \sum ab} + \frac{1}{2 \sum ab} \right) \geq \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{9}{2(\sum a)^2} \right) \\ &= \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

□

———— HẾT ————

49 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI BÌNH - VÒNG 2**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Giải phương trình $5x - (x + 3)\sqrt{2x - 1} - 1 = 0$.
- b) Cho hai số thực a, b bất kì. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + 2ax + 3ab = 0 \quad (26)$$

$$x^2 + 2bx - 8ab = 0. \quad (27)$$

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} 4(x - 1) - (x + 3)(\sqrt{2x - 1} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x - 1) - \frac{2(x + 3)(x - 1)}{\sqrt{2x - 1} + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1) \left(4 - \frac{2(x + 3)}{\sqrt{2x - 1} + 1} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1) \frac{(1 - \sqrt{2x - 1})(\sqrt{2x - 1} - 3)}{\sqrt{2x - 1} + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 5 \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 5$.

- b) Phương trình (1) có $\Delta_1 = 4a^2 - 12ab$ (3)

Phương trình (2) có $\Delta'_2 = b^2 + 8ab$ (4)

Từ (3), (4) ta có $\Delta_1 + \Delta'_2 = 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2 \geq 0$.

Từ đó suy ra ít nhất một phương trình phải có nghiệm. □

Câu 2.

- a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $9x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x + 2y - 35 = 0$.
- b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và thỏa mãn $P(2016) = 2016$, $P(2016) = 2018$. Tính giá trị của biểu thức $-3P(2018) + P(2019)$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} 9x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x + 2y - 35 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9x^2 + y^2 + 1 + 6xy - 6x - y + 2y^2 + 4y + 2 &= 38 \\ (3x + y - 1)^2 + 2(y + 1)^2 &= 38 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $(3x + y - 1)^2$ là số chính phương chẵn và nhỏ hơn 38, nên ta có

$$\bullet (3x + y - 1)^2 = 0 \Rightarrow (y + 1)^2 = 19 \text{ (loại),}$$

- $(3x + y - 1)^2 = 4 \Rightarrow (y + 1)^2 = 17$ (loại),
- $(3x + y - 1)^2 = 16 \Rightarrow (y + 1)^2 = 11$ (loại),
- $(3x + y - 1)^2 = 36 \Rightarrow (y + 1)^2 = 1$ (thỏa mãn).

Giải hệ $\begin{cases} (3x + y - 1)^2 = 36 \\ (y + 1)^2 = 1 \end{cases}$ ta được các cặp nghiệm nguyên: $(-1; -2); (3; -2)$.

b) Đặt $Q(x) = P(x) - x - 1$.

Ta có $Q(2016) = Q(2017) = 0$ nên $Q(x) = (x - 2016)(x - 2017)(x - a)$.

Suy ra

$$P(x) = (x - 2016)(x - 2017)(x - a) + x + 1.$$

Từ đó ta có

$$-3P(2018) + P(2019) = -4031.$$

□

Câu 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 + \sqrt{8x^4 - 2y} = 2(2x^4 + 3) \\ \sqrt{2x^2 + x + y} + 2\sqrt{x + 2y} = \sqrt{9x - 2x^2 + 19y}. \end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $a = 2x^2$, $b = x + y$, $c = x + 2y$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} + 2\sqrt{c} &= \sqrt{10c - a - b} \Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{c(a+b)} = 3c \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a+b} + \sqrt{c})^2 = (2\sqrt{c})^2 \Leftrightarrow a + b = c. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $y = 2x^2 \geq 0$ (*), thay vào phương trình thứ nhất ta có

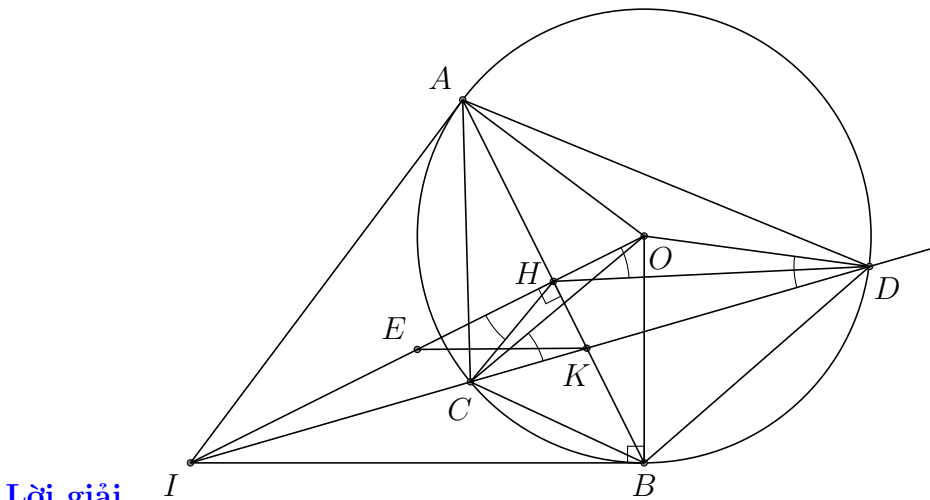
$$\begin{aligned} y^3 + \sqrt{2y^2 - 2y} &= y^2 + 6 \\ &\Leftrightarrow y^3 - y^2 - 4 + \sqrt{2y^2 - 2y} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - 2) \left(y^2 + y + 2 + \frac{2(y+1)}{\sqrt{2y^2 - 2y} + 2} \right) = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Do (*) nên (**) $\Leftrightarrow y = 2$. Từ đó suy ra $x = \pm 1$.

□

Câu 4. Từ một điểm I nằm bên ngoài đường tròn (O) , vẽ các tiếp tuyến IA, IB (A, B là các tiếp điểm) và vẽ cát tuyến ICD (không qua tâm O) với đường tròn (C nằm giữa I và D).

- Chứng minh rằng $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.
- Gọi K là giao điểm của CD và AB , E là trung điểm của OI . Chứng minh rằng $KA \cdot KB = OE^2 - EK^2$.
- Gọi H là trung điểm của AB . Chứng minh rằng $\widehat{ADH} = \widehat{IDB}$.



Lời giải.

a) Ta có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BIC} = \widehat{DIB} \\ \widehat{IBC} = \widehat{IDB} \text{ (cùng chắn cung } \widehat{BC}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle IBC \sim \triangle IDB \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IB} = \frac{BC}{DB}. \quad (1)$$

Ta lại có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AIC} = \widehat{DIA} \\ \widehat{IAC} = \widehat{IDA} \text{ (cùng chắn cung } \widehat{AC}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle IAC \sim \triangle IDA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{DA}. \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra $\frac{AC}{DA} = \frac{BC}{DB} \Rightarrow AC \cdot BD = AD \cdot BC$ (do $IA = IB$).

b) Ta có

$$\begin{aligned} KA \cdot KB &= (AH + HK)(BH - HK) = AH^2 - HK^2 \\ &= (AE^2 - EH^2) - (EK^2 - EH^2) = AE^2 - EK^2 = OE^2 - EK^2. \end{aligned}$$

c) Dễ thấy tam giác OBI vuông tại B và có BH là đường cao, suy ra $IB^2 = IH \cdot IO$. (3)

Từ (1)(3) ta được $IH \cdot IO = IC \cdot ID$, suy ra tứ giác $CDOH$ nội tiếp. Từ đó suy ra

$$\widehat{OHD} = \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \widehat{CHI} \Rightarrow \widehat{CHK} = \widehat{DHK}.$$

Vậy HB là phân giác góc $\widehat{CHD}$ suy ra $\widehat{DHB} = \frac{1}{2} \widehat{DHC}$. (4)

Cũng do tứ giác $CDOH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{COD} = \widehat{DHC}$. (5)

Từ (4)(5) suy ra $\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{COD} = \frac{1}{2} \widehat{CHD} = \widehat{DHB}$. Mặt khác $\widehat{DHB} + \widehat{DHA} = 180^\circ$ và $\widehat{CBD} + \widehat{CAD} = 180^\circ$ nên $\widehat{CBD} = \widehat{HAD}$. (6)

Mà theo bài ra, tứ giác $ACBD$ nội tiếp nên $\widehat{HAD} = \widehat{BCD}$. (7)

Từ (6)(7) ta có $\triangle BCD \sim \triangle HAD$ (g-g), suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{IDB}$.

□

Câu 5. Cho các số thực $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ và thỏa mãn $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 52$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + y + z$.

Lời giải.

Ta có $5(x^2 + y^2 + z^2) = 52 + 2x^2 + y^2 \geq 52 + 2 + 1 = 55$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \geq 11$. (1)

Ta lại có $(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy + 1 \geq x + y$.

Tương tự ta có $yz + 1 \geq y + z; xz + 1 \geq x + z$.

Từ đó suy ra $xy + yz + zx + 3 \geq 2x + 2y + 2z \Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) + 6 \geq 4(x + y + z)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra

$$(x + y + z)^2 + 6 \geq 4(x + y + z) + 11$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 - 4(x + y + z) - 5 \geq 0$$

Giải ra ta được $F = x + y + z \geq 5$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 3$. □

————— **HẾT** —————

50 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI NGUYÊN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x & (1) \\ x(x^2 + y^2) = 10y & (2) \end{cases}$$
 với x, y cùng dấu.

Lời giải.

+ Nếu $y = 0$ thì $x = 0 \Rightarrow (0; 0)$ là nghiệm của hệ.

+ Nếu $y \neq 0$ thì đặt $x = ky$ ($k > 0$) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y(k^2y^2 - y^2) = 3ky \\ ky(k^2y^2 + y^2) = 10y \end{cases} \Rightarrow \frac{2(k^2 - 1)}{k(k^2 + 1)} = \frac{3k}{10} \Rightarrow 3k^4 - 17k^2 + 20 = 0$$

$$\Rightarrow k = \pm 2 \vee k = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Do $k > 0$ nên $k = 2$ hoặc $k = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

- Với $k = 2 \Rightarrow x = 2y$, thay vào (1) ta được $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

$\Rightarrow (2; 1) \vee (-2; -1)$ là nghiệm của hệ

- Với $k = \sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}}y$, thay vào (1) ta được

$$2y\left(\frac{5}{3}y^2 - y^2\right) = 15y \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{3\sqrt{15}}{4}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5\sqrt{15}}{4}}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm: $(2; 1), (-2, -1), \left(\sqrt{\frac{5\sqrt{15}}{4}}; \sqrt{\frac{3\sqrt{15}}{4}}\right), \left(-\sqrt{\frac{5\sqrt{15}}{4}}; -\sqrt{\frac{3\sqrt{15}}{4}}\right)$

□

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{x + 6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-9}}.$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 9 \\ x \geq 6\sqrt{x-9} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 9.$$

Ta có $P = \sqrt{(3 + \sqrt{x-9})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{x-9})^2} = |3 + \sqrt{x-9}| + |3 - \sqrt{x-9}|$.

Do tính chất $|A| + |B| \geq |A + B|$. Dấu "=" xảy ra khi $AB \geq 0$ nên

$$P = |3 + \sqrt{x-9}| + |3 - \sqrt{x-9}| \geq |3 + \sqrt{x-9} + 3 - \sqrt{x-9}| = 6$$

Dấu "=" xảy ra khi $(3 + \sqrt{x-9})(3 - \sqrt{x-9}) \geq 0 \Leftrightarrow 9 - (x-9) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 18$.

Vậy $\min P = 6$ khi $9 \leq x \leq 18$

□

Câu 3. Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình:

$$2xy + x + y = 87.$$

Lời giải.

Ta có $2xy + x + y = 83 \Leftrightarrow 4xy + 2x + 2y = 166 \Leftrightarrow (2x + 1)(2y + 1) = 167$.

Do 167 là số nguyên tố nên $2x + 1$ chỉ có thể là một trong 4 số $\pm 1, \pm 167$.

- Với $2x + 1 = 1$ ta được $x = 0, y = 83$.
- Với $2x + 1 = -1$ ta được $x = -1, y = -84$.
- Với $2x + 1 = 167$ ta được $x = 83, y = 0$.
- Với $2x + 1 = -167$ ta được $x = -84, y = -1$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên (x, y) là $(0; 83), (-1; -84), (83; 0), (-84; -1)$. $\square$

Câu 4. Tìm tất cả các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\sqrt[3]{\overline{abcde}} = \overline{ab}$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{abcde} = 1000\overline{ab} + \overline{cde}$.

Ta lại có $1000\overline{ab} + \overline{cde} = (\overline{ab})^3$. Đặt $m = \overline{ab}, n = \overline{cde}$ ta được

$$1000m + n = m^3 \Rightarrow m^3 \geq 1000m \Rightarrow m^2 \geq 1000 \Rightarrow m \geq 32 \quad (1)$$

Vì $n < 1000$ nên $m^3 < 1000m + 1000 \Rightarrow m(m^2 - 1000) < 1000$.

Nếu $m \geq 33$ thì $m(m^2 - 1000) \geq 33.89 = 2937 \geq 1000$ (vô lý).

Do đó $m < 33$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $m = 32$.

Vậy $\overline{abcde} = 32^3 = 32768$. $\square$

Câu 5. Cho ba số a, b, c nguyên dương, nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Chứng minh $a + b$ là số chính phương.

Lời giải.

Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ suy ra $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c(a+b) = ab \Leftrightarrow ab - ac - bc = 0 \quad (1)$

Cộng hai vế của (1) với c^2 ta được $(a-c)(b-c) = c^2 \quad (2)$

Nếu d là ước nguyên dương của $a-c$ và $b-c$ thì $c^2 : d^2$

Do đó $c : d$, mà $a-c$ và $b-c$ cùng chia hết cho d nên d là ước của a, b, c . Theo giả thiết a, b, c nguyên tố cùng nhau nên $d = 1$.

Vậy $a-c$ và $b-c$ không có ước chung lớn hơn 1, mà $(a-c)(b-c)$ là số chính phương nên $a-c$ và $b-c$ là số chính phương khác nhau.

Đặt $a-c = k^2, b-c = m^2 \Rightarrow c^2 = (a-c)(b-c) = k^2 m^2 \Rightarrow c = km$

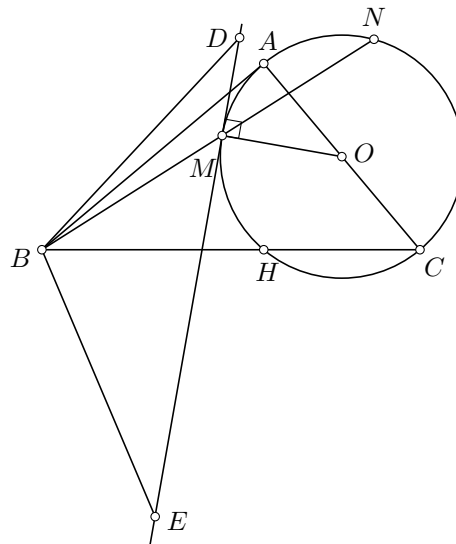
$\Rightarrow a+b = (a-c) + (b-c) + 2c = k^2 + m^2 + 2km = (k+m)^2$

Vậy $a+b$ là số chính phương. $\square$

Câu 6. Cho đường tròn tâm O và dây cung AB . Từ một điểm M bất kỳ trên đường tròn (M khác A và B), kẻ $MH \perp AB$ tại H . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF , cắt dây cung AB tại D . Chứng minh rằng:

$$\frac{MA^2}{MB^2} = \frac{AH}{BD} \cdot \frac{AD}{BH}.$$

Lời giải.



- a. Vì $AH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$. Suy ra AC là đường kính của đường tròn (O) . Mà $\triangle ABC$ vuông tại A nên AB là tiếp tuyến của (O) .

Xét các tam giác BAM và BNA có: $\widehat{ABN}$ chung và $\widehat{BAM} = \widehat{BNA}$ (có số đo bằng nửa số đo cung AM). Vậy $\triangle BAM$ và $\triangle BNA$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{BA}{BN} \Rightarrow BM \cdot BN = BA^2$.

Theo giả thiết $BA = BD \Rightarrow BM \cdot BN = BD^2 \Rightarrow \frac{BM}{BD} = \frac{BD}{BN}$.

Mặt khác $\widehat{DBN}$ là góc chung của $\triangle BDM$ và $\triangle BND$.

Vậy nên $\triangle BDM \sim \triangle BND \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{BND}$.

Ta có $BD = BE \Rightarrow \triangle BDE$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{BND} = \widehat{BED}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDNE$ nội tiếp được trong một đường tròn.

- b. Kí hiệu đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDNE$ là (O') .

Giả sử (O) và (O') không tiếp xúc nhau. Vì (O) và (O') có điểm chung N nên chúng điểm chung thứ hai là N' và BN' cắt DE tại điểm M' khác M .

Các tam giác BDM' và $BN'D$ có: $\widehat{DBN'}$ chung, $\widehat{BN'D} = \widehat{BED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DB của (O')), $\widehat{BED} = \widehat{BDE} \Rightarrow \widehat{BN'D} = \widehat{BDE}$

Vậy nên các tam giác BDM' và $BN'D$ đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{BM'}{BD} = \frac{BD}{BN'} \Rightarrow BM' \cdot BN' = BD^2.$$

$$\text{Ta có } BM \cdot BN = BD^2 \text{ nên } BM' \cdot BN' = BM \cdot BN \Rightarrow \frac{BM}{BN'} = \frac{BM'}{BN}.$$

Hai tam giác BMM' và $BN'N$ có $\widehat{NBN'}$ chung và $\frac{BM}{BN'} = \frac{BM'}{BN}$ nên chúng đồng dạng $\Rightarrow \widehat{BMM'} = \widehat{BN'N} \Rightarrow \widehat{BN'N} + \widehat{M'MN} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $M'MNN'$ nội tiếp đường tròn.

Đường tròn ngoại tiếp $M'MNN'$ và (O) có chung nhau ba điểm M, N, N' nên chúng trùng nhau $\Rightarrow M'$ là điểm chung thứ hai của (O) và tiếp tuyến DE . Điều này vô lý nên giả sử sai.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDNE$ và đường tròn (O) tiếp xúc nhau.

□

———— HẾT ————

51 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ với a, b là các số dương khác nhau.
Thu gọn rồi tính giá trị của biểu thức P biết $(a - 1)(b - 1) + 2\sqrt{ab} = 1$.
- b) Cho phương trình $x^2 - x + b = 0$ có các nghiệm là x_1, x_2 và phương trình $x^2 - 97x + a = 0$ có các nghiệm là x_1^4, x_2^4 . Tìm giá trị của a .

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} + \frac{-a\sqrt{b} + a\sqrt{a} - b\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{b - a} \\ &= \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b} + \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{b - a} + \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a - b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta $ab - a + 2\sqrt{ab} - b = 0 \Leftrightarrow ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \sqrt{ab} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}|$.

$$\text{Từ đó } P = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a > b \\ -1 & \text{nếu } a < b \end{cases}.$$

- b) Theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = b \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_1^4 + x_2^4 = 97 \\ x_1^4 x_2^4 = a \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} 97 &= x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 \\ &= [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (2b - 1)^2 - 2b^2 \\ &= 2b^2 - 4b + 1. \end{aligned}$$

Suy ra $b = 8$ hoặc $b = -6$.

Với $b = 8$ thì phương trình $x^2 - x + b = 0$ vô nghiệm.

Với $b = -6$ thì phương trình $x^2 - x + b = 0$ có hai nghiệm phân biệt, khi đó, $a = b^4 = 1296$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $(9x^2 - 18x + 5)(3x^2 - 4x) - 7 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x + 3y} + \sqrt{2x - 3y} = 3\sqrt{2y} \\ 2\sqrt{2x + 3y} - \sqrt{2x - 3y} = 6 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 3x(3x-5)(3x-1)(3x-4) - 21 &= 0 \\ \Leftrightarrow (9x^2 - 15x)(9x^2 - 15x + 4) - 21 &= 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = 9x^2 - 15x + 2$ phương trình trở thành $t^2 - 4 - 21 = 0$ hay $t = \pm 5$.

Với $t = 5$ ta có $9x^2 - 15x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{3}$.

Với $t = -5$, ta có $9x^2 - 15x + 7 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{3}$.

b) Điều kiện của phương trình là
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 0 \\ 2x - 3y \geq 0. \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $a = \sqrt{2x+3y} \geq 0$, $\sqrt{2x-3y} \geq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} a + b = 3\sqrt{2y} & (1) \\ 2a - b = 6 & (2) \end{cases}.$$

Ta có $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 = 6y$, suy ra $3\sqrt{2y}(a-b) = 6y$. Từ hệ phương trình ta thấy $y \neq 0$, suy ra $a-b = \sqrt{2y}$, suy ra $a-b = \frac{1}{3}(a+b)$ hay $a = 2b$. Thay vào (2) ta được $b = 2$, suy ra $a = 4$. Từ đó

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}.$$

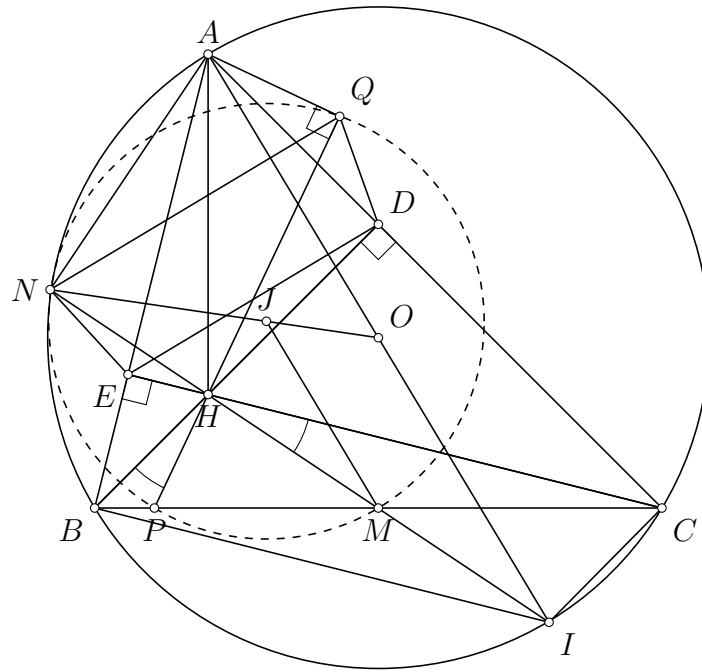
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(5; 2)$.

□

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , $AB < AC$, các đường cao BD , CE cắt nhau tại H (D thuộc AC , E thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC , tia MH cắt đường tròn (O) tại N .

- Chứng minh rằng năm điểm A, D, H, E, N cùng nằm trên một đường tròn.
- Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $\widehat{BHP} = \widehat{CHM}$, Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng HP . Chứng minh rằng tứ giác $DENQ$ là hình thang cân.
- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O) .

Lời giải.



- a) Gọi I là điểm đối xứng với A qua O . Khi đó $\begin{cases} IB \parallel CE \text{ (cùng vuông góc với } AB) \\ IC \parallel BD \text{ (cùng vuông góc với } AC) \end{cases}$, suy ra

$HBIC$ là hình bình hành, do đó H, I, M thẳng hàng, kéo theo $\widehat{ANH} = 90^\circ$. Mặt khác $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$ nên năm điểm A, D, E, H, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AH .

- b) Dễ thấy Q cũng thuộc đường tròn đường kính AH và $\widehat{QHD} = \widehat{BHP} = \widehat{MHC} = \widehat{NHE}$ nên $NE = QD$. Hai dây cung NE và QD bằng nhau nên tứ giác $NQDE$ là hình thang cân.

- c) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ .

Hai góc $\widehat{NAH}$ và $\widehat{NMP}$ có các cạnh đối một vuông góc nên $\widehat{NMP} = \widehat{NAH}$. Mà $\widehat{NAH} = \widehat{NQH}$ nên $\widehat{NMP} = \widehat{NQP}$ hay tứ giác $MPNQ$ nội tiếp đường tròn (J).

Ta có $\triangle MEN = \triangle MDQ$ (c.g.c) nên $MN = MQ$, do đó MJ là đường trung trực của NQ mà $NQ \parallel DE$ nên $MJ \perp DE$.

Lại có $\widehat{BAI} + \widehat{DEA} = \widehat{BCI} + \widehat{BCA} = 90^\circ$ nên $AO \perp DE$. Suy ra $MJ \parallel OI$. Do đó $\widehat{JNM} = \widehat{JMN} = \widehat{OIN} = \widehat{ONI}$. Từ đó N, I, O thẳng hàng.

Vậy đường tròn (O) và đường tròn (J) tiếp xúc với nhau tại N .

□

Câu 4. Cho $a, b, c > 0$, $a + b + c \geq 9$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 2\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5}} + 3\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{25}{c}}.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$a^2 + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{5} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{25}{c} \geq \frac{(1+3+5)^2}{a+b+c} = \frac{81}{a+b+c}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &\geq 2 \cdot \frac{a+b+c}{3} + 3 \cdot \frac{9}{\sqrt{a+b+c}} \\ &\geq \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{3} + \frac{9}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{9}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{9}{\sqrt{a+b+c}} \\ &\geq 5 \sqrt[5]{\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{9}{\sqrt{a+b+c}} \cdot \frac{9}{\sqrt{a+b+c}} \cdot \frac{9}{\sqrt{a+b+c}}} \\ &\geq 5 \sqrt[5]{81 \sqrt{a+b+c}} \\ &\geq 15. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 1, b = 3, c = 5$.

Vậy $\min A = 15$. □

Câu 5.

- Tìm tất cả các số nguyên $m \geq n \geq 0$ sao cho $(m+2n)^3$ là ước của $9n(m^2+mn+n^2)+16$.
- Trong dãy 2016 số thực $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016}$, ta đánh dấu tất cả các số dương và số mà có ít nhất một tổng của nó với một số các số liên tiếp ngay sau nó là một số dương (ví dụ trong dãy $-6, 5, -3, 3, 1, -1, -2, -3, \dots, -2011$ ta đánh dấu các số $a_2 = 5, a_3 = -3, a_4 = 3, a_5 = 1$). Chứng minh rằng nếu trong dãy đã cho có ít nhất một số dương thì tổng tất cả các số được đánh dấu là một số dương.

Lời giải.

- Từ giả thiết suy ra

$$0 \leq 9n(m^2+mn+n^2)+16-(m+2n)^3 = 16-(m-n)^3.$$

Đặt $A = 16 - (m-n)^3$. Do $m \geq n$ nên ta có ba trường hợp sau:

Trường hợp 1. $m = n$.

Khi đó $A : (m+2n)^3$, suy ra $16 : 27n^3$. Không tồn tại n thoả mãn.

Trường hợp 2. $m = n+1$.

Khi đó $A : (m+2n)^3$, suy ra $15 : (3n+1)^3$. Từ đó, ta có $n = 0$ và $m = 1$.

Trường hợp 3. $m = n+2$.

Khi đó $8 : (3n+2)^3$, suy ra $n = 0$ và $m = 2$.

Vậy các cặp (m, n) cần tìm là $(1, 0)$ và $(2, 0)$.

- Nếu các số được đánh dấu gồm toàn số không âm thì bài toán hiển nhiên. Giả sử có ít nhất một số được đánh dấu là số âm, kí hiệu là a_i . Gọi j là chỉ số nhỏ nhất ($j > i$) sao cho $A = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j > 0$ và $a_j > 0$. Khi đó với mọi $i \leq k < j$ ta đều có $A_k = a_i + a_{i+1} + \dots + a_k \leq 0$.

Suy ra $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_j = A - A_k > 0$ hay a_{k+1} cũng là số được đánh dấu. Do đó các số $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ đều được đánh dấu.

Vậy tổng tất cả các số được đánh dấu phải là một số dương.



———— HẾT ————

52 ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VĨNH LONG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$. Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.
- b) Cho biểu thức $B = \frac{2}{1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}} - \frac{9}{\sqrt[3]{243}}$. Chứng minh rằng B là số nguyên.

Lời giải.

- a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{4(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{x-2\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{4(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{-2}{x-1}. \end{aligned}$$

Ta có A nguyên khi và chỉ khi $\frac{-2}{x-1}$ nguyên.

Suy ra $x-1$ là ước của -2 , từ đó suy ra

$$\begin{cases} x-1 = -2 \\ x-1 = -1 \\ x-1 = 1 \\ x-1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (Không thỏa điều kiện)} \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy x nhận các giá trị $x = 0, x = 2, x = 3$.

- b) Ta có $(\sqrt[3]{3}-1)(1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1^3 = 2$
- $$\Rightarrow \frac{2}{1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}} = \frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{2} = \sqrt[3]{3} - 1.$$

$$\text{Ta có } \frac{9}{\sqrt[3]{243}} = \frac{\sqrt[3]{3^6}}{\sqrt[3]{3^5}} = \sqrt[3]{3}$$

$$B = \sqrt[3]{3} - 1 - \sqrt[3]{3} = -1.$$

Vậy B là số nguyên. □

Câu 2. Cho phương trình: $x^2 - (m+2)x + (m+1) = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3$.

Lời giải.

Ta có $a + b + c = 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = m + 1$.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ \sqrt{1} + \sqrt{m+1} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ \sqrt{m+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3. \quad \square$$

Câu 3.

- a) Giải phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1}$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x+y} = 4 \\ x^2 + 1 + y = -(x-1)^2(2x+y). \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} &= \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(3x-2)} &= x+2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 11x^2 - 24x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{11} \end{cases} \end{cases}.$$

So với điều kiện ta nhận nghiệm $x = 2$.

- b) Điều kiện: $x \neq 1; y \neq -2x$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x+y} = 4 \\ (x-1)^2 + 2x + y = -(x-1)^2(2x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x+y} = 4 \\ 2x + y + (x-1)^2 = -(x-1)^2(2x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x+y} = 4 \\ \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2x+y} = -1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{(x-1)^2} = a; \frac{1}{2x+y} = b \text{ ta có: } (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 4 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \\ \frac{1}{2x+y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \\ \frac{1}{2x+y} = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \Rightarrow y = -\frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(0; -\frac{1}{2}\right); \left(2; -\frac{9}{2}\right)$.

□

Câu 4.

- a) Chứng minh rằng $2(1^{2017} + 2^{2017} + \dots + 99^{2017})$ chia hết cho 9900.

- b) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ là các số nguyên và $b_1, b_2, \dots, b_{2017}$ là các số nguyên đó lấy theo thứ tự khác $(b_1, b_2, \dots, b_{2017})$ gọi là một hoán vị của $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$. Chứng minh rằng tích $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2017} - b_{2017})$ là một số chẵn.

Lời giải.

- a) Nhận xét: Nếu a, b là hai số nguyên dương thì $a^{2017} + b^{2017} : (a + b)$.

Khi đó ta có

$$2(1^{2017} + 2^{2017} + \dots + 99^{2017}) = (1^{2017} + 99^{2017}) + (2^{2017} + 98^{2017}) + \dots + (99^{2017} + 1^{2017}) : 100 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } 2(1^{2017} + 2^{2017} + \dots + 99^{2017}) = (1^{2017} + 98^{2017}) + (2^{2017} + 97^{2017}) + \dots + (98^{2017} + 1^{2017}) + 2.99^{2017} : 99 \quad (2).$$

Do $(99, 100) = 1$ và kết hợp với (1), (2) ta được $2(1^{2017} + 2^{2017} + \dots + 99^{2017})$ chia hết cho 9900.

- b) Ta có: $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{2017} - b_{2017})$
 $= (a_1 + a_2 + \dots + a_{2017}) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{2017}) = 0.$

Số thừa số của tích là số lẻ và tổng của chúng bằng 0 là số chẵn nên tất cả các thừa số không thể cùng lẻ (vì tổng các số lẻ là số lẻ) nên có ít nhất một thừa số $a_i - b_i$ chẵn suy ra tích $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2017} - b_{2017})$ là một số chẵn.

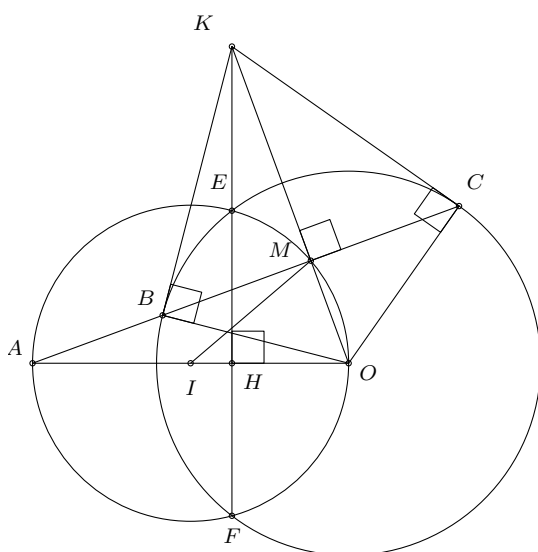
□

Câu 5. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy điểm A nằm ở ngoài đường tròn sao cho $OA > 2R$, từ A kẻ cát tuyến ABC với đường tròn (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B và C cắt nhau ở K . Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO cắt AO tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại E và F (E nằm giữa K và F). Gọi M là giao điểm của OK và BC , I là trung điểm OA . Chứng minh rằng:

- a) $KE \cdot KF = KM \cdot KO$.
 b) Tam giác IEF cân.
 c) Tứ giác $AEMO$ nội tiếp.

Lời giải.

Ta có hình vẽ:



- a) Xét $\triangle KCE$ và $\triangle KFC$, ta có:

$\widehat{FKC}$ chung.

$\widehat{KCE} = \widehat{KFC}$ ($\widehat{KCE}$ là góc hợp bởi tiếp tuyến và dây cung CE).

$$\Rightarrow \triangle KCE \sim \triangle KFC.$$

$$\Rightarrow \frac{KC}{KF} = \frac{KE}{KC} \Leftrightarrow KC^2 = KE.KF \quad (1)$$

Mặt khác :

$KB = KC; OB = OC \Rightarrow OK$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow OK \perp BC$ tại M .

Xét tam giác vuông OKC có : $KC^2 = KM.KO \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $KE.KF = KM.KO$. Ta có: $KE.KF = KM.KO \Rightarrow \frac{KE}{KO} = \frac{KM}{KF}$.

Xét $\triangle KEM$ và $\triangle KOF$, ta có:

$$\begin{cases} \frac{KE}{KO} = \frac{KM}{KF} \\ \widehat{FKO} \text{ chung} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle KEM \sim \triangle KOF \Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{KFO} \Rightarrow$ Tứ giác $EMOF$ nội tiếp.

- b) Xét $\triangle OEF$ ta có $OE = OF$ nên $\triangle OEF$ cân tại O và $OH \perp EF \Rightarrow OH$ là đường cao cũng là đường trung trực của EF .

- c) Điểm I thuộc OH cân tại I . Ta có: I thuộc đường trung trực của EF .

Xét tam giác AMO vuông tại M có: $IM = IO = IA \Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của MO .

Mà tứ giác $EMOF$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EMOF$ đường kính là AO .

Vậy tứ giác $AEMO$ nội tiếp.

□

Câu 6. Với x, y là hai số thực dương và $xy \geq 6$.

- a) Chứng minh rằng: $\frac{9}{9+x^2} + \frac{4}{4+y^2} \geq \frac{12}{6+xy}$.

- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{9}{9+x^2} + \frac{4}{4+y^2} + \frac{1}{3}xy$.

Lời giải.

- a) Đặt $x = 3a; y = 2b \Rightarrow ab \geq 1$.

$$\text{Ta có : } \frac{9}{9+x^2} + \frac{4}{4+y^2} \geq \frac{12}{6+xy} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}.$$

Ta cần chứng minh: với $ab \geq 1$ ta có:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}.$$

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{1+ab}{1+a^2} + \frac{1+ab}{1+b^2} \geq 2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+ab}{1+a^2} - 1 + \frac{1+ab}{1+b^2} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\left(\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)^2 \left(\frac{(ab-1)}{(1+a^2)}(1+b^2)\right) \geq 0 \text{ (đúng.)}$$

- b)
$$\begin{cases} T = \frac{9}{9+x^2} + \frac{4}{4+y^2} + \frac{1}{3}xy = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + 2ab \\ T \geq \frac{2}{1+ab} + 2ab \end{cases}.$$

$$T \geq \left(\frac{2}{1+ab} + \frac{2(1+ab)}{4} \right) + \frac{3ab}{2} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{1+ab} \cdot \frac{2(1+ab)}{4}} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 3.$$

$$\text{Khi } a = b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ do đó } T = 3.$$

Vậy $\min T = 3$.

□

———— HẾT ————

53 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN VINH PHÚC, VÒNG 1**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** Cho phương trình:

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

- a) Giải phương trình khi $m = 2$.
 b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

- a) Với $m = 2$ phương trình được viết lại là

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow S = \{2\}.$$

- b) Ta có $\Delta' = m^2 - m - 2$.

Phương trình có nghiệm duy nhất khi

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = 2.$$

□

Câu 2. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 \quad (x > 0; x \neq 1).$$

- a) Rút gọn A .
 b) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{\sqrt{x}} > 3$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 - (\sqrt{x} + 1)^2}{x - 1} \cdot \left(\frac{1 - x}{2\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \frac{-4\sqrt{x} (1 - x)^2}{x - 1} \cdot \frac{1}{4x} \\ &= \frac{1 - x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

- b) Ta có $\frac{A}{\sqrt{x}} > 3 \Leftrightarrow \frac{1 - x}{x} > 3 \Leftrightarrow \frac{1 - x}{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 4x}{x} > 0 \Leftrightarrow 1 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$.
 Vậy $0 < x < \frac{1}{4}$.

□

Câu 3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (m + 1)x - 2y = -1 \\ x + my = 5 \end{cases}, \quad \text{với } m \text{ là tham số.}$$

- a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.
 b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $5x + y$ lớn nhất.

Lời giải.

- a) Với $m = 2$ ta có

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 2)$.

- b) Ta có $\begin{cases} (m+1)x - 2y = -1 \\ x = 5 - my \end{cases}$

Thế phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$y = \frac{5m+6}{m^2+2} \Rightarrow x = \frac{10-m}{m^2+m+2}.$$

$$\text{Suy ra } 5x + y = \frac{56}{m^2+m+2}.$$

$$\text{Ta thấy } m^2 + m + 2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

$$\text{Suy ra } 5x + y \leq 32. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } m = \frac{1}{2}.$$

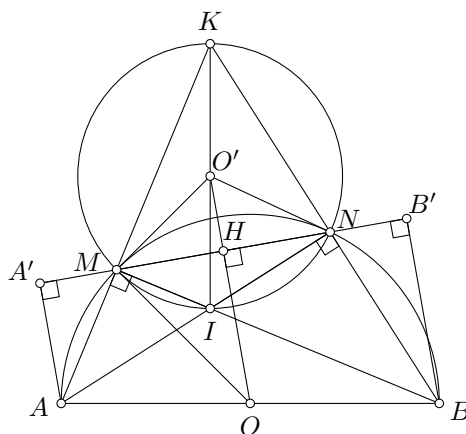
$$\text{Vậy } 5x + y \text{ đạt giá trị lớn nhất bằng } 32 \text{ khi } m = \frac{1}{2}.$$

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) có tâm là O và đường kính $AB = 2R$ (R là một số dương cho trước). Gọi M, N là hai điểm di động trên nửa đường tròn (O) sao cho M thuộc cung $\widehat{AN}$ và tổng khoảng cách từ A và B đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng AN và BM ; K là giao điểm của các đường thẳng AM và BN .

- a) Chứng minh rằng bốn điểm K, M, I, N cùng nằm trên một đường tròn (C) .
 b) Tính độ dài đoạn thẳng MN và bán kính đường tròn (C) theo R .
 c) Xác định vị trí của M, N sao cho tam giác KAB có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R .

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $\widehat{KMI} = \widehat{KNI} = 90^\circ$.
 Vậy bốn điểm K, M, I, N cùng nằm trên đường tròn (C) đường kính KI .

- b) Gọi A', B', H lần lượt là hình chiếu của A, B, O lên MN . Khi đó H là trung điểm của MN và OH là đường trung bình của hình thang vuông $AA'B'B$.

$$\text{Ta có } OH = \frac{1}{2}(AA' + BB') = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \text{ suy ra}$$

$$MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \frac{R}{2} \Rightarrow MN = R.$$

Do $MN = R$ nên $\triangle OMN$ đều, suy ra $\widehat{AKB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{MN}) = 60^\circ$.

Gọi O' là trung điểm của IK thì O' là tâm của đường tròn (C) , suy ra

$$\widehat{MO'N} = 2\widehat{MKN} = 120^\circ.$$

$$\text{Từ đó } O'M = \frac{MH}{\sin 60^\circ} = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy bán kính của đường tròn (C) bằng $\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

- c) Vì $\widehat{AKB} = 60^\circ$ nên điểm K nằm trên cung chứa góc 60° dựng trên đoạn $AB = 2R$.

Suy ra S_{KAB} lớn nhất khi $\triangle KAB$ đều.

Khi đó M, N là các điểm chia nửa đường tròn (O) thành 3 cung bằng nhau.

$$\text{Do đó } S_{KAB} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}.$$

□

Câu 5. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Lời giải.

Ta chứng minh $P \geq 2$.

(1)

Thật vậy : $P \geq 2 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \geq xyz$.

Từ giả thiết suy ra $0 \leq x, y, z \leq 2$, do đó $2xy + 2yz + 2xz \geq 2xy \geq xyz$.

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x; y; z) = (2; 0; 0)$ và các hoán vị.

Do đó $\min P = 2$.

Ta chứng minh $P \leq 3$. Thật vậy, theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} (2-x)(2-y)(2-z) &= 8 - xyz - 4P + 2(xy + yz + zx) \\ &= 8 - 4P + (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \\ &= 4 - 4P + P^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Caychy ta được

$$(2-x)(2-y)(2-z) \leq \left(\frac{6-(x+y+z)}{3} \right)^3 = \left(\frac{6-P}{3} \right)^3.$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{6-P}{3} \right)^3 \geq P^2 - 4P + 4 \Leftrightarrow P^3 + 9P^2 - 108 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (P-3)(P^2 + 12P + 36) \leq 0 \Leftrightarrow P \leq 3.$$

Vậy $P \leq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Do đó $\max P = 3$.

□

————— HẾT —————

54 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN VINH PHÚC - V2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho phương trình $x^4 + 3x^3 - mx^2 + 9x + 9 = 0$ (m là tham số).

- Giải phương trình khi $m = -2$.
- Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm dương.

Lời giải.

- Với $m = -2$, phương trình đã cho trở thành

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 9x + 9 = 0.$$

Ta thấy ngay $x \neq 0$, ta chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$x^2 + \frac{9}{x^2} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{3}{x}$, ta được phương trình: $t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = -4$.

Với $t = 1$ thì $x + \frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ (vô nghiệm).

Với $t = -4$ thì $x + \frac{3}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = -3$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = -1; x = -3$.

- Trong trường hợp tổng quát ta cũng đặt $x + \frac{x}{3} = t$ (Với $x > 0$ thì $t \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{x}{3}} = 2\sqrt{3}$) thì ta có phương trình: $t^2 + 3t - 6 - m = 0$ (1). Ta cần tìm điều kiện để phương trình (1) có nghiệm $t \geq 2\sqrt{3}$.

Xét $\Delta = 4m + 33 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-33}{4}$ khi đó (1) có nghiệm là $t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4m + 33}}{2}$.

Do đó (1) có nghiệm $t \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{-3 + \sqrt{4m + 33}}{2} \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m \geq 6(1 + \sqrt{3})$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \geq 6(1 + \sqrt{3})$.

□

Câu 2.

- Giải phương trình: $3x^2 - 4x\sqrt{4x - 3} + 4x - 3 = 0$.
- Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2)$.

Lời giải.

- ĐKXD: $x \geq \frac{3}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương: $(x - \sqrt{4x - 3})(3x - \sqrt{4x - 3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x - 3} = x \\ \sqrt{4x - 3} = 3x \end{cases}$

$$\sqrt{4x - 3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = 3.$$

$$\sqrt{4x - 3} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 3 = 9x^2 \end{cases} \text{ (VN).}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x = 1; x = 3$.

- Ta có $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2) \Leftrightarrow x^2 - y^2x - y^4(y^2 + 2) = 0$ (1).

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x , ta có $\Delta = y^4(4y^2 + 9) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = y^2\sqrt{4y^2 + 9}$.

(1) có nghiệm nguyên nên $4y^2 + 9$ phải là số chính phương, đặt $4y^2 + 9 = k^2 (k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó ta có $(k - 2y)(k + 2y) = 9$.

Xét các trường hợp và chú ý $k \in \mathbb{Z}$ ta được các bộ $(k, y) \in \{(5; 2); (5; -2); (3; 0)\}$.

Vậy các nghiệm cần tìm là $(x; y) \in \{(0; 0); (12; 2); (12; -2); (-8; 2); (-8; -2)\}$.

□

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$4(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 9.$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$4(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 27$$

$$\Leftrightarrow 4(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + b^3 + c^3) + 4(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq (a + b + c)^3$$

Ta có đẳng thức $(a + b + c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc$.

Do đó (1) tương đương với $a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$$

$$\geq 2a^2\sqrt{bc} + 2b^2\sqrt{ca} + 2c^2\sqrt{ab} \geq 6abc.$$

Vậy BĐT(1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

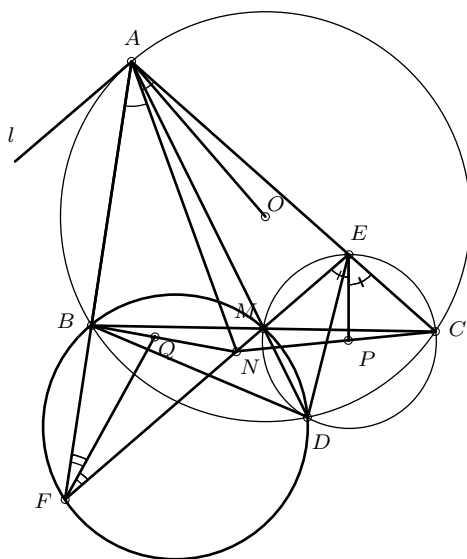
□

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC . AM cắt (O) tại điểm D khác A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B .

a) Chứng minh hai tam giác BDF, CDE đồng dạng và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $OA \perp EF$.

c) Phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt EF tại điểm N . Phân giác của các góc $\widehat{CEN}, \widehat{BFN}$ lần lượt cắt CN, BN tại P, Q . Chứng minh rằng PQ song song với BC .



Lời giải.

a) Do các tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $\widehat{DEC} = \widehat{DMC} = \widehat{DFB}$ (1).

Tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $\widehat{DCE} = \widehat{DCA} = \widehat{DBF}$ (2)

Từ (1);(2) suy ra $\triangle BDF \sim \triangle CDE$ (g - g).

Từ đó ta có $\widehat{EDC} = \widehat{BDF}$. Mà $\widehat{EMC} = \widehat{EDC}$; $\widehat{BMF} = \widehat{BDF}$.

Suy ra $\widehat{EMC} = \widehat{BMF}$. Vậy E, M, F là thẳng hàng.

b) Từ hai tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $AB \cdot AF = AM \cdot AD = AE \cdot AC$, suy ra tứ giác $BECF$ nội tiếp. Do đó $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

Vẽ tiếp tuyến Al của (O) thì $\widehat{ACB} = \widehat{BAI}$. Do đó $\widehat{BAI} = \widehat{AFE}$, suy ra $Al \parallel EF$.

Vậy $OA \perp EF$.

c) Ta có $\triangle BDF \sim \triangle CDE$ nên $\frac{S_{BDF}}{S_{CDE}} = \frac{BF^2}{CE^2}$.

Ta có $1 = \frac{MB}{MC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{DAB}}{S_{BDF}} \cdot \frac{S_{BDF}}{S_{CDE}} \cdot \frac{S_{CDE}}{S_{DAC}} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{BF^2}{CE^2} \cdot \frac{CE}{AC} = \frac{AB \cdot BF}{CE \cdot AC}$.

Từ đó $\frac{BF}{CE} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{NF}{NE} \Rightarrow \frac{EN}{EC} = \frac{FN}{FB}$ (3)

Theo tính chất phân giác ta có $\frac{PN}{PC} = \frac{EN}{EC}$ và $\frac{QN}{QB} = \frac{FN}{FB}$ (4).

Từ (3);(4) suy ra $\frac{PN}{PC} = \frac{QN}{QB}$. Do đó PQ song song với BC .

□

Câu 5. Tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 3n - 1; 3n\}$ với n là số nguyên dương được gọi là tập **cân đối** nếu có thể chia A thành n tập con $A_1; A_2; \dots; A_n$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

- i Mỗi tập hợp $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ gồm 3 số phân biệt và có một số bằng tổng của hai số còn lại.
- ii Các tập hợp $A_1; A_2; \dots; A_n$ đôi một không có phần tử chung.

Chứng minh rằng:

a) Tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 92; 93\}$ không là tập hợp **cân đối**.

b) Tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 830; 831\}$ là tập hợp **cân đối**.

Lời giải.

a) Giả sử tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 92; 93\}$ là tập **cân đối**, khi đó mỗi tập $A_i (i = \overline{1, 31})$ có dạng $\{x_i; y_i; x_i + u_i\}$, như vậy tổng ba phần tử trong A_i là số chẵn. Do đó tổng các phần tử của A là số chẵn.

Mặt khác tổng các phần tử của A là: $1 + 2 + 3 + \dots + 93 = \frac{93 \cdot 94}{2} = 93 \cdot 47$ là số lẻ.

Mẫu thuẫn này chỉ ra A là tập không **cân đối**.

b) **Nhận xét:** Nếu tập $S_n = \{1; 2; 3; \dots; n\}$, với n chia hết cho 3 là tập hợp **cân đối** thì tập $S_{4n} = \{1; 2; 3; \dots; 4n\}$ và $S_{4n+3} = \{1; 2; 3; \dots; 4n+3\}$ cũng là tập hợp **cân đối**.

Chứng minh. Từ tập S_{4n} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau:

$\{1; 2n+n; 2n+n+1\}; \{3; 2n+n-2; 2n+n+2\}; \{5; 2n+n-2; 2n+n+3\}; \dots; \{2n-1; 2n+1; 4n\}$.

Rõ ràng các tập con này đều thỏa mãn có một phần tử bằng tổng hai phần tử còn lại.

Còn lại các số sau trong tập S_{4n} là $2, 4, 6, \dots, 2n$. Tuy nhiên vì tập S_n là **cân đối** nên tập $\{2; 4; 6; \dots; 2n\}$ cũng **cân đối**. Vậy tập S_{4n} là tập **cân đối**.

Tương tự từ tập S_{4n+3} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau:

$\{1; 2n+n+2; 2n+n+3\}; \{3; 2n+n+2; 2n+n+4\}; \dots; \{2n+1; 2n+2; 4n+3\}$.

Và còn lại các số là $2; 4; 6; \dots; 2n$ vậy S_{4n+3} là tập **cân đối**.

Trở lại bài toán. Ta có

$$831 = 4 \cdot 207 + 3$$

$$207 = 4 \cdot 51 + 3$$

$$51 = 4 \cdot 12 + 3$$

$$12 = 4 \cdot 3$$

Chú ý là tập $\{1; 2; 3\}$ là **cân đối** nên theo nhận xét trên ta xây dựng được các tập hợp **cân đối** theo quy trình sau:

$\{1; 2; 3\} \rightarrow \{1; 2; \dots; 12\} \rightarrow \{1; 2; \dots; 51\} \rightarrow \{1; 2; \dots; 207\} \rightarrow \{1; 2; \dots; 831\}$.

Do đó tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 831\}$ là tập hợp **cân đối**. (đpcm)

□

————— **HẾT** —————

55 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC VÙNG TÀU, VÒNG 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$
- c) Giải phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Lời giải.

$$a) A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}+2-\sqrt{3} = 2.$$

$$b) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 11 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

$$c) \text{Ta có: } \Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-8) = 9 > 0.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-1+3}{1} = 2, x_2 = \frac{-1-3}{1} = -4$. □

Câu 2. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 4x - m$.

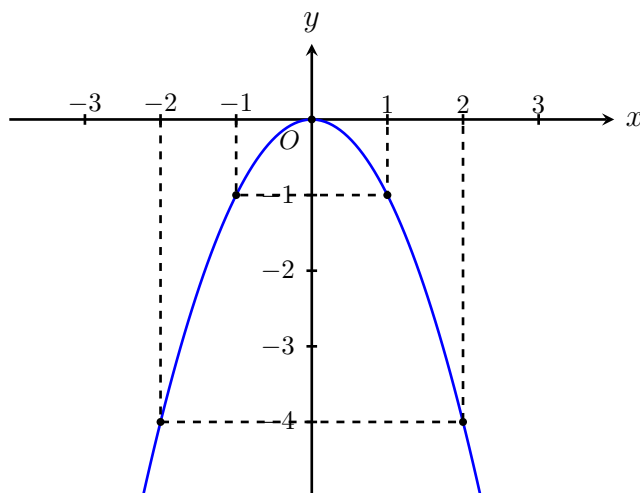
- a) Vẽ parabol (P) .
- b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) và (P) có đúng một điểm chung.

Lời giải.

- a) Bảng giá trị của hàm số $y = -x^2$ là:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị:



- b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $-x^2 = 4x - m \Leftrightarrow x^2 + 4x - m = 0 (*)$.
 (d) và (P) có đúng một điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

□

Câu 3.

- a) Cho phương trình $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^2 - x_2^2| = 15$.
- b) Giải phương trình $(x - 1)^4 = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4(3m + 1) = 21 - 12m$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 21 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{4}$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 5$ và $x_1 x_2 = 3m + 1$.

Ta có: $|x_1^2 - x_2^2| = 15 \Leftrightarrow |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = 15 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 3$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 9$

$\Leftrightarrow 5^2 - 4(3m + 1) = 9 \Leftrightarrow 21 - 12m = 9 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

- b) Ta có: $(x - 1)^4 = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow (x - 1)^4 = (x - 1)^2 + 2$.

Đặt $t = (x - 1)^2 (t \geq 0)$, ta được phương trình: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$

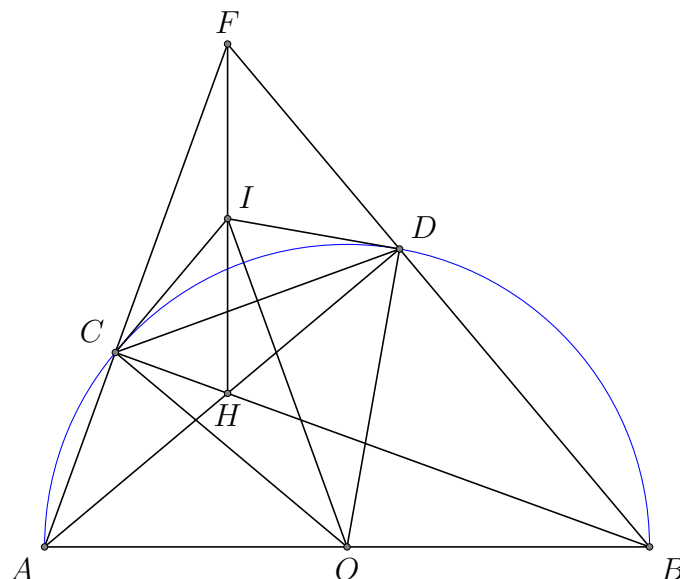
Với $t = 2$, ta có: $(x - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = \pm 2\sqrt{2}$.

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. CD là dây cung thay đổi của nửa đường tròn sao cho $CD = R$ và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). AD cắt BC tại H ; hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $CFDH$ nội tiếp.
- b) Chứng minh $CF \cdot CA = CH \cdot CB$.
- c) Gọi I là trung điểm của HF . Chứng minh tia OI là tia phân giác của góc $\widehat{COD}$.
- d) Chứng minh điểm I thuộc một đường tròn cố định khi CD thay đổi.

Lời giải.

- a) Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{FCH} = 90^\circ$.
 Lại có: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{FDH} = 90^\circ$.
 Tứ giác $CFDH$ có $\widehat{FCH} + \widehat{FDH} = 180^\circ$.
 Suy ra tứ giác $CFDH$ nội tiếp đường tròn đường kính FH .
- b) Tứ giác $CFDH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{CDH}$.
 Mà $\widehat{CDH} = \widehat{CBA}$ (cùng chắn cung AC trong đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{CBA}$.
 Hai tam giác CHF và CAB có $\widehat{HCF} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ và $\widehat{CFH} = \widehat{CBA}$.
 $\Rightarrow \triangle CHF \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow CF \cdot CA = CH \cdot CB$.
- c) Ta có I là trung điểm của HF nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CFDH \Rightarrow IC = ID$.
 Hai tam giác OIC và OID có $OC = OD$, $IC = ID$ và OI là cạnh chung.
 Suy ra $\triangle OIC = \triangle OID \Rightarrow \widehat{COI} = \widehat{DOI}$.
 Vậy tia OI là tia phân giác của góc $\widehat{COD}$.
- d) Ta có $\widehat{ICF} = \widehat{IFC} = \widehat{CBA} = \widehat{BCO}$.
 $\Rightarrow \widehat{ICO} = \widehat{BCO} + \widehat{BCI} = \widehat{ICF} + \widehat{BCI} = \widehat{BCF} = 90^\circ$.
 Tam giác OCD có $OC = CD = OD = R$ nên $\triangle OCD$ đều $\Rightarrow \widehat{COI} = 30^\circ$.
 Tam giác COI vuông tại C có $\widehat{COI} = 30^\circ$ nên $OI = \frac{OC}{\cos 30^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.
 Vậy điểm I thuộc một đường tròn cố định khi CD thay đổi.

□

Câu 5. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh:

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{b}{b^2 + ca} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right); \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

$$\text{Do đó, ta có: } \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{3}{2}.$$

□

———— HẾT ————

56 ĐỀ THI VÀO 10, PTNK, TPHCM

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-2y)(x+my) = m^2 - 2m - 3 \\ (y-2x)(y+mx) = m^2 - 2m - 3. \end{cases}$$
 - Giải hệ phương trình khi $m = -3$;
 - Tìm m để hệ phương trình có ít nhất một nghiệm $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0 > 0, y_0 > 0$.
- Tìm $a \geq 1$ để phương trình $ax^2 + (1-2a)x + 1-a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$.

Lời giải.

- Khi $m = -3$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 12 \\ y^2 - 5xy + 6x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 12 \\ x = \pm y. \end{cases}$$
 - Hệ phương trình viết lại
$$\begin{cases} x^2 + (m-2)xy - 2my^2 = m^2 - 2m - 3 \\ y^2 + (m-2)xy - 2mx^2 = m^2 - 2m - 3 \end{cases}$$

Trừ theo về hai phương trình hệ trên ta thu được $(2m+1)(y^2 - x^2) = 0$. Đến đây, xét từng trường hợp cho m ta có kết quả $m = \frac{-1}{2}, m = -1, m < 3$.
- Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $a(x_1 + x_2) = 2a - 1$. Suy ra $ax_1 = 2a - 1 - ax_2$, do đó $ax_2^2 + a^2x_2 - a^3 - a^2 + 2a = 0$. Mặt khác $ax_2^2 + (1-2a)x_2 + 1-a = 0$ nên ta có $x_2 = a - 1$. Thay vào phương trình ban đầu thu được $a = 1, a = 3$.

□

Câu 2. Cho x, y là hai số nguyên dương mà $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy .

- Chứng minh rằng x, y là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.
- Chứng minh rằng $k = \frac{x^2 + y^2 + 10}{xy}$ chia hết cho 4 và $k \geq 12$.

Lời giải.

- Giả sử x là số chẵn. Vì $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho xy nên y là số chẵn. Từ đó ta có, $x^2 + y^2$ chia hết cho 4 và $x^2 + y^2 + 10$ chia hết cho 4, suy ra 10 chia hết cho 4 (vô lí). Vậy x, y là hai số lẻ. Bây giờ, ta giả sử $(x, y) = d, d \neq 1$. Suy ra $d^2 \mid (x^2 + y^2)$ và theo giả thiết thì $d^2 \mid 10$ (vô lí). Tóm lại, x, y là hai số lẻ và $(x, y) = 1$.
- Đặt $x = 2a + 1, y = 2b + 1$ suy ra $k = \frac{4(a^2 + b^2 + a + b + 3)}{(2a+1)(2b+1)}$. Do đó, k chia hết cho 4. Giả sử x chia hết cho 3. Lúc này, $3 \mid (y^2 + 10)$ (vô lí). Vậy x và y cùng không chia hết cho 3. Ta có: $3 \mid x^2 + y^2 + 10 = kxy$ suy ra k chia hết cho 3. Từ đó ta có $k \geq 12$.

□

Câu 3. Biết $x \geq y \geq z, x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

- Tính $S = (x-y)^2 + (x-y)(y-z) + (y-z)^2$
- Tìm giá trị lớn nhất của $P = |(x-y)(y-z)(z-x)|$.

Lời giải.

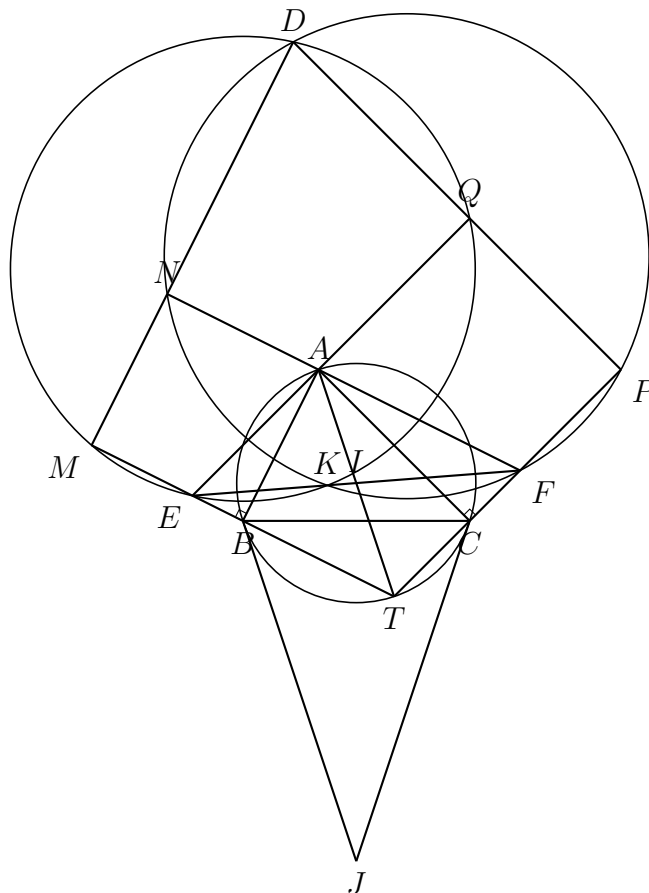
- a) Từ giả thiết suy ra $xy + yz + zx = -3$. Vậy $S = x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = 9$.
- b) Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$, ta có $P \leq 3|x - z|$. Mặt khác $|x - z| \leq \sqrt{2(x^2 + z^2)} \leq \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{12}$. Suy ra $P \leq 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}$. Dấu “=” khi $x = \sqrt{3}$, $y = 0$, $z = -\sqrt{3}$.

□

Câu 4. Tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} > 45^\circ$. Dựng các hình vuông $ABMN$, $ACPQ$ (M và C nằm khác phía với AB , B và Q khác phía với AC). Đường thẳng AQ cắt đoạn BM tại E và AN cắt đoạn CP tại F .

- a) Chứng minh rằng $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ và tứ giác $EFQN$ nội tiếp.
- b) Chứng minh rằng trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- c) MN cắt PQ tại D , các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K ($K \neq D$), các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J . Chứng minh các điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{EAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{FAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{EAB} = \widehat{FAC}$. Mặt khác, ta có $\angle ABE = \angle ACF = 90^\circ$. Vậy $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ (g.g).
Ta có: $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ mà $AC = AQ$, $AB = AN$ suy ra $AE \cdot AQ = AN \cdot AF$. Do đó, tứ giác $QNEF$ nội tiếp.

- b) Cách 1: Gọi T là giao điểm của MB và CP . Ta có tứ giác $ABTC$ nội tiếp và AT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Mặt khác ta có $AF \parallel ET$, $AE \parallel FT$ nên $AETF$ là hình bình hành. Suy ra trung điểm EF cũng là trung điểm AT . Do đó trung điểm I của EF là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Cách 2: Xét hình thang $AEBF$, gọi X là trung điểm của AB khi đó IX thuộc đường trung bình của hình thang, suy ra $IX \parallel BE$ hay IX vuông góc AB . Vậy IX là đường trung trực của đoạn AB . Chứng minh tương tự thì I cũng thuộc trung trực đoạn AC . Vậy I là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC .
- c) Giả sử DA cắt EF tại H . Ta có $\angle NFH = \angle NQA$ (vì $NQFE$ nội tiếp). Mà $\angle NQA = \angle NDA$ (vì $AQDN$ nội tiếp). Suy ra $\angle NDA = \angle AFH$. Suy ra $NDFH$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta có $DQHE$ nội tiếp. Do đó H là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DQM và DPN . Vậy H trùng K . Suy ra D, A, K thẳng hàng.
- Ta có $\angle BKE = \angle EAB = \angle CAF = \angle CKF$. Suy ra $\angle BKC = 180^\circ - 2\angle BKE = 2(90^\circ - \angle EAB) = 2\angle BAC = \angle BIC$. Suy ra $BKIC$ nội tiếp. Mà $IBJC$ nội tiếp và $JB = JC$ nên $\angle BKJ = \angle CKJ$. Hay KJ là phân giác $\angle BKC$. Mặt khác $\angle BKA = 180^\circ - \angle AEB = 180^\circ - \angle AFC = \angle AKC$. Suy ra tia đối của tia KA cũng là phân giác của $\angle BKC$. Do đó A, K, J thẳng hàng. Vậy 4 điểm D, A, K, J thẳng hàng.

□

Câu 5. Với mỗi số nguyên dương $m > 1$, kí hiệu $s(m)$ là ước nguyên dương lớn nhất của m và khác m . Cho số tự nhiên $n > 1$, đặt $n_0 = n$ và lần lượt tính các số $n_1 = n_0 - s(n_0)$, $n_2 = n_1 - s(n_1)$, $\dots$, $n_{i+1} = n_i - s(n_i)$, $\dots$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k để $n_k = 1$ và tính k khi $n = 2^{16} \cdot 14^{17}$.

Lời giải.

Ta có: $n_{i+1} = n_i - s(n_i) > 0$ suy ra $n_{i+1} \geq 1 \forall i = 0, 1, \dots$ hay $n_i \geq 1 \forall i = 1, 2, \dots$. Ta lại có $n_i > n_{i+1}$ do đó ta có dãy số nguyên dương giảm $(n_i) \forall i = 0, 1, 2, \dots$ được sắp xếp như sau

$$n = n_0 > n_1 > n_2 > \dots > \dots$$

Vì vậy, tồn tại k để $n_k = 1$.

Khi $n = 2^{16} \cdot 14^{17} = 2^{33} \cdot 7^{17}$ ta có $n_1 = 2^{32} \cdot 7^{17}$, $n_2 = 2^{31} \cdot 7^{17}$. Tiếp tục quá trình cho đến $n_{33} = 7^{17}$ rồi thực hiện tiếp ta thu được $n_{101} = 1$. Vậy $k = 101$.

□

———— HẾT ————

57 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC AN GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho $x = \frac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 - 8x + 15$.

Lời giải.

Ta có $19 + 8\sqrt{3} = 16 + 2.4\sqrt{3} + 3 = (4 + \sqrt{3})^2$.

$$\Rightarrow x = \frac{13}{\sqrt{19+8\sqrt{3}}} = \frac{13}{\sqrt{(4+\sqrt{3})^2}} = \frac{13}{4+\sqrt{3}} = \frac{13(4-\sqrt{3})}{16-3} = 4 - \sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow x^2 = (4 - \sqrt{3})^2 = 19 - 8\sqrt{3}.$$

Thay vào A ta được:

$$A = 19 - 8\sqrt{3} - 8(4 - \sqrt{3}) + 15 \Rightarrow A = 2. \quad \square$$

Câu 2. Cho hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có đồ thị là đường thẳng (d) trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Viết theo a và b phương trình đường thẳng (d') . Biết rằng (d) và (d') vuông góc với nhau đồng thời cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

Lời giải.

Ta có: $(d) : y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Giả sử $(d') : y = a'x + b'$

$$\text{Do } (d) \perp (d') \Rightarrow a.a' = -1 \Rightarrow a' = -\frac{1}{a} \quad (a \neq 0).$$

Ta lại có: (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{a}$ và (d') cắt Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b'}{a'}$.

Theo đề bài (d) và (d') cắt nhau tại cùng một điểm thuộc Ox nên:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'} \Leftrightarrow b' = \frac{a'b}{a} = -\frac{b}{a^2}.$$

Vậy đường thẳng (d') cần tìm có phương trình là: $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a^2}$. $\square$

Câu 3. Tìm x, y, z biết:

$$\begin{cases} x^2 + (y - z + 1)^2 = 0 \\ 5y - 3z - 9 = 0 \end{cases}.$$

Lời giải.

Do $x^2 \geq 0; (y - z + 1)^2 \geq 0$ nên hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0 \\ 5y - 3z - 9 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ 5y - 3z - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3z + 3 = 0 \\ 5y - 3z - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ -2y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - z + 1 = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ z = 7 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $x = 0; y = 6; z = 7$. $\square$

Câu 4. Cho hai phương trình bậc hai (m là tham số):

$$2x^2 + (m - 1)x - 3 = 0; \quad 4x^2 - (m - 7)x - 9 = 0.$$

- Tìm m để cả hai phương trình đều có nghiệm.
- Tìm m để hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung.

Lời giải.

- Dễ thấy cả hai phương trình đều có các hệ số a, c trái dấu. Do đó cả hai phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m .
- Giả sử cả hai phương trình có nghiệm chung là x_0 khi đó:

$$\begin{cases} 2x_0^2 + (m-1)x_0 - 3 = 0 \\ 4x_0^2 - (m-7)x_0 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x_0^2 + 6x_0 - 12 = 0 \Rightarrow x_0 = 1; x_0 = -2.$$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow 2 + (m-1) - 3 = 0 \Rightarrow m = 2$.

$x_0 = -2 \Rightarrow 8 - 2(m-1) - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{7}{2}$.

Vậy $m = 2; m = \frac{7}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc nhọn có số đo khác nhau. Vẽ các đường cao BE, CF của tam giác ABC (E, F lần lượt thuộc AC, AB).

- Chứng minh rằng $\widehat{BCF} = \widehat{BEF}$.
- Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh tam giác IEF là tam giác đều.
- Gọi K là trung điểm của EF . Chứng minh rằng IK song song OA .

Lời giải.

a. Ta có BE là đường cao. $\Rightarrow BE \perp EC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$

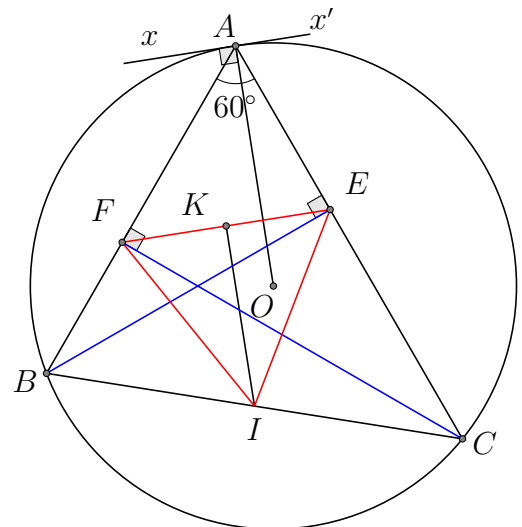
CF là đường cao $\Rightarrow BF \perp FC \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

$\Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BEF}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung).

b. Ta có tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính BC (theo câu a).

$\Rightarrow \widehat{EIF} = 2\widehat{ECF} = 60^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung).



Mặt khác ta có $IE = IF = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ Tam giác IEF đều.

c. Kẻ tiếp tuyến xAx' của đường tròn (O) tại A .

$\Rightarrow xx' \perp OA$ (1)

Ta lại có: $\begin{cases} \widehat{AFE} + \widehat{BFE} = 180^\circ \text{ (kề bù)} \\ \widehat{ACB} + \widehat{BFE} = 180^\circ \text{ (Tứ giác BFEC nội tiếp)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AFE}.$

Mà $\widehat{BAx} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến cùng chắn cung AB).

$\Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{AFE} \Rightarrow xx' \parallel EF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $OA \perp EF$.

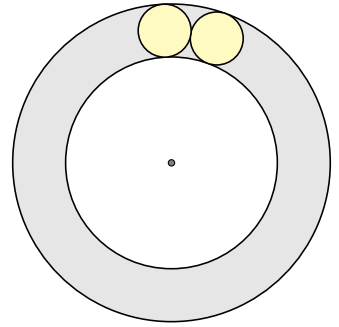
Mặt khác $IK \perp EF$ ($\triangle ABC$ đều).

$\Rightarrow IK \parallel OA$.

□

Câu 6.

Trong một hình vành khăn với các bán kính đường tròn là $10R$ và $8R$. Xếp các hình tròn bán kính R tiếp xúc với cả hai đường tròn này không chồng lấn nhau. Hỏi xếp được nhiều nhất bao nhiêu hình tròn như thế?

**Lời giải.**

Xét hình tròn tâm I tiếp xúc với hai đường tròn tâm O của hình vành khăn.

Từ O kẻ hai tiếp tuyến OT và OT' tiếp xúc với đường tròn tâm I .

Ta có $IT = R$; $OI = 9R$.

Tam giác OIT vuông tại T

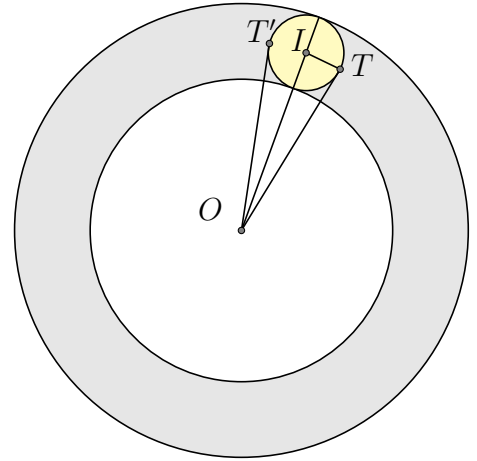
$$\Rightarrow \sin IOT = \frac{IT}{OI} = \frac{R}{9R} = \frac{1}{9} \Rightarrow \widehat{IOT} \approx 6^\circ 23'$$

$$\text{Vậy } \widehat{TOT'} = 2\widehat{IOT} \approx 12^\circ 46'$$

Do đó hình tròn xếp được trong hình vành khăn là:

$$360^\circ : 12^\circ 46' \approx 28,1984$$

Vậy có thể xếp nhiều nhất 28 hình tròn bán kính R tiếp xúc với hai đường tròn của hình vành khăn.



□

———— HẾT ————

58 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẮC GIANG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x} + x - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 3\sqrt{x} + 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{2x + \sqrt{x} - 3}$, với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $\frac{x}{4} = \sqrt{\frac{1009 + \sqrt{2017}}{2}} - \sqrt{\frac{1009 - \sqrt{2017}}{2}}$.

2) Cho phương trình $x^2 - 2x - (2m + 1) = 0$ (1), (với x là ẩn, m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\frac{x_1^3 + (2m + 5)x_2 + 2m}{2} + \frac{2}{x_2^3 + (2m + 5)x_1 + 2m} = \frac{122}{11}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 1) \text{ a) Ta có } A &= \left(\frac{x\sqrt{x} + x - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 3\sqrt{x} + 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{2x + \sqrt{x} - 3} \\ &= \left(\frac{x\sqrt{x} + x - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 3)} \\ &= \left(\frac{x\sqrt{x} + x - 2}{x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{x\sqrt{x} + x - 2 - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{2\sqrt{x} + 3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \frac{x}{4} &= \sqrt{\frac{1009 + \sqrt{2017}}{2}} - \sqrt{\frac{1009 - \sqrt{2017}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2018 + 2\sqrt{2017}}{4}} - \sqrt{\frac{2018 - 2\sqrt{2017}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2017} + 1}{2} - \frac{\sqrt{2017} - 1}{2} = 1. \text{ Suy ra } x = 4 \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = 4 \text{ vào biểu thức A ta được } A = \frac{\sqrt{4} + 1}{2\sqrt{4} + 3} = \frac{3}{7}.$$

$$\text{Vậy giá trị của biểu thức A bằng } \frac{3}{7} \text{ khi } \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{1009 + \sqrt{2017}}{2}} - \sqrt{\frac{1009 - \sqrt{2017}}{2}}.$$

2) Phương trình $x^2 - 2x - (2m + 1) = 0$ (1).

Điều kiện $\Delta' = 2(1 + m) > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2$.

Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên

$$x_1^2 - 2x_1 - (2m + 1) = 0 \Rightarrow x_1^2 = 2x_1 + (2m + 1)$$

$$\Rightarrow x_1^3 = 2x_1^2 + (2m + 1)x_1 = 2(2x_1 + (2m + 1)) + (2m + 1)x_1 = (5 + 2m)x_1 + 2(2m + 1).$$

$$\text{Khi đó } \frac{x_1^3 + (2m + 5)x_2 + 2m}{2} = \frac{(2m + 5)(x_1 + x_2) + 2(3m + 1)}{2} = 6 + 5m.$$

$$\text{Tương tự có } \frac{2}{x_2^3 + (2m + 5)x_1 + 2m} = \frac{1}{6 + 5m}.$$

Theo bài toán ta có

$$6 + 5m + \frac{1}{6 + 5m} = \frac{122}{11} \Leftrightarrow 11(6 + 5m)^2 - 122(6 + 5m) + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 5m = 11 \\ 6 + 5m = \frac{1}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{13}{11} \end{cases}.$$

So sánh điều kiện và thử lại ta được kết quả $m = 1$.

□

Câu 2.

1) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y^2 + 4 = 2y^2 \\ (xy + 2)(y - x) = x^3y^2. \end{cases}$

Lời giải.

1) Phương trình $\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4 - 3x \geq 0 \\ 2x^2 - x \geq 0. \end{cases}$$

Bình phương hai vế ta được phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 4x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - x)(4 - 3x)} = 0 \\ \Leftrightarrow & (2x^2 - x) - 2\sqrt{(2x^2 - x)(4 - 3x)} + (4 - 3x) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 - x} - \sqrt{4 - 3x})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x^2 - x} = \sqrt{4 - 3x} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $\{-2; 1\}$.

2) Nhận thấy $y = 0$ không thoả mãn. Chia hai vế của hai phương trình cho y^2 ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + \frac{4}{y^2} = 2 \\ \left(x + \frac{2}{y}\right)\left(1 - \frac{x}{y}\right) = x^3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + \frac{4}{y^2} = 2 \\ \left(x + \frac{2}{y}\right)\left(2 - \frac{2x}{y}\right) = 2x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{4}{y^2} = 2 \\ \left(x + \frac{2}{y}\right)\left(x^2 + \frac{4}{y^2} - \frac{2x}{y}\right) = 2x^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1^*) \\ (2^*) \end{matrix} \end{aligned}$$

Biến đổi (2*) ta được $x^3 + \frac{8}{y^3} = 2x^3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{y}$.

Thế $x = \frac{2}{y}$ vào (1*) ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ (thoả mãn).

Kết luận nghiệm $(x; y) = (1; 2), (x; y) = (-1; -2)$.

□

Câu 3.

1) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thoả mãn $\frac{x + y\sqrt{2017}}{y + z\sqrt{2017}}$ là số hữu tỉ, đồng thời $(y + 2)(4xz + 6y - 3)$ là số chính phương.

2) Trong hình vuông cạnh 1 dm đặt một số hình vuông nhỏ có tổng chu vi bằng 9 dm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất ba hình vuông nhỏ (không kể hình vuông bao ngoài).

Lời giải.

1) Giả sử $\frac{x + y\sqrt{2017}}{y + z\sqrt{2017}} = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}_+$. Biến đổi được $xn - ym = (zm - yn)\sqrt{2017}$

Từ $x, y, z, m, n \in \mathbb{Z}$, suy ra $xn - ym = zm - yn = 0 \Rightarrow xz = y^2$

Thay vào ta được $(y+2)(4y^2+6y-3) = (y+2)[(y+2)(4y-2)+1]$

Vì $(y+2, (y+2)(4y-2)+1) = 1$ nên $y+2$ và $4y^2+6y-3$ đều là các số chính phương.

Ta có $(2y+1)^2 \leq 4y^2+6y-3 < (2y+2)^2 \Rightarrow y=2$ (thỏa mãn $y+2$ là số chính phương).

Tính được các bộ số $(x, y, z) \in \{(1, 2, 4), (4, 2, 1), (2, 2, 2)\}$.

- 2) Chiều các hình vuông nhỏ lên một cạnh hình vuông bên ngoài (cạnh AB).

Độ dài nhỏ nhất của hình chiếu một hình vuông cạnh a là a . Do đó độ dài nhỏ nhất tổng hình chiếu của tất cả các hình vuông nhỏ là $\frac{9}{4}$.

Ta có $\frac{9}{4} > 2 = 2AB$ nên tồn tại 3 điểm thuộc ba hình vuông có cùng hình chiếu xuống cạnh AB . Đường thẳng đi qua 3 điểm đó là đường thẳng cần tìm.

□

Câu 4. Cho tam giác OAI vuông tại A , B là điểm đối xứng với A qua đường thẳng OI . Gọi H , E lần lượt là trung điểm các cạnh AB , BI ; D là giao điểm của đường thẳng AE và đường tròn (C) tâm O bán kính OA (D khác A).

- 1) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp.
- 2) Gọi J là giao điểm của đường thẳng ID và đường tròn (C) (J khác D). Chứng minh tam giác ABJ cân.
- 3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng DH và đường tròn (C) (K khác D). Chứng minh rằng

$$IH^2 = ID.IK - DH.HK.$$

Lời giải.

- 1) Ta có IA, IB là hai tiếp tuyến của đường tròn (C) .

Từ $\widehat{BAE} = \widehat{DBE}$ ta có hai tam giác ABE, BDE đồng dạng, suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{BDE}$ (1)

Ta có $\triangle BHE$ cân tại E nên $\widehat{ABE} = \widehat{BHE}$ (2)

Từ (1), (2) ta có $\widehat{BDE} = \widehat{BHE}$, suy ra tứ giác $BHDE$ nội tiếp.

- 2) Ta có hai tam giác ABE và BDE đồng dạng.

$$\text{Do đó } \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{EI}{DE} = \frac{AE}{EI},$$

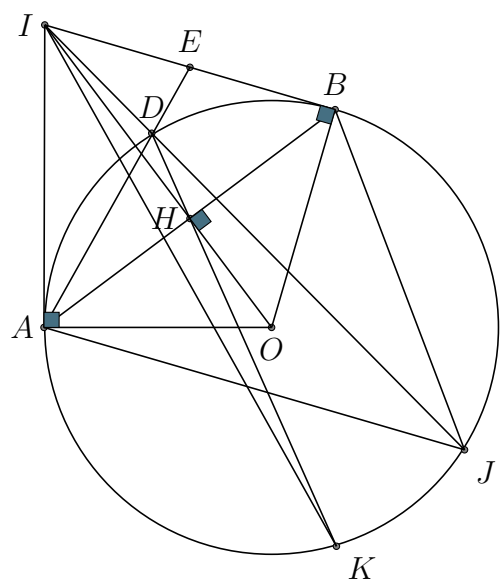
suy ra hai tam giác DEI và IEA đồng dạng.

Từ đó ta có $\widehat{EID} = \widehat{EAI}$.

Lại có $\widehat{EAI} = \widehat{AJI} \Rightarrow \widehat{AJI} = \widehat{EID} \Rightarrow JA \parallel BI$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{AJB} = \widehat{ABI} \\ \widehat{ABI} = \widehat{JAB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AJB} = \widehat{JAB}.$$

Vậy tam giác ABJ cân tại B .



- 3) Ta có $OAIB$ là tứ giác nội tiếp nên $HO.HI = HA.HB$.

$AKBD$ là tứ giác nội tiếp nên $HA.HB = HD.HK \Rightarrow HO.HI = HD.HK$.

Suy ra tứ giác $IDOK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DIO} = \widehat{DKO}$ (cùng chắn cung DO) và $\widehat{OIK} = \widehat{ODK}$ (cùng

chắn cung OK).

Mặt khác: $\widehat{ODK} = \widehat{OKD}$.

Do đó $\widehat{DIO} = \widehat{OIK}$ hay IO là đường phân giác góc $\widehat{JIK}$.

Qua J kẻ đường thẳng vuông góc với OI , cắt lại đường tròn (C) tại K' , dễ thấy $\triangle IOK'$ cân tại I nên IO cũng là đường phân giác góc $\widehat{JIK'}$.

Mà K, K' cùng thuộc cung lớn $\widehat{AB}$ nên $K \equiv K'$.

Do đó $IJ = IK$ hay $ID.IK = ID.IJ$ (3).

Ta có $\triangle ADI \sim \triangle JAI \Rightarrow ID.IJ = IA^2$.

Mà $IA^2 = IH^2 + HA^2 = IH^2 + HA.HB$ nên $ID.IJ = IH^2 + HA.HB$ (4)

Lại có $\triangle HAD \sim \triangle HKB \Rightarrow HA.HB = HD.HK$ (5)

Kết hợp (3), (4), (5) ta có điều phải chứng minh. □

Câu 5. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2\sqrt{xy} + \sqrt{\frac{x}{3}} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y}{x} + \frac{4x}{3y} + 15xy.$$

Lời giải.

Ta có $P = \left(\frac{y}{3x} + \frac{x}{3y}\right) + \left(\frac{2y}{3x} + 6xy\right) + \left(\frac{x}{y} + 9xy\right)$

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si ta được ta có $P \geq \frac{2}{3} + 4y + 6x$.

Lại có $\frac{2}{3} + 4y + 6x = 4(x + y) + 2\left(x + \frac{1}{3}\right) \geq 4\left(2\sqrt{xy} + \sqrt{\frac{x}{3}}\right) = 4$; dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{y}{3x} = \frac{x}{3y}, \frac{2y}{3x} = 6xy, \frac{x}{y} = 9xy \\ 2\sqrt{xy} + \sqrt{\frac{x}{3}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4 khi $x = y = \frac{1}{3}$. □

————— **HẾT** —————

59 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BẠC LIÊU

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Cho $n = 2018 \cdot 2017^{2016} - 11^{2017} - 6^{2016}$. Chứng minh n chia hết cho 17.
b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

Lời giải.

- a) Ta có $2017 \equiv 11 \pmod{17} \Rightarrow 2017^{2016} \equiv 11^{2016} \pmod{17}$.

Mặt khác: $2018 \equiv 12 \pmod{17}$.

Suy ra $2018 \cdot 2017^{2016} \equiv 12 \cdot 11^{2016} \pmod{17}$.

Hay $2018 \cdot 2017^{2016} \equiv (11 + 1) \cdot 11^{2016} \equiv 11^{2017} + 11^{2016} \pmod{17}$.

Suy ra $2018 \cdot 2017^{2016} - 11^{2017} \equiv 11^{2016} \pmod{17}$.

Suy ra $n = 2018 \cdot 2017^{2016} - 11^{2017} - 6^{2016} \equiv 11^{2016} - 6^{2016} \pmod{17}$.

Ta lại có:

- $11^2 \equiv 2 \pmod{17}$, suy ra $11^{2016} = (11^2)^{1008} \equiv 2^{2008} \pmod{17}$.
- $6^2 \equiv 2 \pmod{17}$, suy ra $6^{2016} = (6^2)^{1008} \equiv 2^{2008} \pmod{17}$.

Do đó ta có $n \equiv 2^{1008} - 2^{1008} = 0 \pmod{17}$.

Vậy n chia hết cho 17.

- b) **Cách 1.**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = -5x^2y^2 + 35xy - 60 \\ &\Leftrightarrow (x - y)^2 = 5(-x^2y^2 + 7xy - 12). \end{aligned} \quad (*)$$

Vì $(x - y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ nên $-x^2y^2 + 7xy - 12 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. (1)

Đặt $t = xy, (t \in \mathbb{Z})$. Từ (1) ta có $-t^2 + 7t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 4$.

Mà $t \in \mathbb{Z}$ nên ta có $t = 3 \vee t = 4$ hay $xy = 3 \vee xy = 4$.

Khi đó $5(-x^2y^2 + 7xy - 12) = 0$ nên từ (*) ta cũng có $(x - y)^2 = 0$ hay $x = y$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} xy = 3 \\ x = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x = y \end{cases} \quad (\text{không tồn tại } x \in \mathbb{N}) \\ \bullet \quad \begin{cases} xy = 4 \\ x = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình trên là: $(2; 2), (-2; -2)$.

Cách 2. Xét trường hợp $x, y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm x^2, y^2 ta có:

$$\begin{aligned}
37xy &\geq 2xy + 5x^2y^2 + 60 \\
\Leftrightarrow 35xy &\geq 5x^2y^2 + 60 \\
\Leftrightarrow 7xy &\geq x^2y^2 + 12 \\
\Rightarrow 8xy &\geq x^2y^2 + 12 \\
\Leftrightarrow 4 &\geq (xy - 4)^2 \\
\Leftrightarrow 2 &\geq xy - 4 \geq -2 \\
\Leftrightarrow 6 &\geq xy \geq 2.
\end{aligned}$$

Suy ra, $xy \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Mặt khác, phương trình ban đầu tương đương với:

$$(x + y)^2 = 39xy - 5x^2y^2 - 60. \quad (*)$$

Ta xét các trường hợp:

- TH1: $xy = 2$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = -6$ (vô lí).
- TH2: $xy = 3$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = 12$ (loại vì $(x + y)^2$ là số chính phương).
- TH3: $xy = 4$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = 16$. Giải ra ta được $x = y = 2$.
- TH4: $xy = 5$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = 10$ (loại vì $(x + y)^2$ là số chính phương).
- TH5: $xy = 6$. Từ (*) suy ra $(x + y)^2 = -6$ (vô lí).

Thử lại ta thấy $(x; y) = (2; 2)$ là nghiệm của phương trình.

Do xy và $(-x).(-y)$ có vai trò như nhau trong phương trình ban đầu nên nghiệm của phương trình là $(2; 2), (-2; -2)$.

□

Câu 2.

a) Cho $a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}}$. Chứng minh $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = x - 3xy \\ 2x^2 + y^2 - 17 = 3xy - x \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Đặt $b = \sqrt[3]{x^2} \geq 0, c = \sqrt[3]{y^2} \geq 0$. Bài toán trở thành:

Cho $a = \sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2}$ với b, c là hai số thực không âm. Chứng minh: $b + c = \sqrt[3]{a^2}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2} \\
&= \sqrt{b^2(b + c)} + \sqrt{c^2(b + c)} \\
&= b\sqrt{b + c} + c\sqrt{b + c} \quad (\text{do } b, c \geq 0) \\
&= (b + c)\sqrt{b + c}.
\end{aligned}$$

Suy ra $a^2 = (b + c)^3$ hay $b + c = \sqrt[3]{a^2}$.

b) Phương trình thứ nhất tương đương $(x + y - 1)(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 & (1) \\ x + 2y = 0 & (2) \end{cases}.$

- $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$, thay vào phương trình (2), ta có:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \Rightarrow y = -1 \\ x = -\frac{4}{3} & \Rightarrow y = \frac{7}{3} \end{cases}.$$

- $x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$, thay vào phương trình (2), ta có:

$$15y^2 - 2y - 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{17}{15} \Rightarrow x = \frac{-34}{15} \\ y = -1 \Rightarrow x = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là $(2; -1), \left(\frac{-4}{3}; \frac{7}{3}\right), \left(\frac{-34}{15}; \frac{17}{15}\right)$.

□

Câu 3.

- a) Cho phương trình: $x^4 + 2(m-3)x^2 + 3m + 9 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
- b) Cho các số a, b, c thỏa mãn: $a \geq 1; b \geq 4; c \geq 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{bc\sqrt{a-1} + ac\sqrt{b-4} + ab\sqrt{c-9}}{abc}$$

Lời giải.

- a) Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + 2(m-3)t + 3m + 9 = 0. \quad (*)$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt. Điều này đồng nghĩa với:

$$\begin{cases} \Delta' = (m-3)^2 - 3m - 9 > 0 \\ S = t_1 + t_2 = -2(m-3) > 0 \\ P = t_1 \cdot t_2 = 3m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m < 0 \\ m < 3 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 0.$$

Vậy với $-3 < m < 0$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm dương phân biệt.

- b) Ta có

$$M = \frac{\sqrt{a-1}}{a} + \frac{\sqrt{b-4}}{b} + \frac{\sqrt{c-9}}{c}$$

Do $a \geq 1; b \geq 4$ và $c \geq 9$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM với các cặp số không âm, ta có:

$$\begin{cases} a = (a-1) + 1 \geq 2\sqrt{a-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{a-1}}{a} \leq \frac{1}{2} \\ b = (b-4) + 4 \geq 4\sqrt{b-4} \Rightarrow \frac{\sqrt{b-4}}{b} \leq \frac{1}{4} \\ c = (c-9) + 9 \geq 6\sqrt{c-9} \Rightarrow \frac{\sqrt{c-9}}{c} \leq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } M \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}.$$

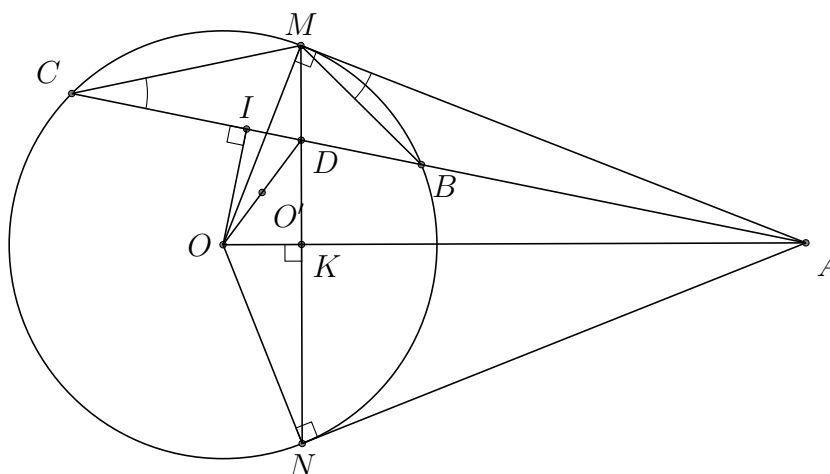
$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a-1=1 \\ b-4=4 \\ c-9=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \\ c=18 \end{cases}.$$

□

Câu 4. Cho 3 điểm A, B, C cố định thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn $(O; R)$ bất kì đi qua B, C ($BC \neq 2R$). Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến $(O; R)$ (M, N là các tiếp điểm). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và MN , MN cắt BC tại D . Chứng minh:

- a) $AM^2 = AB \cdot AC$.

- Lời giải.**

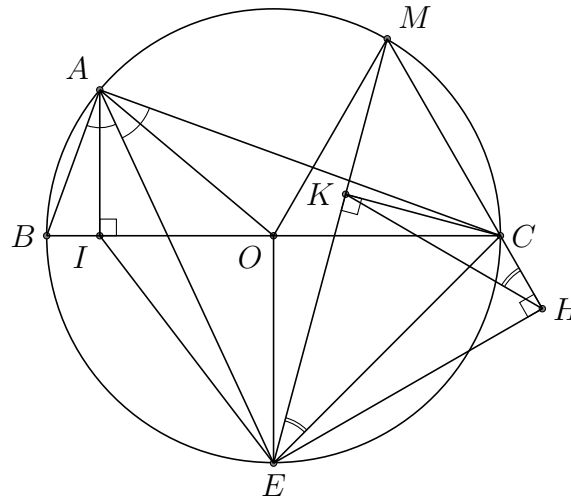


- Khi đó, $O'I = O'D$ và I, D cố định nên O' di động trên đường trung trực của đoạn thẳng ID khi đường tròn $(O; R)$ thay đổi.

7

b) Trên đường tròn lấy điểm M sao cho góc $\widehat{MCE}$ là góc tù; kẻ EH , CK lần lượt vuông góc với MC , ME tại H và K . Chứng minh MO vuông góc với HK .

Lời giải.



- a) Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Đặt $IO = x$ ($0 \leq x \leq R$).

Ta có: $AI = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Do AE là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên E là điểm chính giữa của $\widehat{BC}$, suy ra $OE \perp BC$.

Từ đó ta có $IE = \sqrt{R^2 + x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{AIE} &= \frac{1}{2} AI \cdot IE \cdot \sin \widehat{AIE} = \frac{1}{2} AI \cdot IE \cdot \sin(90^\circ + \widehat{OIE}) = \frac{1}{2} AI \cdot IE \cdot \cos \widehat{OIE} \\ &= \frac{1}{2} AI \cdot IE \cdot \frac{OI}{IE} = \frac{1}{2} AI \cdot OI = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot x \leq \frac{1}{4} (R^2 - x^2 + x^2) = \frac{R^2}{4}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{R^2 - x^2} = x \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có $AI = \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Vậy điểm A thuộc đường tròn (O) sao cho khoảng cách từ A đến BC bằng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

- b) Ta có $\widehat{EMC} = \frac{1}{2} \widehat{EOC} = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$, suy ra $\triangle MEH$ vuông cân tại H .

Tứ giác $KCHE$ nội tiếp nên $\widehat{CHK} = \widehat{CEK}$ (cùng chắn $\widehat{KC}$).

Ta lại có $\widehat{OMH} = \widehat{OME} + \widehat{EMH} = \widehat{OEM} + 45^\circ$.

(vì $\triangle OME$ cân tại M nên $\widehat{OME} = \widehat{OEM}$).

Suy ra $\widehat{MHK} + \widehat{OMH} = \widehat{OEM} + 45^\circ + \widehat{KEC} = \widehat{OEC} + 45^\circ = 90^\circ$.

(vì $\triangle OEC$ vuông cân tại O nên $\widehat{OEC} = 45^\circ$).

Suy ra $OM \perp HK$.

□

———— HẾT ————

60 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN BẮC NINH, BẮC NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho các biểu thức $P = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

- Rút gọn các biểu thức P và Q .
- Tìm tất cả giá trị của x để $P = Q$.

Lời giải.

- Ta có

$$P = \frac{(2x - 4\sqrt{x}) + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1$$

và

$$Q = \frac{(x\sqrt{x} + 2x) - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} = x - 1.$$

$$b) P = Q \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 + \sqrt{3} \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3}.$$

□

Câu 2.

- Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{4a + 6b + 2017c}{4a - 6b + 2017c}.$$

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y = xy + 4 \\ x^2 - x + 3 - x\sqrt{6-x} = (y-3)\sqrt{y-3} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

- Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a = b = c$$

Do đó

$$P = \frac{4a + 6a + 2017a}{4a - 6a + 2017a} = \frac{2027}{2015}.$$

- Điều kiện $x \leq 6; y \geq 3$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-2)(x+2-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

◇ Với $x = 2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $1 = \sqrt{(y-3)^3} \Leftrightarrow y = 4$.

◇ Với $y = x + 2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^2 - x + 3 = (x-1)\sqrt{x-1} + x\sqrt{6-x}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số thực dương ta có

$$(x-1)\sqrt{x-1} + x\sqrt{6-x} \leq \frac{(x-1)^2 + (x-1)}{2} + \frac{x^2 + 6 - x}{2} = x^2 - x + 3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1 = \sqrt{x-1} \\ x = \sqrt{6-x} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 4)$

Chú ý: Có thể trình bày lời giải phương trình trên bằng cách phân tích thành tổng của các bình phương.

□

Câu 3.

- a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a^2 + 6a + 3}{a^2 + a} + \frac{b^2 + 6b + 3}{b^2 + b} + \frac{c^2 + 6c + 3}{c^2 + c}$$

- b) Cho tam giác vuông có số đo các cạnh là các số tự nhiên có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đo cạnh huyền ta được số đo một cạnh góc vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{a^2 + 6a + 3}{a^2 + a} = \frac{(a^2 + a) + (3a + 3) + 2a}{a(a + 1)} = 1 + \frac{3}{a} + \frac{2}{a + 1}$. Biến đổi tương tự với các biểu thức còn lại và cộng vế với vế ta được

$$M = 3 + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 2\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}, \forall x, y, z > 0$ suy ra

$$M \geq 3 + \frac{27}{a+b+c} + \frac{18}{a+b+c+3}$$

Lại có $0 < a + b + c \leq 3$ nên $M \geq 3 + \frac{27}{3} + \frac{18}{6} = 15$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy min $M = 15$.

- b) Giả sử tam giác đã cho là ABC vuông tại A , có $BC = \overline{ab}$, $AC = \overline{cd}$, $AB = \overline{ba}$ với $0 < b < a \leq 9; 1 \leq c \leq a; 0 \leq d \leq 9$. Theo định lí Pytagore thì

$$\overline{ab}^2 = \overline{cd}^2 + \overline{ba}^2 \Leftrightarrow \overline{cd}^2 = 99(a^2 - b^2) (*)$$

Suy ra

$$\overline{cd}^2 : 33 \Rightarrow \begin{cases} \overline{cd}^2 : 3 \\ \overline{cd}^2 : 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{cd} : 3 \\ \overline{cd} : 11 \end{cases} \Rightarrow \overline{cd} : 33 \Rightarrow \overline{cd} \in \{33, 66, 99\}$$

Mặt khác $\overline{cd} < \overline{ab} \leq 99$ nên $\overline{cd} = 33$ hoặc $\overline{cd} = 66$.

◇ Nếu $\overline{cd} = 66$ thì thay vào (*) được $(a - b)(a + b) = 44$. Do $a - b; a + b$ cùng tính chẵn lẻ và $0 < a - b < a + b < 18$ nên không tồn tại a, b thỏa mãn.

◇ Nếu $\overline{cd} = 33$ thì thay vào (*) suy ra $(a - b)(a + b) = 11$. Do $0 < a - b < a + b < 18$ nên

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}$$

Khi đó $AB = 56; AC = 33; BC = 65$, suy ra $r = \frac{S}{p} = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC + CA} = 12$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A

của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M . Kẻ đường cao BF của tam giác ABC ($F \in AC$). Từ F kẻ đường thẳng song song với MA cắt AB tại E . Gọi H là giao điểm của CE và BF ; D là giao điểm của AH và BC .

- Chứng minh rằng $MA^2 = MB.MC$ và $\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}$.
- Chứng minh rằng AH vuông góc với BC tại D .
- Gọi I là trung điểm BC . Chứng minh rằng bốn điểm E, F, D, I cùng nằm trên một đường tròn.
- Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB, AC lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng H là trung điểm của PQ .

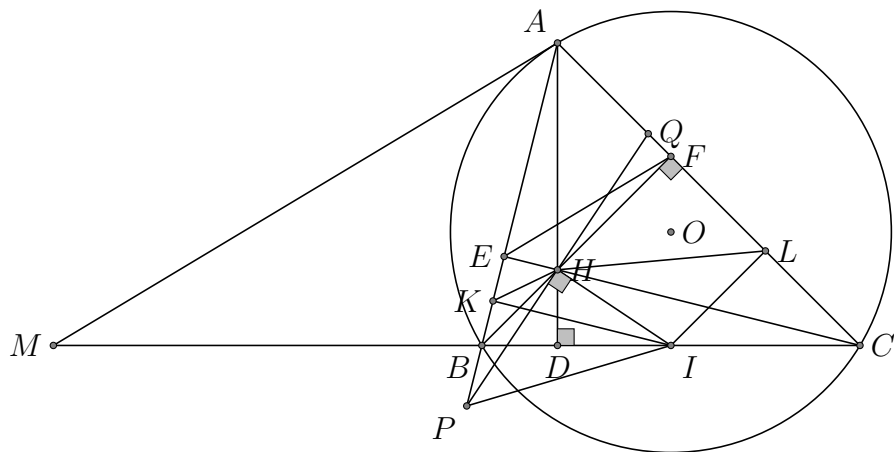
Lời giải.

- Ta có $\triangle MAB \sim \triangle MCA$ (g.g) nên

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$$

và

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{MC^2}{MA^2} = \frac{MC^2}{MB.MC} = \frac{MC}{MB}$$



- Do $\widehat{MAE} = \widehat{AEF}$ (vì $AM \parallel EF$) và $\widehat{ACB} = \widehat{MAE}$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$) nên $\widehat{ACB} = \widehat{AEF}$, suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp.
Mà $\widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$ hay $CE \perp AB$. Do đó H là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC$.
- Vì $\triangle BFC$ vuông tại F nên $FI = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle BFI$ cân tại I . Do đó $\widehat{FIC} = 2\widehat{IBF}$.
Tứ giác $BEHD$ nội tiếp nên $\widehat{HBD} = \widehat{DEH}$ (1).
Tứ giác $AEHF$ nội tiếp nên $\widehat{HAF} = \widehat{HEF}$ (2).
Mặt khác, $\widehat{HAF} = \widehat{HBD}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) (3).
Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{HBD} = \frac{1}{2}\widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{DEF}$.
Vậy bốn điểm E, F, I, D cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi K, L lần lượt là trung điểm của BE, FC . Suy ra IK là đường trung bình của tam giác $BEC \Rightarrow IK \parallel EC \Rightarrow IK \perp BE$.

Mặt khác $IH \perp HP$ nên tứ giác $PKHI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HPI} = \widehat{HKI}$.

Chúng mình tương tự được $\widehat{HQI} = \widehat{HLI}$.

Ta có $\widehat{HKE} + \widehat{HKE} = 90^\circ$ và $\widehat{HLI} + \widehat{HLF} = 90^\circ$ (4).

Lại có $\triangle HBE \sim \triangle HCF \Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{BE}{CF} \Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{KE}{LF}$.

Mặt khác $\widehat{HEK} = \widehat{HFL}$ nên $\triangle HKE \sim \triangle HLF$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{HKE} = \widehat{HLF}$. Kết hợp với (4) suy ra $\widehat{HKI} = \widehat{HLI} \Rightarrow \widehat{HPI} = \widehat{HQI}$, do đó $\triangle IPQ$ cân tại I . Mà $IH \perp PQ$ nên H là trung điểm PQ .

□

Câu 5. Cho $2n + 1$ số nguyên, trong đó có đúng một số 0 và các số $1, 2, 3, \dots, n$ mỗi số xuất hiện hai lần. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn sắp xếp được $2n + 1$ số nguyên trên thành một dãy sao cho với mọi $m = 1, 2, \dots, n$ có đúng m số nằm giữa hai số m .

Lời giải.

Để ý rằng, với hai tập, mỗi tập gồm các số lẻ từ 1 đến $2k + 1$ ta có thể sắp xếp sao cho thỏa mãn yêu cầu bài toán với một ô trống ở giữa, như sau:

$$2k + 1; 2k - 1; \dots; 3; 1; \square; 1; 3; \dots; 2k - 1; 2k + 1$$

Với hai tập, mỗi tập gồm các số chẵn từ 2 đến $2k$, ta có thể sắp xếp sao cho thỏa mãn yêu cầu bài toán với hai ô trống ở giữa, như sau:

$$2k; 2k - 2; \dots; 4; 2; \square; \square; 2; 4; \dots; 2k - 2; 2k$$

Như vậy, có hai trường hợp

- Với $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ cách xếp sau sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$2k + 1; 2k - 1; \dots; 3; 1; 2k; 1; 3; \dots; 2k - 1; 2k + 1; 2k - 2; \dots; 4; 2; 2k; 0; 2; 4; \dots; 2k - 2.$$

- Với $n = 2k, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ cách xếp sau sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$2k - 1; \dots; 3; 1; 2k; 1; 3; \dots; 2k - 1; 2k - 2; \dots; 4; 2; 0; 2k; 2; 4; \dots; 2k - 2.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

□

———— HẾT ————

61 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BÌNH DƯƠNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. (3 điểm)

a/ Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

b/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - |x| = |yz| \\ y^2 - |y| = |xz| \\ z^2 - |z| = |yx| \end{cases}$$

Lời giải.

a/ Ta có: $x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \Leftrightarrow (x^2 - x + 1) - 2x = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$

Đặt $a = x^2 - x + 1, b = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 2a - b = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{ab} \Rightarrow (2a - b)^2 = \frac{ab}{3} \Rightarrow 12a^2 - 13ab + 3b^2 =$

$$0 \Rightarrow (4a - 3b)(3a - b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4a = 3b \\ 3a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

b/
$$\begin{cases} x^2 - |x| = |yz| \\ y^2 - |y| = |xz| \\ z^2 - |z| = |yx| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|(|x| - 1) = |yz| \\ |y|(|y| - 1) = |xz| \\ |z|(|z| - 1) = |yx| \end{cases} \Rightarrow |xyz| = (|x| - 1)(|y| - 1)(|z| - 1)(xyz \neq 0) \text{ (vô lý)}.$$

Lại có $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ là một nghiệm của hệ. Với mọi $(x, y, z) = (0, a, b)$ hoặc $(x, y, z) = (0, 0, b)$ đều không thỏa mãn hệ; vai trò của x, y, z như nhau.

Kết luận: hệ có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. □

Câu 2. (1,5 điểm)

Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

Lời giải.

$$M = \frac{x^2 + 4y^2 - 3y^2}{xy} \geq \frac{4xy}{xy} - \frac{3y}{x} \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Kết luận: giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{5}{2}$ □

Câu 3. (2 điểm)

a/ Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn: $b + d \neq 0; \frac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$ ản x luôn có nghiệm.

b/ Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - y^2 = xy + 8$.

Lời giải.

a) Giả sử phương trình đã cho vô nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4b < 0 \\ c^2 - 4d < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b + d} < 4$ mà $\frac{a^2 + c^2}{b + d} \geq 4$.

Suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) $x^2 - y^2 = xy + 8 \Rightarrow x^2 - xy - (y^2 + 6) = 0 \Rightarrow \Delta = y^2 + 4(y^2 + 8) = 5y^2 + 32$. Để (x, y) là cặp số nguyên suy ra $\Delta = a^2$. a^2 là số chính phương nên chia cho 5 dư 0, 1, 4 mà theo Δ , a^2 chia 5 dư 2. Vậy không có cặp số nào thoả mãn.

□

Câu 4. (3,5 điểm)

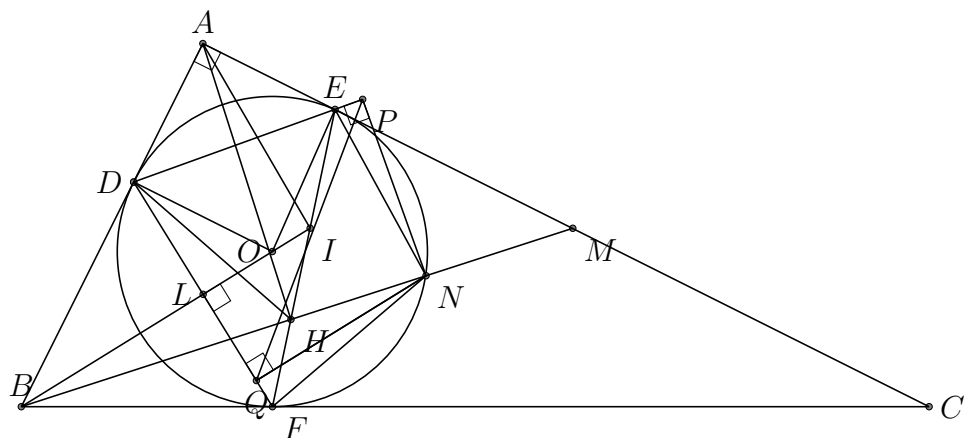
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của O với các cạnh AB, AC, BC ; I là giao điểm của BO với EF , M là điểm di động trên đoạn CE .

a/ Tính số đo góc $\widehat{BIF}$.

b/ Gọi H là giao điểm của BM và EF . Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác $ABHI$ là tứ giác nội tiếp.

c/ Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ $\widehat{EF}$ của O ; P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của N lên các đường thẳng DE, DF . Xác định vị trí của M để độ dài PQ lớn nhất.

Lời giải.



a/ Gọi L là giao của BO và $DF \Rightarrow \widehat{ILF} = 90^\circ$

Để thấy $DAEO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{DFI} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = 45^\circ$

Do đó: $\widehat{BIF} = 45^\circ$

b/ $\triangle ABM$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABD} = 45^\circ$

Do đó: $\widehat{DBH} = \widehat{DFH} = 45^\circ \Rightarrow DBFH$ nội tiếp. Mà $ODBF$ nội tiếp $\Rightarrow B, D, O, H, F$ cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{OHB} = 90^\circ$.

Mà: $AO \perp BM$ nên $\widehat{BAH} = 45^\circ = \widehat{BIH} \Rightarrow ABHI$ nội tiếp.

c/ $NQDP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NPQ} = \widehat{NDQ} = \widehat{NDF} = \widehat{NEF}$.

Tương tự ta có: $\widehat{NQP} = \widehat{NFE} \Rightarrow \triangle NPQ \sim \triangle NEF \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NP}{NE} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$.

Đẳng thức xảy ra: $\Leftrightarrow P$ trùng E , Q trùng $F \Leftrightarrow PQ$ là đường kính của $(O) \Leftrightarrow M$ là giao của đường kính DN của O và AC .



———— HẾT ————

62

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC BÌNH PHƯỚC

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Cho biểu thức $Q = \frac{(x+27).P}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$. Chứng minh $Q \geq 6$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - x + x\sqrt{x} + 6 - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} - x + x\sqrt{x} + 6 - x - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{-x + x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(x-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \sqrt{x} - 2. \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(x+27).P}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+27}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+36}{\sqrt{x}+3} \\ &= \sqrt{x} - 3 + \frac{36}{\sqrt{x}+3} = -6 + (\sqrt{x}+3) + \frac{36}{\sqrt{x}+3} \geq -6 + 12 = 6 \end{aligned}$$

□

Câu 2. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow -2m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2 \quad (1).$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$$

$$\text{Mà } x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_1 - 2m + 2) + 2(x_1 + x_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 3 + 4(m-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $m = 2 - \sqrt{2}$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$.
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} = 0 \\ \sqrt{x^2-xy^2+1} + 3\sqrt{x-1} = xy^2 \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Điều kiện $1 \leq x \leq 7$.

Ta có:

$$\begin{aligned} x + 2\sqrt{7-x} &= 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1 \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1}) + (x-1) + \sqrt{(x-1)(7-x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1}) + \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1})(2 - \sqrt{x-1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 4, x = 5$.

- b) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - xy^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$, kết hợp với phương trình (1), ta có: $y > 0$.

Từ (1), ta có:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} &= 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = xy\sqrt{y^2+4} \\ \Leftrightarrow 16(x+1) &= x^2y^2(y^2+4) \Leftrightarrow (y^4+4y^2)x^2 - 16x - 16 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình theo ẩn x ta được $x = \frac{4}{y^2}$ hoặc $x = \frac{-4}{y^2+4} < 0$ (loại).

Với $x = \frac{4}{y^2} \Leftrightarrow xy^2 = 4$ thế vào phương trình (2), ta được: $\sqrt{x^2-3} + 3\sqrt{x-1} = 4$.

Điều kiện $x \geq \sqrt{3}$, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-3} + 3\sqrt{x-1} &= 4 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3} - 1) + 3(\sqrt{x-1} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x-2 = 0 \left(\text{vì } \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} > 0 \right) &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Với $x = 2$ ta có $\begin{cases} y^2 = 2 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{2}$. Kết hợp với điều kiện trên, hệ phương trình có nghiệm $(2, \sqrt{2})$.

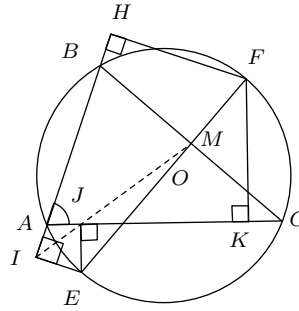
□

Câu 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AC = b$, $AB = c$ ($b > c$). Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M (E thuộc cung lớn BC). Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC . Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC .

- a) Chứng minh các tứ giác $AIEJ$, $CMJE$ nội tiếp và $EA \cdot EM = EC \cdot EI$.
- b) Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK .

- c) Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c .

Lời giải.



- a) Ta có: $\widehat{AIE} = \widehat{AJE} = 90^\circ$ nên tứ giác $AIEJ$ nội tiếp.
 $\widehat{EMC} = \widehat{EJC} = 90^\circ$ nên tứ giác $CMJE$ nội tiếp.
 Xét tam giác $\triangle AEC$ và $\triangle IEM$, có:
 $\widehat{ACE} = \widehat{EMI}$ (cùng chắn cung JE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CMJE$).
 $\widehat{EAC} = \widehat{EIM}$ (cùng chắn cung JE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AIEJ$).
 Do đó hai tam giác $\triangle AEC$ và $\triangle IEM$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AE}{EI} = \frac{EC}{EM} \Rightarrow EA \cdot EM = EC \cdot EI$ (đpcm).
 b) Ta có: $\widehat{IEM} = \widehat{AEC} \Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{CEM}$.
 Mặt khác $\widehat{AEI} = \widehat{AJI}$ (cùng chắn cung IJ), $\widehat{CEM} = \widehat{CJM}$ (cùng chắn cung CM). Suy ra $\widehat{CJM} = \widehat{AJI}$. Mà I, M nằm hai phía của đường thẳng AC nên $\widehat{CJM} = \widehat{AJI}$ (đối đỉnh).
 Suy ra I, J, M thẳng hàng.
 Tương tự, ta chứng minh được H, M, K thẳng hàng.
 Do tứ giác $CFMK$ nội tiếp nên $\widehat{CFK} = \widehat{CMK}$.
 Do tứ giác $CMJE$ nội tiếp nên $\widehat{JME} = \widehat{JCE}$ (cùng phụ với $\widehat{ACF}$).
 Do đó $\widehat{CMK} = \widehat{JME} \Rightarrow \widehat{JMK} = \widehat{EMC} = 90^\circ$ hay $IJ \perp HK$.
 c) Kẻ $BN \perp AC$ ($N \in AC$). Vì $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABN} = 30^\circ$
 $\Rightarrow AN = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow BN^2 = AB^2 - AN^2 = \frac{3c^2}{4}$
 $\Rightarrow BC^2 = BN^2 + CN^2 = \frac{3c^2}{4} + \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$.
 Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Xét tam giác đều BCE có $R = OE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3(b^2 + c^2 - bc)}$. $\square$

Câu 5. Chứng minh biểu thức $S = n^2(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 S &= n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6) \\
 &= n[(n^2 - 1)(n^2 + 6) + 5n(n^2 - 1)] \\
 &= n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) \\
 &= n(n - 1)(n + 1)(n + 2)(n + 3) \\
 &= (n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)
 \end{aligned}$$

Ta có S là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp chia cho $5!$ nên chia hết cho 120. $\square$

Câu 6.

- a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$. Chứng minh rằng $a^4 + b^6 + c^8 \leq 2$.
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x - 1)(y - 1)}$ với x, y là các số thực lớn hơn 1.

Lời giải.

- a) Từ giả thuyết $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$, ta có $a^4 \leq a^2, b^6 \leq b^2, c^8 \leq c^2$.
 Từ đó $a^4 + b^6 + c^8 \leq a^2 + b^2 + c^2$.
 Lại có: $(a - 1)(b + 1)(c + 1) - (a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0$
 nên $(a + 1)(b + 1)(c + 1) - (a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0$
 $\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2(ab + bc + ca) \leq 2$.
 Hơn nữa $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -(ab + bc + ca) \leq 2$. Vậy $a^4 + b^6 + c^8 \leq 2$.

- b) Ta có: $T = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x - 1)(y - 1)} = \frac{x^2(x - 1) + y^2(y - 1)}{(x - 1)(y - 1)} = \frac{x^2}{y - 1} + \frac{y^2}{x - 1}$.

Do $x > 1, y > 1$ nên $x - 1 > 0, y - 1 > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{x^2}{y - 1}, \frac{y^2}{x - 1}$, ta có:

$$\begin{aligned}
 (x - 1) + 1 &\geq 2\sqrt{x - 1} \Leftrightarrow (\sqrt{x - 1} - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x - 1}} \geq 2 \\
 (y - 1) + 1 &\geq 2\sqrt{y - 1} \Leftrightarrow (\sqrt{y - 1} - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y - 2\sqrt{y - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y - 1}} \geq 2
 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } T = \frac{x^2}{y - 1} + \frac{y^2}{x - 1} \geq \frac{2xy}{\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{y - 1}} \geq 8.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x^2}{y - 1} = \frac{y^2}{x - 1} \\ x - 1 = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 8$ khi $x = y = 2$. $\square$

———— HẾT ————

63 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, VÒNG 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b = 5, ab = 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= (a - \sqrt{ab} + b - \sqrt{ab}) (a + \sqrt{ab} + b + \sqrt{ab}) \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab. \end{aligned}$$

Thay $a + b = 5, ab = 2$ vào A ta được $A = 17$ □

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2(x_1 + x_2) + x_1^2 x_2^2 = 0$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m + 1 > 0$. Vì $m^2 - m + 1 > 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, kí hiệu x_1, x_2 .

$$\text{Áp dụng định lí Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m, \\ x_1 x_2 = m - 1. \end{cases}$$

$$\text{Do đó, } 2(x_1 + x_2) + x_1^2 x_2^2 = 0 \Leftrightarrow 4m + (m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1. \quad \square$$

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy = 36 \\ y^2 + yx = 45. \end{cases}$

b) Giải phương trình $2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{2x^2 + 11x - 2}$.

Lời giải.

a) Cộng hai phương trình theo vế của hệ ta được $x^2 + 2xy + y^2 = 81 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 81$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ x + y = -9. \end{cases}$$

* Với $x + y = 9 \Leftrightarrow y = 9 - x$ thay vào phương trình $x^2 + xy = 36$ ta được $x^2 + x(9 - x) = 36 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 5$.

* Tương tự, với $x + y = -9$ ta được $x = -4, y = -5$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(4; 5)$ và $(-4; -5)$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1, \\ 2x^2 + 11x - 2 \geq 0. \end{cases}$ Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương

$$4\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 2x^2 + 5x - 9 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 12 = 0 \quad (t = \sqrt{2x^2 + 5x + 3} \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -2(\text{loại}) \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 33 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{11}{2} \end{cases}. \text{ Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của phương}$$

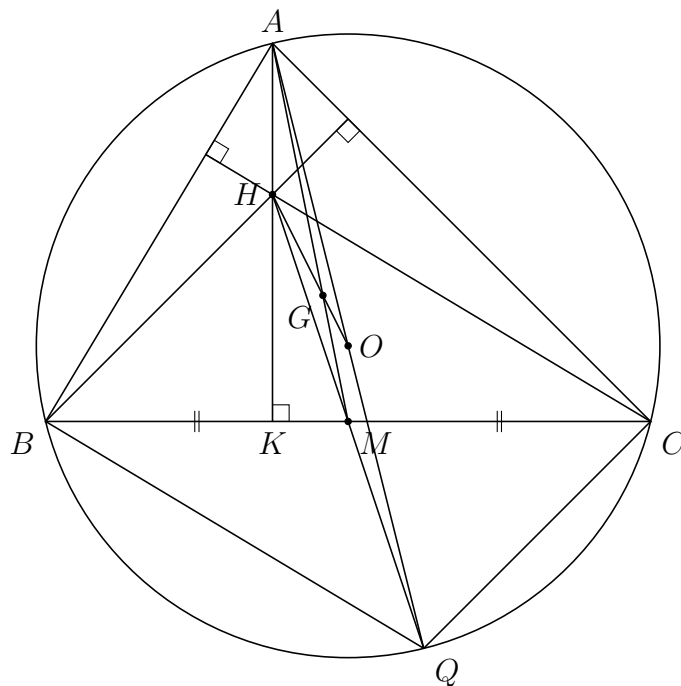
trình là $x = 3$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , vẽ hình bình hành $BHCQ$.

- Chứng minh rằng $ABQC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$.
- Gọi M là giao điểm của HQ và BC , G là giao điểm của AM với OH . Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC .
- Chứng minh rằng nếu OG song song với BC thì $\tan \widehat{AQB} \cdot \tan \widehat{AQC} = 3$.

Lời giải.



- Vì tứ giác $BHCQ$ là hình bình hành nên $BH \parallel QC$, $CH \parallel BQ$ do đó, $AC \perp CQ$, $AB \perp BQ$. Từ đó suy ra $ABQC$ nội tiếp đường tròn đường kính AQ hay A, B, C, Q nằm trên đường tròn (O) .
- Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{AQC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$) mà $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = \widehat{CAO} + \widehat{AQC} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{CAO}$.
- Vì $BHCQ$ là hình bình hành nên M là trung điểm BC và HQ . Tam giác AHQ có M là trung điểm HQ , O là trung điểm AQ , OH cắt AM tại G nên nhận G làm trọng tâm. Suy ra $AG = \frac{2}{3}AM$ mà M là trung điểm BC do đó G cũng là trọng tâm tam giác ABC .
- Ta có: $\tan \widehat{AQB} = \tan \widehat{ACB} = \frac{AK}{KC}$, $\tan \widehat{AQC} = \tan \widehat{ABC} = \frac{AK}{KB}$.
Lại có, $\triangle HBK \sim \triangle CAK$ (g.g) nên $\frac{HB}{AC} = \frac{HK}{CK} = \frac{BK}{AK}$ suy ra $AK \cdot HK = BK \cdot CK$.
Do đó, $\tan \widehat{AQB} \cdot \tan \widehat{AQC} = \frac{AK}{HK} = \frac{AM}{GM} = 3$.

□

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$5(x + y + z) + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \geq 18.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được $x + \frac{1}{x^3} \geq \frac{2}{x}$. Ta chỉ cần chứng minh $4x + \frac{2}{x} \geq x^2 + 5$. Thật vậy, $4x + \frac{2}{x} - x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 2) \leq 0$ (đúng, vì $x^2 < 3$ nên $x < 2$). □

———— **HẾT** ————

64 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH, VÒNG 2**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** Giải phương trình

a) $(x-1)^2 + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{5}{2}.$

b) $3x\sqrt{x^2+x+1} = 3x^2+x+1.$

Lời giải.a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình $x^2-2x+1 + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{5}{2}$. Đặt

$$t = x^2-2x+3 \geq 2. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - \frac{9}{2}t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ t = \frac{1}{2} \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}. \text{ Suy}$$

ra $x^2-2x+3 = 4 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$

b)

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3x\sqrt{x^2+x+1} = 2x^2 + (x^2+x+1)$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)^2 - 3\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} + 1 = 0.$$

Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$, phương trình trở thành $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$

Với $t = 1$, ta có $x = \sqrt{x^2+x+1}$ (Vô nghiệm).

Với $t = \frac{1}{2}$, ta có $2x = \sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^2+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{6}.$

□

Câu 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{2}{x} = 2y + \frac{1}{y} \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \end{cases}.$$

Lời giải.Điều kiện: $x \geq 1, y \leq 2, y \neq 0$. Phương trình đầu tương đương với

$$x^2y + 2y = 2y^2 + x \Leftrightarrow (x-2y)(xy-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 0 \\ xy-1 = 0 \end{cases}.$$

Với $x = 2y$, thay vào phương trình còn lại ta được

$$\sqrt{2y-1} + \sqrt{2-y} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{(2y-1)(2-y)} = -y \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Với $y = \frac{1}{x}$, thay vào phương trình còn lại ta được $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-\frac{1}{x}} = 1$. Vì $x \geq 1$ nên $VT \geq 1 = VP$, do đó $x = 1$.Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

□

Câu 3. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn $a < b < c$ sao cho đa thức $P(x) = x(x+a)(x+b)(x+c) + 1$ là bình phương của một đa thức có hệ số nguyên.**Lời giải.**

Do đa thức $P(x)$ có bậc cao nhất là 4 và hệ số của nó là 1, nên ta có thể giả sử $P(x) = (x^2 + mx + n)^2$ với $m, n \in \mathbb{Z}$.

Từ $P(0) = 1$, suy ra $n = \pm 1$.

Với $n = 1$, ta có $x(x + a)(x + b)(x + c) + 1 = (x + mx + 1)^2 \Leftrightarrow x(x + a)(x + b)(x + c) = x(x + m)(x^2 + mx + 2)$. Suy ra $m > 0$ và phương trình $x^2 + mx + 2 = 0$ có hai nghiệm nguyên âm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8 = k^2, k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (m + k)(m - k) = 8$. Do $m > k > 0$ và cùng chẵn nên

$$\begin{cases} m + k = 4 \\ m - k = 2 \end{cases}. \text{ Suy ra } m = 3. \text{ Vậy } P(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

Với $n = -1$, tương tự ta có

$$x(x + a)(x + b)(x + c) = x(x + m)(x^2 + mx - 2)$$

Vì phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ có nghiệm nguyên âm nên trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy $(a; b; c) = (1; 2; 3)$. □

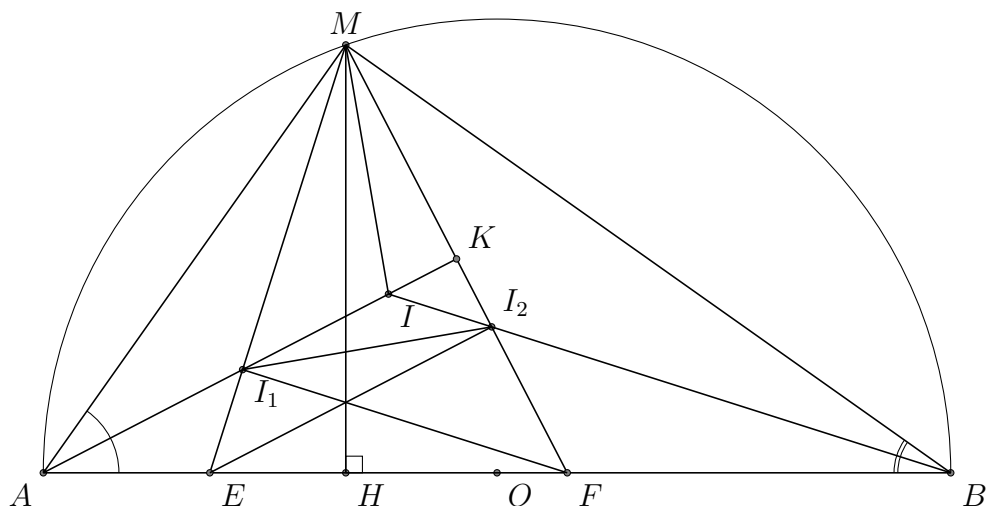
Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và điểm M nằm trên nửa đường tròn đó (M khác A và B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AB . Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác MAB, MAH, MBH . Các đường thẳng MI_1, MI_2 cắt AB tương ứng tại E và F .

a) Chứng minh rằng $AI_1 \perp MI_2$ và $MI \perp I_1I_2$.

b) Chứng minh rằng EFI_2I_1 là tứ giác nội tiếp đường tròn và các đường thẳng MH, EI_2, FI_1 đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của I_1I_2 theo R khi M thay đổi trên nửa đường tròn đã cho.

Lời giải.



a) Gọi $K = AI_1 \cap MF$. Vì $\widehat{MAB} = \widehat{BMH}$ (cùng phụ với $\widehat{MBA}$), suy ra $\widehat{MAK} = \widehat{BMF}$. Mà $\widehat{BMF} + \widehat{AMF} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{MAK} + \widehat{AMF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$ hay $AI_1 \perp MI_2$.

Tương tự $BI_2 \perp MI_1$, suy ra I là trực tâm của tam giác MI_1I_2 hay $MI \perp I_1I_2$.

b) Vì có AK vừa là đường cao vừa là phân giác nên tam giác AMF cân tại A . Suy ra K là trung điểm của MF . Vì $\widehat{EMF} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = 45^\circ$ và $\widehat{I_1KM} = 90^\circ$ nên tam giác MI_1F vuông cân tại K .

Suy ra $MI_1 = \sqrt{2}MK = \frac{MF}{\sqrt{2}}$. Tương tự ta có $MI_2 = \frac{ME}{\sqrt{2}}$. Suy ra $\frac{MI_1}{MF} = \frac{MI_2}{ME} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta MI_1I_2 \sim \Delta MFE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MI_1I_2} = \widehat{MFE} \Rightarrow$ tứ giác EFI_2I_1 nội tiếp.

Vì $\frac{MI_1}{MF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\widehat{I_1MF} = 45^\circ$ nên tam giác MI_1F vuông cân tại $I_1 \Rightarrow \widehat{MI_1F} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FI_1E} = 90^\circ$. Tương tự ta cũng có $\widehat{EI_2F} = 90^\circ$. Suy ra MH, EI_2, FI_1 là các đường cao của tam giác MEF , nên MH, EI_2, FI_1 đồng quy.

c) Vì tam giác AMF cân tại A nên $AF = AM$. Tương tự $BE = BM$. Suy ra $EF = AF + BE - AB = AM + BM - AB \leq \sqrt{2(AM^2 + BM^2)} - AB = \sqrt{2AB^2} - AB = 2R(\sqrt{2} - 1)$. Từ câu b) ta có $\frac{I_1I_2}{EF} = \frac{MI_1}{MF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $I_1I_2 = \frac{EF}{\sqrt{2}} \leq \frac{2R(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = (2 - \sqrt{2})R$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $AM = BM$ hay M là điểm chính giữa AB . Vậy giá trị lớn nhất của I_1I_2 là $(2 - \sqrt{2})R$. $\square$

Câu 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a, b, c \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{(a + b + c)^3}{3(a^3 + b^3 + c^3)}.$$

Lời giải.

Ta có $3(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = (a - b)(a^2 - b^2) + (b - c)(b^2 - c^2) + (c - a)(c^2 - a^2) \geq 0$. Suy ra $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$. Do đó

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{(a + b + c)^3}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 1 \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}, t \geq 1$, khi đó $P \leq t + \frac{2}{t} + 1$.

Vì $a, b, c \in [1, 2]$, nên $a + b \geq c, b + c \geq a, c + a \geq b$. Suy ra $c(a + b) + a(b + c) + b(c + a) \geq a^2 + b^2 + c^2$, hay $t \leq 2$. Từ $t \in [1, 2]$ ta nhận được $(t - 1)(t - 2) \leq 0 \Leftrightarrow t + \frac{2}{t} + 1 \leq 4$. Dấu đẳng thức khi $a = b = c$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4. $\square$

————— **HẾT** —————

65

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC ĐẮK LẮK

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $f(x) = x^2 - (2m + 3)x + m^2 - 1$ (m là tham số).

1. Tìm giá trị của m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.
2. Tìm giá trị của x để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $\frac{2017}{4}$.

Lời giải.

1. Phương trình: $x^2 - (2m + 3)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m + 13 > 0 \\ 2m + 3 > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -\frac{13}{12} < m < -1 \end{cases}.$$

2. Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (2m + 3)x + m^2 - 1 = x^2 - 2x \cdot \frac{2m + 3}{2} + \left(\frac{2m + 3}{2}\right)^2 - \frac{12m + 13}{4} \\ &= \left(x - \frac{2m + 3}{2}\right)^2 - \frac{12m + 13}{4} \geq -\frac{12m + 13}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó GTNN của } f(x) \text{ là } \frac{2017}{4} \Leftrightarrow -\frac{12m + 13}{4} = \frac{2017}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1015}{6}.$$

□

Câu 2.

1. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1 + \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x^2 + 2x}} = 0$.
2. Giải phương trình: $(\sqrt{3x + 4} - \sqrt{3x + 2})(1 + \sqrt{9x^2 + 18x + 8}) = 2$.

Lời giải.

1. Điều kiện: $\begin{cases} x < -2 \\ x > 0 \end{cases}$. Khi đó:

$$\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1 + \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x^2 + 2x}} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x} + 2(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - (x - 1)\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + 2x} + 2(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x}(\sqrt{x^2 + 2x} - x + 1) - 2(\sqrt{x^2 + 2x} - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2x} - 2)(\sqrt{x^2 + 2x} - x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 2x} = x - 1 \end{cases}.$$

$$\bullet \sqrt{x^2 + 2x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{5} \\ x = -1 + \sqrt{5} \end{cases} \text{ (TMDK).}$$

$$\bullet \sqrt{x^2 + 2x} = x - 1 \ (x \geq 1) \Leftrightarrow x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (Loại).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\}$.

2. Điều kiện: $x \geq -\frac{2}{3}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x+2}) (1 + \sqrt{9x^2 + 18x + 8}) = 2 \\
& \Leftrightarrow (\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x+2}) (1 + \sqrt{9x^2 + 18x + 8}) = (\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x+2}) (\sqrt{3x+4} + \sqrt{3x+2}) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+4} - \sqrt{3x+2} = 0 \\ 1 + \sqrt{9x^2 + 18x + 8} = \sqrt{3x+4} + \sqrt{3x+2} \end{cases} \\
& \bullet \sqrt{3x+4} - \sqrt{3x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{3x+2}} = 0 \Rightarrow \text{Phương trình vô nghiệm.} \\
& \bullet 1 + \sqrt{9x^2 + 18x + 8} = \sqrt{3x+4} + \sqrt{3x+2} \\
& \Leftrightarrow 1 + \sqrt{(3x+4)(3x+2)} - \sqrt{3x+4} - \sqrt{3x+2} = 0 \\
& \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3x+4})(1 - \sqrt{3x+2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+4} = 1 \\ \sqrt{3x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \\
& \text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất } x = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

□

Câu 3.

1. Tìm các số nguyên tố p sao cho $13p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.
2. Tìm hai số x, y nguyên dương sao cho $(x+2)^2 - 6(y-1)^2 + xy = 24$.

Lời giải.

1. Giả sử $13p + 1 = a^3$ ($a \in \mathbb{N}, a \geq 3$).

Phương trình $\Leftrightarrow 13p = (a-1)(a^2 + a + 1)$.

Do 13 và p đều là các số nguyên tố, nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} a-1 = 13 \\ a^2 + a + 1 = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ p = 211 \end{cases} \\
& \begin{cases} a-1 = p \\ a^2 + a + 1 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = p \\ (a-3)(a+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ a = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $p = 2$ hoặc $p = 211$.

2. Ta có:

$$(x+2)^2 - 6(y-1)^2 + xy = 24 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 6y^2 + 12y + xy = 26$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + 4x) + (3xy - 6y^2 + 12y) = 26 \Leftrightarrow x(x-2y+4) + 3y(x-2y+4) = 26$$

$$\Leftrightarrow (x-2y+4)(x+3y) = 2 \cdot 13 = 1 \cdot 26$$

Vì x, y nguyên dương do đó $x+3y$ nguyên dương nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{cases} x+3y = 1 \\ x-2y+4 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = 1 \\ x-2y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{68}{5} \\ y = -\frac{21}{5} \end{cases} \text{ (loại).} \\
& \bullet \begin{cases} x+3y = 26 \\ x-2y+4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = 26 \\ x-2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{43}{5} \\ y = \frac{29}{5} \end{cases} \text{ (loại).} \\
& \bullet \begin{cases} x+3y = 2 \\ x-2y+4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = 2 \\ x-2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{31}{5} \\ y = \frac{7}{5} \end{cases} \text{ (loại).}
\end{aligned}$$

$$\bullet \begin{cases} x + 3y = 13 \\ x - 2y + 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 13 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất: $(x; y) = (4; 3)$.

□

Câu 4.

- Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{4c}{a+b} > 2$.
- Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 11 \\ ab + bc + ca = 7 \end{cases}$.

Chứng minh: $\frac{1}{3} \leq a, b, c \leq 3$.

Lời giải.

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz dạng Engel và bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{4c}{a+b} &= \frac{a^2}{ab+ca} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{4c^2}{ca+bc} \geq \frac{(a+b+2c)^2}{2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{(a+b)^2 + 4c(a+b) + 4c^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{4ab+4ac+4bc+4c^2}{2(ab+bc+ca)} \\ &= 2 + \frac{c^2}{ab+bc+ca} > 2 \text{ (do } c > 0). \end{aligned}$$

- Từ giả thiết ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \Rightarrow a+b+c = 5$$

$$\Rightarrow b+c = 5-a \Rightarrow bc \leq \frac{(5-a)^2}{4}$$

$$\circ ab+bc+ca = 7 \Rightarrow a(b+c) = 7-bc \Rightarrow a(5-a) = 7-bc$$

$$\Rightarrow a(5-a) \geq 7 - \frac{(5-a)^2}{4} \Leftrightarrow -3a^2 + 10a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq a \leq 3$$

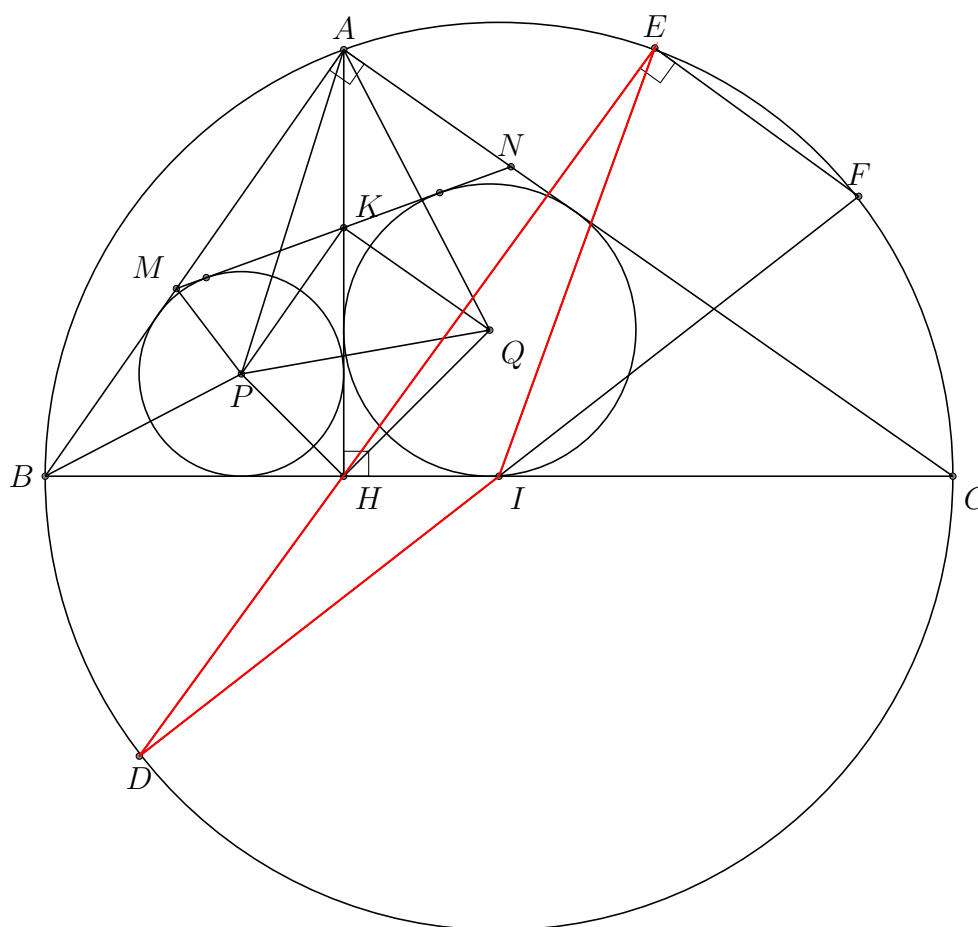
Do vai trò của a, b, c là bình đẳng và đối xứng nên ta có: $\frac{1}{3} \leq a, b, c \leq 3$.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi (P) và (Q) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp của tam giác AHB và tam giác AHC . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài (khác BC) của hai đường tròn (P) và (Q) , cắt AB, AH, AC theo thứ tự ở M, K, N .

- Chứng minh tam giác HPQ đồng dạng với tam giác ABC .
- Chứng minh $PK \parallel AB$ và tứ giác $BMNC$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh năm điểm A, M, P, Q, N cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết $AB = a, AC = 3a$. Một đường thẳng thay đổi đi qua H cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D và E . Tính giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IDE theo a .

Lời giải.



- Do P, Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH, AHC
 $\Rightarrow HP, HQ$ lần lượt là các đường phân giác của góc $\widehat{BHA}, \widehat{CHA} \Rightarrow \widehat{PHQ} = 90^\circ$ (1).
Ta có: $\triangle ABH \sim \triangle CBA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{AB}$ (2).
Mặt khác: $\widehat{ABH} = \widehat{HAC} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{PBH} = \widehat{HAQ} \\ \widehat{BHP} = \widehat{AHQ} = 45^\circ \end{cases}$
 $\Rightarrow \triangle PBH \sim \triangle QAH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{QH}{PH}$ (3).
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \triangle HPQ \sim \triangle ABC$.
- MN, AH là các tiếp tuyến chung của $(P), (Q) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MKP} = \widehat{PKH} \\ \widehat{HKQ} = \widehat{QKN} \end{cases} \Rightarrow \widehat{PKQ} = 90^\circ$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $PKQH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PKH} = \widehat{PQH}$ (cùng chắn cung $\widehat{PH}$).
Theo chứng minh trên: $\widehat{PQH} = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{PKH} = \widehat{BCA}$.
Suy ra: $\widehat{PKH} = \widehat{BAH}$. Do hai góc bằng nhau và ở vị trí so le trong nên: $PK \parallel AB$.
○ Ta có: $\widehat{BMN} + \widehat{ACB} = \widehat{MAK} + \widehat{MKA} + \widehat{ACB} = \widehat{MKP} + \widehat{MKA} + \widehat{PKH} = 180^\circ$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $BMNC$ nội tiếp.
- AB, MN là các tiếp tuyến của đường tròn (P) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{PMK} = \frac{\widehat{BMN}}{2} \\ \widehat{MAP} = \frac{\widehat{MAH}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} \end{cases}.$$

Mà $\widehat{BMN} + \widehat{BCA} = 180^\circ$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{PMK} + \widehat{MAP} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra: $\widehat{PAN} = \widehat{PMN}$ hay tứ giác $MPNA$ nội tiếp một đường tròn.

Chứng minh tương tự ta cũng có tứ giác $AMQN$ nội tiếp một đường tròn.

Vậy 5 điểm A, M, Q, N, P cùng thuộc một đường tròn.

4. Kẻ đường kính DF của (I) .

Ta có: $DF^2 = BC^2 = 10a^2$ và $\widehat{DEF} = 90^\circ$.

$$S_{\triangle IDE} = \frac{1}{2} S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4} ED \cdot EF \leq \frac{1}{4} \frac{ED^2 + EF^2}{2} = \frac{DF^2}{8} = \frac{5a^2}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IDE là $\frac{5a^2}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ED = EF \Leftrightarrow \triangle DEF$ vuông cân tại $E \Leftrightarrow \triangle DIE$ vuông cân tại I .

Khi đó E, D là giao điểm của quỹ tích cung chứa góc 45° dựng trên IH (cố định) và đường tròn tâm (I) .

□

———— HẾT ————

66 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC ĐỒNG THÁP

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. (1,5 điểm)

- a. Cho biểu thức $Q = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 9)(x + 2)^2}$ với $x \neq -2, x \neq \pm 3$. Rút gọn Q và tính giá trị biểu thức Q khi $x = \frac{3}{2}$.
- b. Giải phương trình $3\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$.

Lời giải.

a. Ta có $Q = \frac{(x+2)(x-3)(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+2)^2} = \frac{x-1}{x+2}$.

Khi $x = \frac{3}{2}$ thì $Q = \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{1}{7}$.

b. $3\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}(x^2 + 1)(2x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2 + 1)(2x + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = (x^2 + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -\frac{1}{2}; x = \sqrt{2}$.

□

Câu 2. (1,5 điểm)

- a. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$.
- b. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y - 2m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để (P) cắt d tại hai điểm A và B sao cho tam giác AOB đều và tính diện tích tam giác đó.

Lời giải.

a. $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ (x + y)^2 - xy = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ (x + y)^2 + x + y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ \begin{cases} x + y = -6 \\ x + y = 5 \end{cases} \end{cases}$

Với $\begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 17 \end{cases}$, hệ vô nghiệm.

Với $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

- b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $x^2 = 2m - 1$. d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Giả sử $A(-\sqrt{2m-1}; 2m-1)$ và $B(\sqrt{2m-1}; 2m-1)$.

Ta có: $OA = \sqrt{2m-1 + (2m-1)^2} = \sqrt{4m^2 - 2m}$, $OB = \sqrt{4m^2 - 2m}$, $AB = 2\sqrt{2m-1}$.

Để thấy $OA = OB$, nên tam giác AOB đều khi $OA^2 = AB^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 2m = 4(2m-1) \Leftrightarrow$

$$4m^2 - 10m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ thỏa mãn} \\ m = \frac{1}{2} \text{ loại} \end{cases}.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 3. (2,0 điểm)

- a. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x - 3 = 0$ (m là tham số). Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m và $H = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của H .
- b. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2$$

Lời giải.

- a. Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m+1$ và $x_1x_2 = -3$.
 Từ $H = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 = (2m+1)^2 - 8(-3) = (2m+1)^2 + 24 \geq 24$.
 Vậy min $H = 24$ khi $2m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

- b. Từ giả thiết ta có $0 < x, y, z < 1$. Do đó, theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\sqrt{x^2(1-x^2)} \leq \frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nên $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^3}{\sqrt{x^2(1-x^2)}} \geq 2x^3$. Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \geq 2y^3 \text{ và } \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2z^3.$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2(x^3 + y^3 + z^3) = 2. \text{ Ta có điều phải chứng minh.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

Câu 4. (2,0 điểm)

- a. Để tạo sân chơi cho học sinh tham gia các hoạt động tìm hiểu về hình ảnh và con người Đồng Tháp, Đoàn Thanh Niên Cộng Sản Hồ Chí Minh của một trường đã tổ chức hội thi Đồng Tháp trong trái tim tôi với các nội dung về hoạt động khởi nghiệp, du lịch trải nghiệm những địa danh, nét văn hóa đặc trưng làng nghề, các món ăn, cây trái ... của tỉnh. Sau hai

vòng thi Ban Tổ Chức đã chọn ra ba đội xuất sắc là Hoa Sen, Hoa Súng, Hoa Tràm vào thi chung kết. Theo qui định của Ban Tổ Chức Hội Thi, mỗi đội phải trả lời 12 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được cộng 10 điểm, mỗi câu trả lời sai trừ 3 điểm, mỗi câu không trả lời thì không được điểm. Trải qua các câu hỏi thì, đội Hoa Sen được 61 điểm. Hỏi đội Hoa Sen đã trả lời đúng, sai và không trả lời bao nhiêu câu hỏi?

- b. Thực hiện đổi mới phương pháp dạy học, đổi mới kiểm tra đánh giá theo hướng phát triển năng lực học sinh, trong một tiết dạy hình học, một giáo viên đã ứng dụng công nghệ thông tin, sử dụng phần mềm biểu diễn cho học sinh quan sát trực quan. Cụ thể: Hình thang cân $ABCD$ (AB song song với CD), có $AB = 30$ cm, $CD = 54$ cm và đường cao $AH = 9$ cm. Cho hình thang này quay quanh cạnh đáy CD . Em hãy giúp bạn tính:

- Thể tích của hình tạo thành.
- Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành.

Lời giải.

- a. Mỗi câu trả lời đúng được 10 điểm và sai bị trừ 3 điểm.

Trải qua các vòng đấu đội Hoa Sen được 61 điểm nên số câu trả lời đúng của đội là 7 câu, bị sai 3 câu và không trả lời 2 câu.

- b. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình khi quay xung quanh cạnh CD .

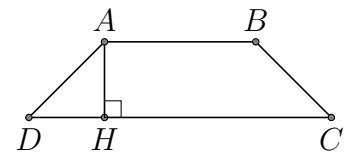
- Thể tích của hình tạo thành.

$$\text{Ta có } V = \frac{2}{3}DH \cdot \pi \cdot AH^2 + AB \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 9^2 \pi + 30 \cdot 9^2 \pi = 3078\pi \text{ (đvtt)}$$

- Diện tích mặt ngoài của hình tạo thành.

$$\text{Ta có: } AD = \sqrt{HD^2 + AH^2} = \sqrt{235}.$$

$$S_{xq} = 2 \cdot \pi \cdot AH \cdot AD + 2 \cdot \pi \cdot AH \cdot AB = 2 \cdot \pi \cdot AH (AD + AB) = 18\pi(30 + \sqrt{235}) \text{ (đvdt)}$$



□

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại đỉnh A có phân giác trong AM (M thuộc BC) và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với cạnh BC cắt đoạn thẳng AC tại N , cắt đường thẳng AB tại P .

- Chứng minh tứ giác $PAMC$ nội tiếp trong một đường tròn và tam giác PMC vuông cân.
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC , I là trung điểm của đoạn PC . Chứng minh ba điểm M, O, I thẳng hàng và MO song song với BN .
- Chứng minh $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$.
- Khi $AB = 3$ cm. Hãy tính diện tích tam giác PBC .

Lời giải.

- Chứng minh tứ giác $PAMC$ nội tiếp trong một đường tròn và tam giác PMC vuông cân.

Cách 1: Xét hai tam giác PMB và CAB có $\widehat{PMB} = \widehat{CAB} = 90^\circ$. (1)

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, mà $\widehat{MNC} = \widehat{ANP} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{NPA} = 30^\circ = \widehat{ACB}$. (2)

Góc B chung. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\triangle PMB \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{BM}{BA} \Leftrightarrow BM \cdot BC = BP \cdot BA$.

Suy ra: Tứ giác $PAMC$ nội tiếp đường tròn.

Cách 2: Ta có $\widehat{PMC} = \widehat{PAC} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $PAMC$ nội tiếp đường tròn tâm I là trung điểm của PC . Suy ra $\widehat{PCM} = \widehat{MAB} = 45^\circ$.

Vậy tam giác PMC vuông cân tại M .

- b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC , I là trung điểm của đoạn PC . Chứng minh ba điểm M, O, I thẳng hàng và MO song song với BN .

Theo câu trên $\triangle MPC$ vuông cân tại M và I là trung điểm PC nên có ngay MI là đường trung trực của CP . Suy ra I, M, O thẳng hàng.

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} CA \perp PB \\ PM \perp BC \\ CA \cap PM = N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BN \perp PC \\ MO \perp PC \end{cases} \Rightarrow MO \parallel BN.$$

- c) Chứng minh $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$.

Ta có: $\widehat{PCN} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{PNC} = 180^\circ - (\widehat{PCN} + \widehat{CPN}) = 120^\circ$. (4)

Mặt khác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC , nên $\widehat{PBC} = \frac{1}{2}\widehat{POC} \Rightarrow \widehat{POC} = 2\widehat{PBC} = 120^\circ$. (5)

Từ (4) và (5) ta có $\widehat{PNC} = \widehat{POC}$.

- d) Khi $AB = 3$ cm. Hãy tính diện tích tam giác PBC .

Ta có $CA = AB \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$ và $BC = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 6$.

Theo giả thiết thì AM là đường phân giác nên

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{AC} \Leftrightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{BC - MB}{AC} \Leftrightarrow MB(AC + AB) = BC \cdot AB$$

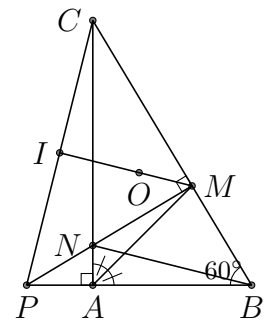
$$\Leftrightarrow MB = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} = \frac{3 \cdot 6}{3\sqrt{3} + 3} = \frac{6}{1 + \sqrt{3}} = 3(\sqrt{3} - 1).$$

Lại có $BP = \frac{BM}{\cos 60^\circ} = 6(\sqrt{3} - 1)$.

Vậy $S_{PBC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6(\sqrt{3} - 1) = 9(3 - \sqrt{3})$.

□

———— HẾT ————



67 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN HÀ LONG, SỞ GIÁO DỤC QUẢNG NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \text{ với } x \neq 0; x \neq \sqrt{3}.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

Lời giải.

1. Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right) \\ &= \left(\frac{(x - \sqrt{3})\sqrt{3} + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \left(\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}x} \right) = \frac{1}{x - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

2. Ta có:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = \sqrt{3} + 1 \text{ vào A ta có } A = \frac{1}{x - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}} = 1$$

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^3 - x^2 - x\sqrt{x-1} - 2 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ xy + 3y^2 + x = 3 \end{cases}$$

Lời giải.

1. ĐK: $x \geq 1$. Biến đổi về phương trình $x^2(x-1) - x\sqrt{x-1} - 2 = 0$.

Đặt $t = x\sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x^2(x-1)$. Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $t = 2$.

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow x\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 & (1) \\ xy + 3y^2 + x = 3 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + y(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = 0$, ta được $x = y$ hoặc $x = -2y$

- Với $x = y$, từ (2) ta có: $4x^2 + x - 3 = 0$, ta được $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$. Khi đó, $x_1 = y_1 = -1, x_2 = y_2 = \frac{3}{4}$.

- Với $x = -2y$, từ (2) ta có $y^2 - 2y - 3 = 0$, ta được $y_1 = -1, y_2 = 3$ Nếu $y = -1 \Rightarrow x = 2$.
Nếu $y = 3 \Rightarrow x = -6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là: $(-1; -1); \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right); (2; -1); (-6;)$. $\square$

Câu 3. Tìm các số tự nhiên n để $A = n^{2018} + n^{2008} + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải.

Tìm số tự nhiên để $A = n^{2018} + n^{2008} + 1$ là số nguyên tố.

- Xét $n = 0$ thì $A = 1$ không là số nguyên tố;
- Xét $n = 1$ thì $A = 3$ là số nguyên tố.
- Xét $n > 1$, ta thấy $A > n^2 + n + 1$

$$\begin{aligned} A &= n^{2018} - n^2 + n^{2008} - n + n^2 + n + 1 \\ &= n^2((n^3)^{672} - 1) + n \cdot ((n^3)^{669} - 1) + (n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

mà $(n^3)^{672} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1$, suy ra $(n^3)^{672} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$.

Tương tự: $(n^3)^{669} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Khi đó A chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$ và $A > n^2 + n + 1$ nên A là hợp số.

Tóm lại số tự nhiên cần tìm là $n = 1$. $\square$

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB , M là một điểm tùy ý thuộc đường tròn (M khác A và B). Qua A và B lần lượt kẻ các đường thẳng d và d' là tiếp tuyến với đường tròn. Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt d và d' lần lượt tại C và D . Đường thẳng BM cắt d tại E .

- Chứng minh $CM = CA = CE$.
- Chứng minh $AD \perp OE$.
- Tính độ dài đoạn AM theo R , nếu $AE = BD$.

Lời giải.

1. Gọi F là giao điểm của OC và AM , ta có $OC \perp AM$.

Ta có, $CM = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Hai tam giác vuông AME và AFC đồng dạng, nên $\frac{AE}{AC} = \frac{AM}{AF} = 2 \Rightarrow AE = 2AC \Rightarrow AC = CE$.

Vậy $CM = CA = CE$.

2. Gọi giao điểm của EO với d' là I , Chứng minh được $AEBI$ là hình bình hành $\Rightarrow BE \parallel AI$.

Ta có, $OD \perp BE$, $OD \perp AI$ mà $AB \perp DI \Rightarrow O$ là trực tâm của $\triangle ADI \Rightarrow OI \perp AD \Rightarrow OE \perp AD$ (đpcm).

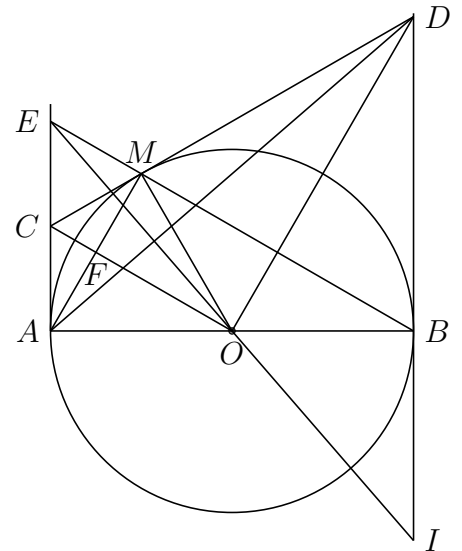
3. Tam giác COD vuông tại O (vì OC, OD là hai phân giác của hai góc kề bù), có OM là đường cao nên $OM^2 = CM.MD$.

Theo phần 1, ta có $EC = CA = CM \Rightarrow 2CM = AE$,

mà $BD = MD$ và $AE = BD$ (gt) $\Rightarrow 2CM = MD$.

$\Rightarrow 2CM^2 = R^2$ (do $MO = R$ và $OM^2 = CM.MD$)

$\Rightarrow CM = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AE = R\sqrt{2}$ (do $AE = 2CM$).



Do trong góc vuông AEB tại A , ta có $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow$

$$AM = \frac{AE \cdot AB}{\sqrt{AE^2 + AB^2}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

□

Câu 5. Cho $a; b$ thoả mãn $|a| \geq 2; |b| \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (a + b)(ab + 1) + 5$$

Lời giải.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} M &= (a^2 + 1)(b^2 + 1) - (a + b)(ab + 1) - 5 \\ &= (a^2b^2 - a^2b - ab^2 + ab) + (a^2 + b^2 - a - b - ab) - 4 \\ &= ab(a - 1)(b - 1) + \frac{1}{2} [(a - b)^2 + a(a - 2) + b(b - 2)] - 4 \end{aligned}$$

Chỉ ra với $|a| \geq 2$ thì $a(a - 1) \geq 2$ và $a(a - 2) \geq 0$ $|b| \geq 2$ thì $b(b - 1) \geq 2$ và $b(b - 2) \geq 0$ nên $ab(a - 1)(b - 1) \geq 4$; $\frac{1}{2} [(a - b)^2 + a(a - 2) + b(b - 2)] \geq 0 \Rightarrow M \geq 0$ hay $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (a + b)(ab + 1) + 5$. □

———— **HẾT** ————

68 ĐỀ THI VÀO CHUYÊN TOÁN 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ NỘI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

a) Giải phương trình $\sqrt{6x - x^2} + 2x^2 - 12x + 15 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 = y + \frac{3}{y} \\ 4y^2 = x + \frac{3}{x} \end{cases}$$

Lời giải.

a) ĐKXD: $6x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$.

Đặt $\sqrt{6x - x^2} = t$. Ta có $6x - x^2 = 9 - (x - 3)^2 \leq 9$ nên $0 \leq t \leq 3$.

Phương trình đã cho có dạng $-2t^2 + t + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (tmdk)} \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)}. \end{cases}$

Với $t = 3$, ta có $\sqrt{6x - x^2} = 3 \Leftrightarrow 6x - x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (tmdk)}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

b) ĐKXD: $x, y \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} 4x^2y = y^2 + 3 \text{ (1)} \\ 4y^2x = x^2 + 3 \text{ (2)} \end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau ta có:

$$\begin{aligned} 4x^2y - 4y^2x &= y^2 - x^2 \Leftrightarrow 4xy(x - y) + (x - y)(x + y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4xy) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 4xy = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

TH1: $x = y$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$4x^3 = x^2 + 3 \Leftrightarrow 4x^3 - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 3x + 3) = 0$$

Vì $4x^2 + 3x + 3 = \left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16} > 0$ nên ta có $x = 1$.

Hệ có nghiệm $(x, y) = (1, 1)$.

TH2: $x + y + 4xy = 0 \Rightarrow 4xy = -x - y$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$x(-x - y) = y^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (1, 1)$.

□

Câu 2.

a) Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $2017 - p^2$ chia hết cho 24.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.

c) Cho a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh $a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải.

a) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số nguyên tố lẻ. Đặt $p = 2k + 1$.

Ta có $2017 - p^2 = 2017 - (2k + 1)^2 = 2016 - 4k(k + 1)$.

Một trong hai số $k, k + 1$ là số chẵn nên $4k(k + 1) : 8$. Do đó $(2017 - p^2) : 8$ (1).

Ta có $2017 - p^2 = (44^2 - p^2) + 81 = (44 - p)(44 + p) + 81$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3.

- Nếu p chia 3 dư 1 thì $44 + p$ chia hết cho 3.

- Nếu p chia 3 dư 2 thì $44 - p$ chia hết cho 3.

Vậy $(44 - p)(44 + p) : 3$. Do đó $(2017 - p^2) : 3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(2017 - p^2) : 24$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 - 9xy &= 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + 27 - 9xy = 27 \\&\Leftrightarrow (x + y + 3)(x^2 + y^2 + 9 - 3x - 3y - xy) = 27 \\&\Leftrightarrow (x + y + 3)[(x + y)^2 - 3(x + y) - 3xy + 9] = 27 \quad (*)\end{aligned}$$

Vì vậy $x + y + 3 \mid 27$. Mà $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x + y + 3 \geq 5$.

$$\text{Vì vậy ta có } \begin{cases} x + y + 3 = 9 \\ x + y + 3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 24 \end{cases}$$

TH1: Nếu $x + y = 6$ thay vào (*) suy ra $xy = 8$.

$$\text{Do đó } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x, y) = (2, 4) \\ (x, y) = (4, 2) \end{cases}$$

TH2: Nếu $x + y = 24$ thay vào (*) ta có $xy = \frac{512}{3}$ (loại).

c) TH1: Nếu $\sqrt{ab + c^2} \notin \mathbb{Q}$ thì $(a + b + 2\sqrt{ab + c^2}) \notin \mathbb{Q}$.

TH2: Nếu $\sqrt{ab + c^2} \in \mathbb{Q}$ thì $\sqrt{ab + c^2} \in \mathbb{N}$.

Đặt $a + b + 2\sqrt{ab + c^2} = x$ ($x \in \mathbb{N}^*$).

Từ đây ta có

$$\begin{aligned}(a + b - x)^2 &= 4(c^2 + ab) \Leftrightarrow (a + b)^2 + x^2 - 2x(a + b) = 4c^2 + 4ab \\&\Leftrightarrow (a - b)^2 - 4c^2 + x(x - 2a - 2b) = 0 \\&\Leftrightarrow (a - b - 2c)(a - b + 2c) = x(x - 2a - 2b)\end{aligned}$$

Ta có $x = a + b + 2\sqrt{ab + c^2} \geq a + b + 2c$ nên $x \geq a - b + 2c \geq a - b - 2c$.

Mặt khác $x \mid (a - b - 2c)(a - b + 2c)$ nên x không là số nguyên tố.

□

Câu 3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{x}{3 - yz} + \frac{y}{3 - xz} + \frac{z}{3 - xy} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

- Trước tiên, ta chứng minh: Với $a, b, c > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned}a + b + c &\geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\end{aligned}$$

Nhân hai bất đẳng thức ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

- Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2} \Rightarrow \frac{x}{3 - yz} \leq \frac{x}{3 - \frac{y^2 + z^2}{2}}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{3 - yz} + \frac{y}{3 - xz} + \frac{z}{3 - xy} \leq \frac{x}{3 - \frac{y^2 + z^2}{2}} + \frac{y}{3 - \frac{x^2 + z^2}{2}} + \frac{z}{3 - \frac{y^2 + x^2}{2}} \\ &= \frac{x}{3 - \frac{3 - x^2}{2}} + \frac{y}{3 - \frac{3 - y^2}{2}} + \frac{z}{3 - \frac{3 - z^2}{2}} \\ &= \frac{2x}{x^2 + 3} + \frac{2y}{y^2 + 3} + \frac{2z}{z^2 + 3} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $2x \leq x^2 + 1, 2y \leq y^2 + 1, 2z \leq z^2 + 1$.

Từ đó suy ra

$$P \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3} + \frac{y^2 + 1}{y^2 + 3} + \frac{z^2 + 1}{z^2 + 3} = 3 - \left(\frac{2}{x^2 + 3} + \frac{2}{y^2 + 3} + \frac{2}{z^2 + 3} \right)$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ ta có

$$\frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 3} \geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2 + 9} = \frac{3}{4}$$

Do đó $P \leq 3 - 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

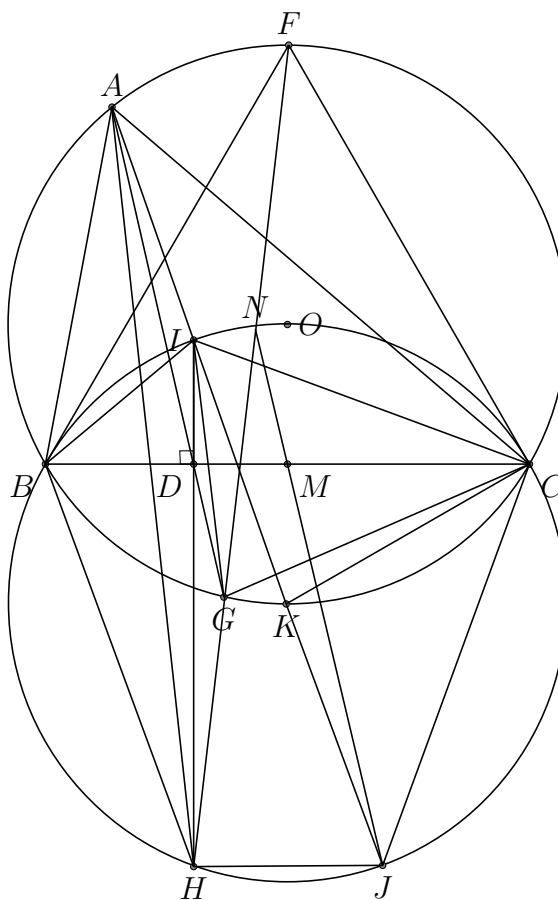
□

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . D là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng BC và G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn (O) . Gọi F điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O) . Đường thẳng FG cắt đường thẳng ID tại điểm H .

- Chứng minh tứ giác $IBHC$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi J là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC . Chứng minh $BH = CJ$.
- Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng FH với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC . Chứng minh đường thẳng NJ đi qua trung điểm của cạnh BC .

Lời giải.



- c. Gọi M là giao điểm của NJ và BC .

Ta có FK là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{FBK} = \widehat{FCK} = 90^\circ$.

Mà KB, KC là bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BIC$ nên FB, FC là các tiếp tuyến.

Lại có FNH là cát tuyến nên $\triangle FBN \sim \triangle FHB \Rightarrow \frac{FN}{FB} = \frac{BN}{BH} = \frac{FB}{FH}$.

Do đó $\frac{FN}{FH} = \frac{FN \cdot FB}{FB \cdot FH} = \left(\frac{BN}{BH}\right)^2$. Tương tự $\frac{FN}{FH} = \left(\frac{CN}{CH}\right)^2$.

Suy ra $\frac{CN}{CH} = \frac{BN}{BH} \Rightarrow \frac{CN}{BJ} = \frac{BN}{CJ}$ (3) (do $BCJH$ là hình thang cân).

Mặt khác $\triangle MCN \sim \triangle MBJ$ (g.g) nên ta có $\frac{CM}{MJ} = \frac{CN}{BJ}$ (4).

$\triangle MBN \sim \triangle MCJ$ (g.g) nên ta có $\frac{BN}{CJ} = \frac{MB}{MJ}$ (5).

Từ (3), (4), (5) ta có $\frac{MC}{MJ} = \frac{MB}{MJ} \Rightarrow M$ là trung điểm BC .

□

Câu 5. Xét tập hợp S gồm các số nguyên dương có tính chất: với hai phần tử phân biệt bất kì x, y thuộc S , ta luôn có $30|x - y| \geq xy$. Hỏi tập S có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải.

Ta có nhận xét A chỉ chứa nhiều nhất một phần tử lớn hơn hoặc bằng 30.

Giả sử $x, y \in A$ sao cho $x > y > 30$. Theo đề bài ta có $x - y = |x - y| \geq \frac{xy}{30} \geq x$ (vô lý).

Giả sử A có n phần tử $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Với $x_i > x_j$, theo giả thiết ta có $x_i - x_j \geq \frac{x_i x_j}{30} \Rightarrow x_i \geq \frac{30x_j}{30 - x_j}$.

Suy ra $x_i \geq -30 + \frac{900}{30 - x_j} \quad \forall i > j$.

Áp dụng BĐT trên ta có: $x_2 \geq -30 + \frac{900}{30 - 1} \geq 2$.

Tiếp tục áp dụng BDT trên ta có:

$$x_3 \geq 3, x_4 \geq 4, x_5 \geq 5, x_6 \geq 6, x_7 \geq 8, x_8 \geq 11, x_9 \geq 18, x_{10} \geq 45$$

Vì vậy S có nhiều nhất 10 phần tử. Ví dụ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 18, 45\}$.

□

————— HẾT —————

69 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HÀ TĨNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Lời giải.

Từ giả thiết có

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$$

Lại có

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

Nên

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0 - 3(-c)(-a)(-b) = 3abc.$$

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $4x^2 = (3x - 2)(\sqrt{2x + 1} - 1)^2$.
 b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = xy + x + y \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x - 1} = 4x - 4y. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} 4x^2 &= (3x - 2)(\sqrt{2x + 1} - 1)^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x + 1} - 1)^2 (\sqrt{2x + 1} + 1)^2 &= (3x - 2)(\sqrt{2x + 1} - 1)^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x + 1} - 1)^2 \left[(\sqrt{2x + 1} + 1)^2 - 3x + 2 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x + 1} = 1 \\ 2\sqrt{2x + 1} = x - 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Giải từng phương trình và kết hợp điều kiện ta được nghiệm là $x = 0; x = 8 + 2\sqrt{13}$.

- b) Điều kiện $x \geq 1; y \geq 0$.

Phương trình thứ nhất trong hệ tương đương với

$$x^2 - xy - 2y^2 - (x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

◇ Trường hợp 1: $x = -y$

Từ điều kiện của bài toán $x \geq 1 \Rightarrow -y \geq 1 \Leftrightarrow y \leq -1$. Mặt khác $y \geq 0$. Do đó hệ vô nghiệm.

◇ Trường hợp 2: $x = 2y + 1$, thay vào phương trình thứ 2 trong hệ ta được

$$\begin{aligned} (2y + 1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} &= 4(2y + 1) - 4y \\ \Leftrightarrow (y + 1)\sqrt{2y} &= 4(y + 1) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2y} &= 4 \text{ (do } y + 1 > 0) \Leftrightarrow y = 8 \end{aligned}$$

Khi đó hệ có nghiệm $(x; y) = (17; 8)$.

□

Câu 3.

- a) Cho phương trình $(x - a)^2 [a(x - a)^2 - a - 1] + 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình có số nghiệm dương nhiều hơn số nghiệm âm.
- b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{1+a} + \frac{2017}{2017+b} + \frac{2018}{2018+c} \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc$.

Lời giải.

- a) Phương trình đã cho tương đương với

$$[(x - a)^2 - 1] [a(x - a)^2 - 1] = 0 \begin{cases} (x - a)^2 = 1 & (1) \\ a(x - a)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

◇ Nếu $a \leq 0$ thì (2) vô nghiệm nên phương trình có nghiệm là $x = a - 1 < 0$ hoặc $x = a + 1$. Suy ra số nghiệm âm không ít hơn số nghiệm dương.

◇ Nếu $a > 0$ thì tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ a + 1, a - 1, a + \frac{1}{\sqrt{a}}, a - \frac{1}{\sqrt{a}} \right\}$ trong đó đã có 2 nghiệm dương là $x = a + 1$ và $x = a + \frac{1}{\sqrt{a}}$. Vì vậy để số nghiệm dương nhiều hơn số nghiệm âm thì

$$\begin{cases} a - 1 \geq 0 \\ a - \frac{1}{\sqrt{a}} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1$$

- b) Từ giả thiết suy ra

$$1 - \frac{2018}{2018+c} \geq \frac{1}{a+1} + \frac{2017}{2017+b}$$

hay

$$\frac{c}{2018+c} \geq \frac{1}{a+1} + \frac{2017}{2017+b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a+1} \cdot \frac{2017}{2017+b}}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{a}{a+1} \geq 2\sqrt{\frac{2017}{b+2017} \cdot \frac{2018}{c+2018}}$$

$$\frac{b}{2017+b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{1+a} \cdot \frac{2018}{c+2018}}$$

Nhân vế với vế của ba bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$P = abc \geq 8.2017.2018$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 4034; c = 4036$.

□

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , M là một điểm bất kì thuộc cạnh AB (M khác A, B). Gọi E là giao điểm của tia CM và tia DA . Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho $BF = DE$. Gọi N là trung điểm của đoạn EF .

- a) Chứng minh hai tam giác EAC và NBC đồng dạng.
- b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho diện tích tứ giác $ACFE$ gấp sáu lần diện tích hình vuông $ABCD$.

Lời giải.

a)

Để thấy $\triangle EDC = \triangle FBC$. Suy ra $FC = CE$ và

$$\widehat{FCB} = \widehat{ECD} \Rightarrow \widehat{FCE} = \widehat{BCD} = 90^\circ$$

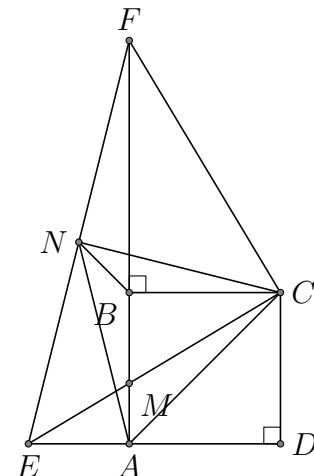
Do đó tam giác CEF vuông cân tại C .

Lại có N là trung điểm của EF nên

$$\widehat{ECN} = 45^\circ = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{ECA} \quad (1)$$

Mặt khác, tứ giác $NFCB$ nội tiếp nên $\widehat{CEA} = \widehat{CFB} = \widehat{CNB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác EAC và NBC đồng dạng.



b) Đặt $AE = x, (x > 0)$. Ta có $EC^2 = ED^2 + CD^2 = (x + a)^2 + a^2$. Do đó

$$S_{ECF} = \frac{1}{2}EC^2 = \frac{(a + x)^2 + a^2}{2}.$$

Mặt khác $S_{EAC} = \frac{1}{2}CD.AE = \frac{ax}{2}$ nên

$$S_{ACFE} = S_{ECF} + S_{CEA} = \frac{(a + x)^2 + a^2 + ax}{2}.$$

Từ giả thiết suy ra

$$S_{ACFE} = 6S_{ABCD} \Leftrightarrow (a + x)^2 + a^2 + ax = 12a^2 \Leftrightarrow 3ax + x^2 = 10a^2 \Leftrightarrow x = 2a.$$

Theo định lí Thalet ta có $\frac{AM}{DC} = \frac{EA}{ED}$ nên $AM = \frac{ax}{a + x} = \frac{2a}{3}$.

□

Câu 5. Trên một đường tròn cho 16 điểm phân biệt, dùng ba màu xanh, đỏ, vàng để tô các điểm ấy (mỗi điểm chỉ tô một màu). Mỗi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trong 16 điểm trên được tô màu nâu hoặc màu tím. Chứng minh rằng mỗi cách tô màu luôn tồn tại ít nhất một tam giác có các đỉnh cùng màu và các cạnh cũng cùng màu.

Lời giải.

Theo nguyên tắc Dirichlet ta có ít nhất 6 điểm cùng màu. Gọi các điểm đó là A, B, C, D, E, F và giả sử chúng cùng được tô màu đỏ. Xét 5 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF , theo nguyên tắc Dirichlet ta có ít nhất 3 đoạn thẳng cùng màu, giả sử đó là AB, AC, AD và cùng có màu nâu. Xét tam giác BCD

- Nếu BC, CD, BD cùng có màu tím thì tam giác BCD thỏa mãn yêu cầu.
- Nếu BC, CD, BD không cùng có màu tím thì có ít nhất một đoạn màu nâu, giả sử là BC . Suy ra tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu.

□

———— HẾT ————

70 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HOÀNG LÊ KHA, TÂY NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Giải phương trình $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = 25 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ hoặc $x = \frac{1}{3}$ □

Câu 2. Rút gọn biểu thức $K = (2 - \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}} + (2 + \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} K &= (2 - \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}} + (2 + \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} \\ &= (\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) \end{aligned}$$

$$\text{Bình phương hai vế ta được } K^2 = 6 \Rightarrow K = \sqrt{6}$$

□

Câu 3. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $T = x_1^2 + x_2^2 - (m - 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 3m$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T &= x_1^2 + x_2^2 - (m - 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 3m \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - (m - 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 3m \\ &= 4(m - 1)^2 - 2(m^2 - 3m) - 2(m - 1)(m - 1) + m^2 - 3m \\ &= m^2 + m + 2 \\ &= \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi } m = -\frac{1}{2}$$

Vậy khi $m = -\frac{1}{2}$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\sin \widehat{ACB} = \frac{3}{5}$. Tính $\tan \widehat{ABC}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \widehat{ACB} = \cos \widehat{ABC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{4}{5}$ (góc trong tam giác vuông là góc nhọn)

$$\text{Vậy } \tan \widehat{ABC} = \frac{4}{3}$$

□

Câu 5. Chứng minh $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ luôn chia hết cho 24, với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Ta có $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120 = (n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)$ là tích 4 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3; 8 mà $3; 8 \geq 1$ nên chia hết cho 24 (đpcm) □

Câu 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + y^3 + 3 = 0 \\ x^2y^3 + y = 2x \end{cases}.$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + y^3 + 3 = 0 & (1) \\ x^2y^3 + y = 2x & (2) \end{cases}.$$

Nhân hai vế của phương trình (2) rồi cộng vế theo vế vào phương trình (1) ta được phương trình

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x^2y^3 + 2y + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2(1 + y)(y^2 - y + 1) + (y + 1)(y^2 - y + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (y + 1)[2x^2(y^2 - y + 1) + (y^2 - y + 3)] &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -1 \end{aligned}$$

Thay $y = -1$ vào (2) ta được

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

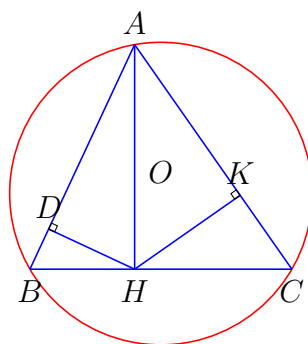
Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(-1; -1)$ □

Câu 7. Cho A là điểm cố định trên đường tròn (O) , bán kính R . Hai dây cung thay đổi AB, AC của đường tròn (O) , thỏa; $AB.AC = 2\sqrt{2}R^2$ (B khác C), kẻ AH vuông góc BC (H thuộc BC).

a) Chứng minh $AH = R\sqrt{2}$.

b) Gọi D và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC . Chứng minh diện tích tam giác ABC bằng hai lần diện tích tam giác ADK .

Lời giải.



a) Ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$

Theo giả thiết $AB.AC = 2\sqrt{2}R^2$ suy ra $\sin B \cdot \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} \cdot \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = R\sqrt{2} \text{ (đpcm)}$$

b) Ta có $AD \cdot AB = AH^2 = AK \cdot AC$ Suy ra $\triangle ADK \sim \triangle ACB$ với tỉ số $k^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AK}{AB}$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{AD}{AC} \frac{AK}{AB} = \frac{S_{ADK}}{S_{ABC}}$$

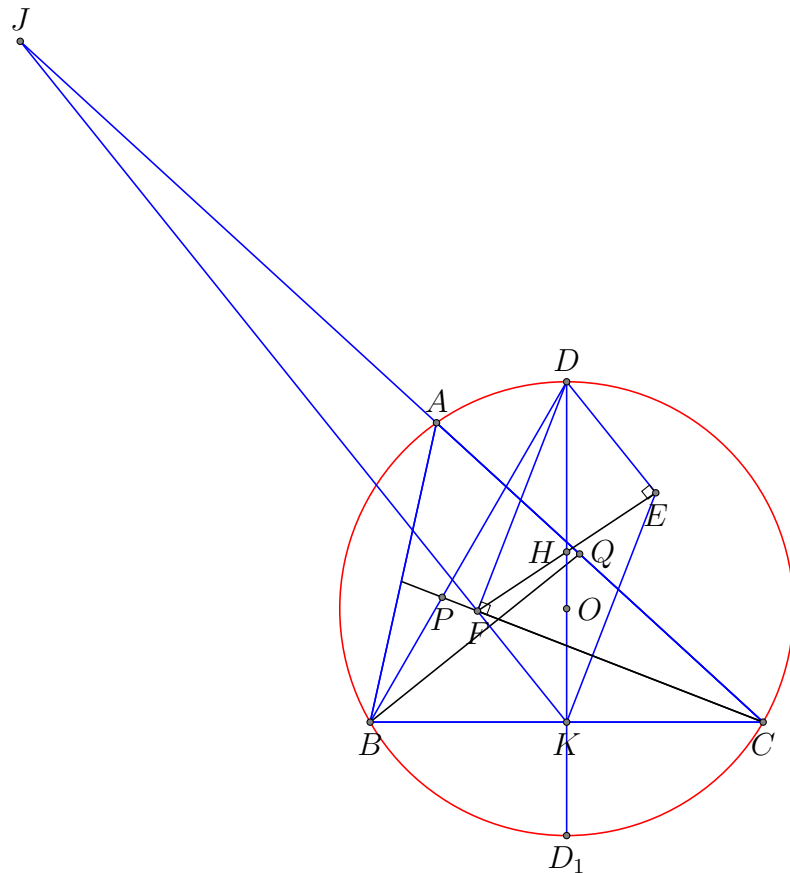
$$\text{Mặt khác } AD \cdot AB \cdot AK \cdot AC = AH^2 \Rightarrow \frac{AD \cdot AK}{AC \cdot AB} = \frac{AH^4}{(AC \cdot AB)^2} = \frac{4R^2}{8R^2} = \frac{1}{2} = \frac{S_{ADK}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 2S_{ADK} \text{ (đpcm)}$$

□

Câu 8. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi D là điểm chính giữa cung lớn BC . Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến đường phân giác trong góc B và đường phân giác trong góc C của tam giác ABC . Chứng minh trung điểm H của EF cách đều B và C .

Lời giải.



Gọi P là giao điểm BD và phân giác trong góc C . Q là giao điểm của AC và phân giác trong của góc B , K là trung điểm BC , J là giao điểm của FK và AC , D_1 là điểm đối xứng với D qua O .

$$\text{Ta có } \widehat{BDD_1} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}.$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 90^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{BDQ} + \widehat{BDD_1} + \widehat{FDK} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{BDQ} + \frac{1}{2} \widehat{BAC} + \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{DBQ} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$$

$$\text{Mà } DFKB \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{DKF} = \widehat{DBQ} = \frac{1}{2} \widehat{BCA}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{DKF} + \widehat{JKC} = \widehat{KJC} + \widehat{JCP} (= 90^\circ)$$

Suy ra $\widehat{JKC} = \widehat{KJC}$

Suy ra tam giác JKC cân tại C có CP là phân giác cũng là đường cao

Vì CP vuông góc với FK , CP vuông góc DE

$\Rightarrow DE \parallel EK$

Chứng minh tương tự ta được $DF \parallel EK$

Từ đó suy ra $DFKE$ là hình bình hành

Mà H là trung điểm EF

$\Rightarrow H$ là trung điểm DK

$\Rightarrow D, H, K$ thẳng hàng

Lại có DK là đường trung trực đoạn BC

Nên H cũng nằm trên trung trực đó

Vậy H cách đều B và C .

□

Câu 9. Cho x, y là các số thực dương bé hơn 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$$

.

Lời giải.

Xét $x + y \geq 1 \Rightarrow Q \leq 0$

Xét $x + y < 1$, đặt $z = 1 - x - y \Rightarrow z > 0$

Khi đó $Q = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} \leq \frac{1}{8}$ (Theo AM-GM)

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{1}{3}$

□

———— **HẾT** ————

71 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ, HÒA BÌNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Rút gọn các biểu thức sau

(a) $\sqrt{5} - \sqrt{125} + 3\sqrt{45}$.

(b) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức sau $C = (x - 1)\sqrt{\frac{2x}{x^2 - 2x + 1}}$.

Lời giải.

a) Rút gọn các biểu thức sau

(a) $\sqrt{5} - \sqrt{125} + 3\sqrt{45} = \sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 9\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

(b) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 2) = 4$.

b) Điều kiện xác định là $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Với điều kiện trên, ta có:

$$\begin{aligned} C &= (x - 1)\sqrt{\frac{2x}{x^2 - 2x + 1}} \\ &= (x - 1)\frac{\sqrt{2x}}{|x - 1|} \\ &= \begin{cases} \sqrt{2x} & \text{với } x > 1 \\ -\sqrt{2x} & \text{với } 0 \leq x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Câu 2.

a) Trong hệ trục tọa độ Oxy hãy vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 2$.

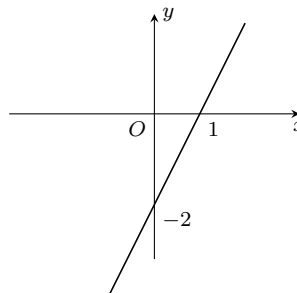
b) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $BC = 5\text{cm}$; $AH = \frac{12}{5}\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB và AC .

c) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \sqrt{x + y - 5} = 20 - y^2 \\ xy = 5 + x^2 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta có đường thẳng $(d) : y = 2x - 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0, -2)$ và $(1, 0)$.

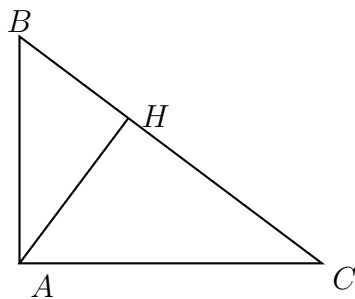
Đồ thị



b) Giả sử $AC > AB$, ta có

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \text{ và } AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Suy ra $AB = 3\text{cm}$ và $AC = 4\text{cm}$.



c) Điều kiện: $x + y \geq 5$ (*), ta có
$$\begin{cases} \sqrt{x + y - 5} = 20 - y^2 & (1) \\ xy = 5 + x^2 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) tương đương với $4x^2 - 4xy + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 - (y^2 - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 = y^2 - 20$$

Phương trình (1) tương đương với $\sqrt{x + y - 5} + y^2 - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + y - 5} + (2x - y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 = y^2 - 20$$

Do đó

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

suy ra $x = \frac{10}{3}$ và $y = \frac{5}{3}$ (không thỏa mãn điều kiện (*)). Vậy hệ phương trình vô nghiệm. $\square$

Câu 3. Hai vật chuyển động với vận tốc không đổi trên một đường tròn bán kính 20m, xuất phát cùng một lúc từ cùng một điểm. Nếu chúng chuyển động cùng chiều thì cứ sau 20 giây lại gặp nhau, nếu chúng chuyển động ngược chiều thì cứ sau 4 giây lại gặp nhau. Hãy tính vận tốc của mỗi vật?

Lời giải.

Gọi vận tốc của mỗi vật tương ứng là x, y m/s (giả sử $x > y > 0$)

Nếu chuyển động cùng chiều, tại thời điểm gặp nhau thì vật đi với vận tốc x đi hơn vật đi với vận tốc y đúng một vòng, ta có phương trình $20(x - y) = 40\pi$.

Nếu chuyển động ngược chiều, tại thời điểm gặp nhau tổng quãng đường hai vật đi được là đúng 1 vòng, ta có phương trình $4(x + y) = 40\pi$.

Ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} 20(x - y) = 40\pi \\ 4(x + y) = 40\pi \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 6\pi; y = 4\pi$. $\square$

Câu 4. Cho đường tròn tâm O đường kính MN và dây cung PQ vuông góc với MN tại I (I khác M , I khác N). Trên cung nhỏ NP lấy điểm J (J khác N , J khác P), nối M với J cắt PQ tại H . Gọi giao điểm của PN với MJ là G , giao điểm của JQ với MN là K . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $GKNJ$ là tứ giác nội tiếp.
- KG song song với PQ .
- Điểm G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PKJ .

Lời giải.

72 ĐỀ THI VÀO LỚP 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG-GIA LAI

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2x - 18}{\sqrt{x + 6\sqrt{x - 9}} + \sqrt{x - 6\sqrt{x - 9}}}$ (với $x \geq 18$).
- b) Tìm tất cả các số nguyên n để biểu thức $B = \frac{n - 1}{2n + 2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

- a) Đặt $t = \sqrt{x - 9}$. Do $x \geq 18$ nên $t \geq \sqrt{18 - 9} = 3$. Ta có $x = t^2 + 9$. Như vậy:

$$A = \frac{2(t^2 + 9) - 18}{\sqrt{t^2 + 6t + 9} + \sqrt{t^2 - 6t + 9}} = \frac{2t^2}{\sqrt{(t + 3)^2} + \sqrt{(t - 3)^2}}$$

$$= \frac{2t^2}{|t + 3| + |t - 3|} = \frac{2t^2}{t + 3 + t - 3} = \frac{2t^2}{2t} = t = \sqrt{x - 9}.$$

- b) Ta có $2B = \frac{2n - 2}{2n + 2} = \frac{n - 1}{n + 1} = 1 - \frac{2}{n + 1}$.

Vì B nguyên nên $2B$ nguyên. Mà $n \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $n + 1 \in \{1; 2; -1; -2\}$.

Do đó $n \in \{0; 1; -2; -3\}$. Thử lại, ta nhận các giá trị nguyên của n là $n = 1, n = -3$.

□

Câu 2.

- a) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 24n - 15$ là một số chính phương.
- b) Cho hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và $cx^2 + bx + a = 0$, với $a, c < 0$. Gọi α và β lần lượt là hai nghiệm lớn của hai phương trình. Chứng minh $\alpha + \beta \geq 2$.

Lời giải.

- a) Giả sử $n^2 - 24n - 15$ là một số chính phương. Khi đó tồn tại số tự nhiên k sao cho

$$n^2 - 24n - 15 = k^2 \Leftrightarrow (n + k - 12)(n - k - 12) = 159.$$

Do $159 = 3 \cdot 53$ và $n + k - 12 > n - k - 12$ nên ta xét các trường hợp sau

$n + k - 12$	53	-3	159	-1
$n - k - 12$	3	-53	1	-159
n	40	-16	92	-168
k	25	25	79	79

Vậy có hai số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu là $n = 92, n = 40$.

- b) Vì $a, c < 0$ nên hai phương trình đã cho đều có hai nghiệm trái dấu. Vì α và β là các nghiệm lớn nên α và β là hai số dương. Ta có

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Leftrightarrow c \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + b \left(\frac{1}{\alpha}\right) + a = 0.$$

Vì α là số dương nên $\frac{1}{\alpha}$ cũng là số dương, do đó $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Như vậy $\alpha + \beta = \alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$. Dấu bằng xảy ra khi $\alpha = \beta = 1$.

□

Câu 3.

- a) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m+4)x + 3(m+1) = 0$ có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông, biết độ dài cạnh còn lại là 5.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2(x-y) \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta = (m-2)^2 \geq 0, \forall m$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 3, x = m+1$. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $m+1$ và 3 là độ dài hai cạnh góc vuông. Khi đó

$$\begin{cases} (m+1)^2 + 9 = 25 \\ 0 < m+1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Trường hợp 2: 5 và 3 là độ dài hai cạnh góc vuông. Khi đó

$$\begin{cases} (m+1)^2 = 25 + 9 \\ m+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = \sqrt{34} - 1.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = 3, m = \sqrt{34} - 1$.

- b) Điều kiện $x \geq 1, y \geq 0$. Ta có:

$$xy + x + y = x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1) = 0. \quad (1)$$

Do điều kiện $x \geq 1, y \geq 0$ nên $x+y > 0$, vì vậy (1) $\Leftrightarrow x = 2y+1$. Do đó

$$x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2(x-y) \Leftrightarrow (y+1)(\sqrt{2y}-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1, y \geq 0$, ta được nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (5; 2)$. □

Câu 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và một điểm M di động trên nửa đường tròn (M không trùng với A và B). Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) tại M , tiếp xúc với AB tại N , cắt AM tại C , cắt BM tại D .

- a) Chứng minh $CD \parallel AB$.
- b) Gọi E là giao điểm thứ hai của (O) với đường thẳng MN . Chứng minh $EM \cdot EN = 2R^2$.
- c) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của CN với BE , DN với AE . Tìm vị trí của M để diện tích tam giác NPQ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) \\&= 27 - 9(ab + bc + ca) + 3abc.\end{aligned}$$

Vì $0 \leq a, b, c \leq 2$ nên $(2 - a)(2 - b)(2 - c) \geq 0$. Suy ra

$$-9(ab + bc + ca) \leq \frac{-9}{2}abc - 18.$$

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 \leq 27 - \frac{9}{2}abc - 18 + 3abc = 9 - \frac{3}{2}abc$.

Vì $0 \leq a, b, c \leq 2$ do đó $abc \geq 0$, vậy $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$. Dấu " $=$ " xảy ra khi $a = 2, b = 1, c = 0$ và các hoán vị. □

———— HẾT ————

73 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, PHÚ THỌ, VÒNG 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

- a) Cho các số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = (a + b - 1)(b + c - 1)(c + a - 1).$$

- b) Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt $x^2 + 3mx + 2m^2 = \frac{x^4 + x^3}{2}$

Lời giải.

- a) Ta có $a^2 + b = b^2 + c \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = c - b \Leftrightarrow a + b = \frac{c - b}{a - b}$.

$$\text{Suy ra } a + b - 1 = \frac{c - a}{a - b}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } b + c - 1 = \frac{a - b}{b - c} \text{ và } c + a - 1 = \frac{b - c}{c - a}.$$

Thay vào biểu thức T thu được $T = 1$.

- b) Phương trình tương đương với

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 6mx - 4m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2m)(x^2 - x - 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 2m = 0(1) \\ x^2 - x - 2m = 0(2) \end{cases}.$$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt và không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} \Delta'_1 = 1 - 2m > 0 \\ \Delta'_2 = 1 + 8m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < m < \frac{1}{2}.$

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình (1). Để x_0 không là nghiệm của phương trình (2) thì

$$x_0^2 - x_0 - 2m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 + 2x_0 + 2m) - 3x_0 - 4m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 \neq -\frac{4m}{3}.$$

Thay $x_0 = -\frac{4m}{3}$ vào phương trình (1) thì $26m^2 - 6m \neq 0$ suy ra $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{3}{8} \end{cases}.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} -\frac{1}{8} < m < \frac{1}{2} \\ m \neq 0; m \neq \frac{3}{8} \end{cases}$

□

Câu 2.

- a) Tìm các số nguyên m sao cho $m^2 + 12$ là số chính phương.
 b) Chứng minh rằng trong 11 số nguyên tố phân biệt, lớn hơn 2 bất kỳ luôn chọn được hai số gọi là a, b sao cho $a^2 - b^2$ chia hết cho 60.

Lời giải.

- a) Để
- $m^2 + 12$
- là số chính phương thì tồn tại số nguyên
- k
- sao cho

$$m^2 + 12 = k^2$$

$$\Leftrightarrow (k - m)(k + m) = 12.$$

Suy ra $k - m$ và $k + m$ là ước của 12. Mà $k - m$ và $k + m$ cùng tính chẵn, lẻ nên ta có bảng sau

$k - m$	-2	2	-6	6
$k + m$	-6	6	-2	2
m	-2	2	2	-2

Vậy $m \in \{2; -2\}$.

- b) Do chỉ có số 3 và số 5 là hai số nguyên tố lần lượt chia hết cho 3 và 5 nên trong 11 số nguyên tố lớn hơn 2 ta luôn chọn được ra hai số nguyên tố
- a, b
- không chia hết cho 3 và có cùng số dư khi chia cho 5.

Do đó, $a^2 - b^2 \vdots 5$.

Mặt khác, a, b không chia hết cho 3 nên a^2, b^2 chia 3 dư 1, do đó $a^2 - b^2 \vdots 3$.

Ta có, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \vdots 4$.

Vậy tồn tại a, b nguyên tố để $a^2 - b^2 \vdots 60$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình
- $4x^2 + 5 + \sqrt{3x + 1} = 13x$
- .

- b) Giải hệ phương trình
- $$\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 6 \\ \sqrt{2x + 5} + \sqrt{2y + 9} = 8 \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Đặt
- $2t + 3 = \sqrt{3x + 1}$
- . Ta có hệ

$$\begin{cases} 4t^2 + 12t + 9 = 3x + 1 \\ 4x^2 + 5 + 2t + 3 = 13x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 + 12t - 3x + 8 = 0(1) \\ 4x^2 - 13x + 2t + 8 = 0(2) \end{cases}$$

Trừ vế với vế của (1) và (2) ta được

$$4t^2 - 4x^2 + 10x + 10t = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + x)(4t - 4x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -x \\ t = x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

TH1. $t = -x$ suy ra

$$\begin{aligned} -2x + 3 &= \sqrt{3x + 1} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 8 &= 0 \left(x \leq \frac{3}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15 + \sqrt{97}}{8} & (\text{loại}) \\ x = \frac{15 - \sqrt{97}}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

TH2. $t = x - \frac{5}{2}$ suy ra

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= \sqrt{3x + 1} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 3 &= 0 \left(x \geq 1\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11 + \sqrt{73}}{8} \\ x = \frac{11 - \sqrt{73}}{8} & (\text{loại}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15 - \sqrt{97}}{8}; \frac{11 + \sqrt{73}}{8} \right\}.$$

b) Đặt $\sqrt{2x} = a \geq 0$; $\sqrt{2y} = b \geq 0$ ta có hệ $\begin{cases} a + b = 6(1) \\ \sqrt{a^2 + 5} + \sqrt{b^2 + 9} = 8(2) \end{cases}$.

Thay $a = 6 - b$ từ (1) vào (2) ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{(6 - b)^2 + 5} &= 8 - \sqrt{b^2 + 9} \\ \Leftrightarrow (6 - b)^2 + 5 &= 64 - 16\sqrt{b^2 + 9} + b^2 + 9 \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{b^2 + 9} &= 8 + 3b \\ \Leftrightarrow 7b^2 - 48b + 80 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ b = \frac{20}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

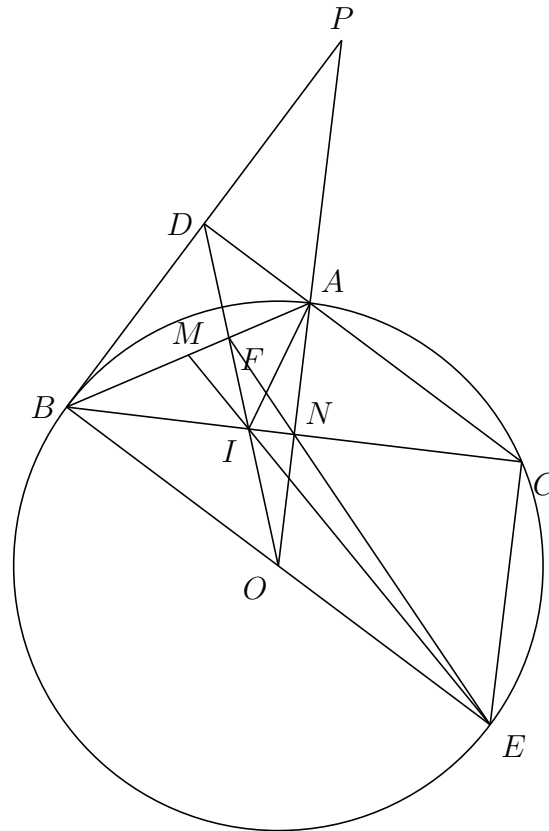
$$\text{Suy ra } \begin{cases} (a; b) = (2; 4) \\ (a; b) = \left(\frac{22}{7}; \frac{20}{7}\right) \end{cases} \cdot \text{Vậy } \begin{cases} (x; y) = (2; 8) \\ (x; y) = \left(\frac{242}{49}; \frac{200}{49}\right) \end{cases}.$$

□

Câu 4. Cho tam giác ABC cân với $\widehat{BAC} = 120^\circ$, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến của (O) tại B ; E là giao điểm của đường thẳng BO với đường tròn (O) ($E \neq B$); F, I lần lượt là giao điểm của DO với AB, BC ; M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC .

- Chứng minh tứ giác $ADBN$ nội tiếp.
- Chứng minh F, N, E thẳng hàng.
- Chứng minh rằng các đường thẳng MI, BO, FN đồng quy.

Lời giải.



- a) Tam giác ABC cân tại A , N là trung điểm của BC suy ra $OA \perp BC$ tại N .
 Ta có $\widehat{BCA} = \widehat{ABC} = 30^\circ$, $\widehat{BCE} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{CBE} = 30^\circ$. Do đó, $AC \parallel BE$ (so le trong).
 Suy ra $\widehat{ADB} = 90^\circ$.
 Tứ giác $ADBN$ có $\widehat{ADB} + \widehat{ANB} = 180^\circ$, D, N là hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $ADBN$ nội tiếp.
- b) Gọi P đối xứng với B qua D . Dễ chứng minh $BD = BN$ suy ra $BP = BC$, suy ra tam giác BPC đều. Do đó, P, A, N thẳng hàng.
 Tam giác $BPO \sim CBE$ có hai trung tuyến lần lượt là OD, EN nên $\widehat{BOD} = \widehat{NEC}$.
 Mặt khác, $\widehat{FNA} = \widehat{FDA}$ (do $\triangle DAF = \triangle NAF$), $\widehat{FAD} = \widehat{BOD}$ (so le), $\widehat{NEC} = \widehat{ONE}$ (so le) suy ra $\widehat{FNA} = \widehat{ONE}$.
 Vậy F, N, E thẳng hàng.
- c) Xét $\triangle ADB$: $\widehat{ABD} = 30^\circ$ nên dễ dàng suy ra $AD = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{BO}{2}$.
 Do $AD \parallel BO$ nên $\frac{FA}{FB} = \frac{AD}{BO} = \frac{1}{2}$.
 Áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt cho tam giác ABN và cát tuyến FIO ta có

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{IB}{IN} \cdot \frac{ON}{OA} = 1.$$

 Suy ra $\frac{IB}{IN} = 4$.
 Áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt cho tam giác ABN và cát tuyến MIG ta có

$$\frac{GA}{GN} \cdot \frac{IN}{IB} \cdot \frac{MB}{MA} = 1.$$

Suy ra $GA = 4GN$. Do đó, $\frac{GO}{GA} = \frac{1}{2}$.

Xét tam giác ABO , ta có đẳng thức

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{EB}{EO} \cdot \frac{GO}{GA} = 1.$$

Theo định lý Mê-nê-n-la-uyt đảo suy ra M, G, E thẳng hàng. Vậy MI, BO, FN đồng quy. $\square$

Câu 5. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{2}xyz.$$

Lời giải.

a) **Tìm giá trị nhỏ nhất**

Do x, y, z có vai trò như nhau nên giả sử $x = \min\{x, y, z\}$, suy ra $x \geq \frac{1}{3}$. Từ $x + y + z = 1$ suy ra $y + z = 1 - x$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{2}xyz \\ &\Leftrightarrow P = x^2 + (y + z)^2 + \left(\frac{9}{2}x - 2\right)yz \\ &\Leftrightarrow P = x^2 + (1 - x)^2 + \left(\frac{9}{2}x - 2\right)yz. \end{aligned}$$

Do $x \geq \frac{1}{3}$ suy ra $\frac{9}{2}x - 2 \geq 0$ và $yz \geq \frac{(y + z)^2}{4}$ nên $\left(\frac{9}{2}x - 2\right)yz \geq \left(\frac{9}{2}x - 2\right)\frac{(y + z)^2}{4}$.

Thay vào P ta có

$$\begin{aligned} P &\geq x^2 + (1 - x)^2 + \left(\frac{9}{2}x - 2\right)\frac{(y + z)^2}{4} \\ &\Leftrightarrow P \geq x^2 + (1 - x)^2 + \left(\frac{9}{2}x - 2\right)\frac{(1 - x)^2}{4} \\ &\Leftrightarrow P \geq \frac{1}{8}(9x^3 - 6x^2 + x + 4) \\ &\Leftrightarrow P \geq \frac{1}{8}[x(1 - 3x)^2 + 4] \\ &\Leftrightarrow P \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 0; y = z = \frac{1}{2}$ và các hoán vị.

b) **Tìm giá trị lớn nhất**

Không giảm tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$, suy ra $z \leq \frac{1}{3}$. Ta chứng minh được

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9}{2}xyz \leq (x + y)^2 + z^2 \Leftrightarrow z \leq \frac{4}{9}.$$

Điều này đúng do $z \leq \frac{1}{3}$. Mặt khác,

$$(x + y)^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2 = 1.$$

Suy ra $P \leq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1, y = z = 0$ và các hoán vị. Vậy $\max P = 1$ khi $x = 1, y = z = 0$ và các hoán vị.

□

———— HẾT ————

74 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HÙNG VƯƠNG PHÚ THỌ, VÒNG 2

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Cho các số a, b thỏa mãn $2a^2 + 11ab - 3b^2 = 0, b \neq 2a, b \neq -2a$. Tính giá trị biểu thức
- $$T = \frac{a-2b}{2a-b} + \frac{2a-3b}{2a+b}.$$
- b) Cho các số nguyên dương x, y, z và biểu thức $P = \frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz}$.
 Chứng minh rằng P là số nguyên chia hết cho 6.

Lời giải.

- a) Ta có:

$$T = \frac{a-2b}{2a-b} + \frac{2a-3b}{2a+b} = \frac{(a-2b)(2a+b) + (2a-3b)(2a-b)}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{6a^2 - 11ab + b^2}{4a^2 - b^2}.$$

Từ giả thiết suy ra $11ab = -2a^2 + 3b^2$, thay vào T ta được:

$$T = \frac{6a^2 - 11ab + b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{6a^2 + 2a^2 - 3b^2 + b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{2(4a^2 - b^2)}{4a^2 - b^2} = 2.$$

- b) Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Suy ra nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Vì $(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) + (z^2 - x^2) = 0$ nên ta có :

$$TT = (x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 = 3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)$$

$$= 3(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x).$$

$$MT = x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz$$

$$= (x^2y + y^2x) + z^2(x+y) + (2xyz + y^2z + x^2z)$$

$$= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x+y)^2 = (x+y)(xy + z^2 + zx + zy)$$

$$= (x+y)[x(y+z) + z(y+z)] = (x+y)(y+z)(z+x).$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{TT}{MT} = 3(x-y)(y-z)(z-x) \in \mathbb{Z}.$$

Trong ba số nguyên dương x, y, z luôn có hai số cùng tính chẵn lẻ, giả sử đó là $x, y \Rightarrow (x-y):2$.

Vì $P = 3(x-y)(y-z)(z-x)$ nên $P:6$.

□

Câu 2.

- a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^3 + 2x^2y + x^2 + 2xy = x + 10$.
- b) Cho 19 điểm phân biệt nằm trong một tam giác đều có cạnh bằng 3, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 19 điểm đã cho mà có diện tích không lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

- a) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2(x+y) + 2x(x+y) - (x^2 + x) = 10$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)(x^2 + x) - (x^2 + x) = 10$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)[2(x+y) - 1] = 10$$

Nhận xét: +) $10 = 1.10 = 2.5 = (-1)(-10) = (-2)(-5)$; +) $x^2 + x = x(x+1)$ là số chẵn;
 $2(x+y) - 1$ là số lẻ; +) $x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} > -1 \Rightarrow x^2 + x \geq 0$.

Từ các nhận xét trên ta thấy chỉ có các trường hợp (TH) sau:

$$\begin{cases} x^2 + x = 10 \\ 2(x+y) - 1 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 + x = 2 \\ 2(x+y) - 1 = 5 \end{cases}.$$

$$*TH1 \begin{cases} x^2 + x = 10 \\ 2(x+y) - 1 = 1 \end{cases}.$$

Phương trình $x^2 + x = 10$ không có nghiệm nguyên.

$$*TH2 \begin{cases} x^2 + x = 2 \\ 2(x+y) - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy có hai bộ số $(x; y)$ thỏa mãn là: $(1; 2), (-2; 5)$.

- b) Giả sử 19 điểm nằm trong tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Chia tam giác ABC thành 9 tam giác đều, có cạnh bằng 1 (gọi là tam giác nhỏ) như hình vẽ.

Mỗi tam giác nhỏ có diện tích là $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Vì có 19 điểm nằm trong 9 tam giác nhỏ nên có ít nhất 3 điểm cùng thuộc một hình tam giác nhỏ. Giả sử 3 điểm đó là I_1, I_2, I_3 . Khi đó tam giác $\triangle I_1 I_2 I_3$ nằm trong một tam giác nhỏ nên $S_{\triangle I_1 I_2 I_3} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$.
 b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + 6 = 0 \\ x^2 + 3x + y = 1. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x \geq 3$, ta có:

$$(1) \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3} + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = x-3 + 4\sqrt{x-3} + 4$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-3} = x$$

$$\Leftrightarrow 16(x-3) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 12 \end{cases} \text{ Cả hai nghiệm trên đều thỏa mãn điều}$$

kiện. Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x = 4; x = 12$.

- b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + 6 = 0 \\ x^2 + 3x + y = 1 \end{cases} \quad (I) \text{ Ta có } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)(2x+y) = -6 \\ (x^2+x) + (2x+y) = 1 \end{cases}$

$$\text{Đặt } u = x^2+x; v = 2x+y. \text{ Hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} uv = -6 \\ u+v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \\ u = 3 \\ v = -2 \end{cases} \text{ Với } \begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + x = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}. \text{ Hệ PT này vô nghiệm. Với } \begin{cases} u = 3 \\ v = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 3 \\ 2x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ này được 2 nghiệm: } \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \\ y = \sqrt{13} - 1 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ y = -\sqrt{13} - 1 \end{cases}.$$

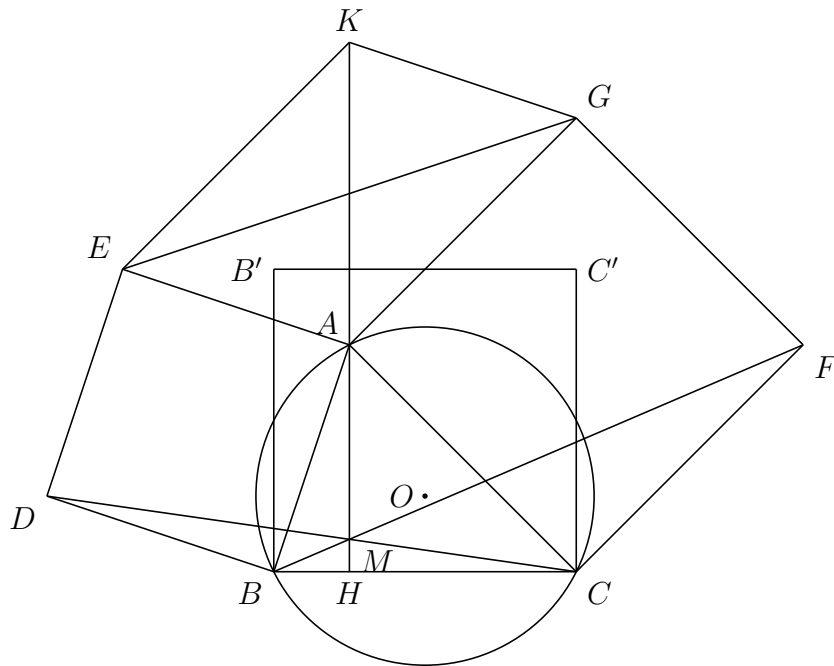
Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \sqrt{13} - 1); (\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; -\sqrt{13} - 1)$.

□

Câu 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABDE$, $ACFG$ và hình bình hành $AEKG$.

- Chứng minh rằng $AK = BC$ và $AK \perp BC$.
- DC cắt BF tại M . Chứng minh rằng A, K, M thẳng hàng.
- DC cắt BF tại M . Chứng minh rằng A, K, M thay đổi trên cung lớn BC của $(O; R)$ thì luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.



- Ta có $\widehat{KEA} + \widehat{EAG} = 180^\circ$, $\widehat{BAC} + \widehat{EAG} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KEA} = \widehat{BAC}$. Lại có: $EK = AG = AC$; $EA = AB \Rightarrow \triangle AEK = \triangle BAC \Rightarrow AK = BC$.
Ta có $\triangle AEK = \triangle BAC \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{ABC}$. Gọi H là giao điểm của KA và BC, ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = \widehat{BAH} + \widehat{EAK} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$. Vậy $AK \perp BC$.
- Vì $\widehat{KAC} = \widehat{KAG} + 90^\circ$; $\widehat{BCF} = \widehat{ACB} + 90^\circ$ mà $\widehat{KAG} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{BCF}$. Vì $KA = BC$; $AC = CF$; $\widehat{KAC} = \widehat{BCF} \Rightarrow \triangle KAC = \triangle BCF \Rightarrow \widehat{CKH} = \widehat{FBC}$. Ta lại có $\widehat{CKH} + \widehat{KCH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FBC} + \widehat{KCH} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp KC$ (1). Tương tự ta có $KB \perp CD$ (2). Từ (1)(2) suy ra M là trực tâm $\triangle KBC$, suy ra $M \in KH$.
Vậy A, K, M thẳng hàng.

- c) Dựng hình vuông $BCC'B'$ trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa cung lớn BC , suy ra $B'C'$ cố định. Ta có $AKB'B$ là hình bình hành (vì BB', KA cùng vuông góc BC suy ra $BB' \parallel KA$; $BB' = KA = BC$). Do đó $B'K \parallel BA \Rightarrow \widehat{B'KA} = \widehat{BAH}$ Tương tự ta có $AKC'C$ là hình bình hành suy ra $KC' \parallel AC \Rightarrow \widehat{AKC'} = \widehat{HAC}$ Suy ra $\widehat{B'KC'} = \widehat{B'KA} + \widehat{AKC'} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC} = \widehat{BAC}$ Vì khi A thay đổi trên cung lớn BC của đường tròn $(O; R)$ thì K luôn nhìn đoạn $B'C'$ cố định dưới một góc không đổi $\alpha = \widehat{BAC}$. Do đó K thuộc quỹ tích cung chứa góc α dựng trên đoạn $B'C'$ cố định.

□

Câu 5. Cho các số dương x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{(x+2y)^3+1}-1} + \frac{(2x+y)(x+2y)}{4} - \frac{8}{3(x+y)}$$

Lời giải.

Đặt $2x+y=a$; $2y+x=b$; $a, b > 0$ thì $P = \frac{2}{\sqrt{a^3+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{b^3+1}-1} + \frac{ab}{4} - \frac{8}{a+b}$

Ta có $\sqrt{a^3+1} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \leq \frac{a+1+a^2-a+1}{2} = \frac{a^2+2}{2} \Rightarrow \sqrt{a^3+1}-1 \leq \frac{a^2}{2}$

Tương tự $\sqrt{b^3+1} = \sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} \leq \frac{b+1+b^2-b+1}{2} = \frac{b^2+2}{2} \Rightarrow \sqrt{b^3+1}-1 \leq \frac{b^2}{2}$

Mặt khác $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow -\frac{8}{a+b} \geq -\frac{2}{a} - \frac{2}{b}$

Vậy :

$$P \geq \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{ab}{4} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} = \left(\frac{4}{a^2} + 1\right) + \left(\frac{4}{b^2} + 1\right) + \frac{ab}{4} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - 2 \geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{ab}{4} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - 2 = Q$$

$$P \geq Q = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{ab}{4} - 2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{ab}{4}} - 2 = 1$$

$$Min(P) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = a^2 - a + 1 \\ b+1 = b^2 - b + 1 \\ \frac{4}{b^2} = \frac{4}{a^2} = 1 \\ \frac{2}{a} = \frac{2}{b} = \frac{ab}{4} \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}$$

□

————— HẾT —————

75 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC HƯNG YÊN

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị x để $P = \frac{3}{4}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P$.

Lời giải.

Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$.

$$a) P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) - (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}.$$

b) Giải phương trình:

$$P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3x - 8\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(3\sqrt{x}+1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$$

c) Biểu thức $A = (\sqrt{x}-4)(x-1)P = 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) = 2(\sqrt{x}-2)^2 - 8 \geq -8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -8 , khi chỉ khi $x = 4$.

□

Câu 2. Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 3x + m - 2$. Tìm tham số m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = 3x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - m = 0$ (1).

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương (1) có hai nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Mà ta có } \Delta = 9 - 4(2 - m) = 1 + 4m \text{ và } \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 - m \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 2.$$

□

Câu 3.

$$a) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 - 2xy = 2y - x \\ x^2 + 2x = 9 - y \end{cases}.$$

$$b) \text{ Giải phương trình } \sqrt{\frac{1-2x}{x}} = \frac{3x+x^2}{x^2+1}.$$

Lời giải.

a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$x^2 + x - 2xy - 2y = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2y \end{cases}$$

Xét $x = -1$ thay vào phương trình còn lại ta thu được $y = 10$.

Xét $x = 2y$ thay vào phương trình còn lại ta thu được $4y^2 + 5y - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -\frac{9}{4} \Rightarrow x = -\frac{9}{2} \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm $(x; y)$ là $(-1; 10), (2; 1), \left(-\frac{9}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

b) Điều kiện $\frac{1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-2x}{x}} = \frac{3x+x^2}{x^2+1} &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-2x}{x}} - 1 = \frac{3x+x^2}{x^2+1} - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{1-2x}{x} - 1}{\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1} = \frac{3x-1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} = \frac{3x-1}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow (1-3x) \left(\frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} + \frac{1}{1+x^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Vì } \frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{1-2x}{x}} + 1\right)} + \frac{1}{1+x^2} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , kẻ đường kính AN . Lấy điểm M trên cung nhỏ BN (M khác B, N). Kẻ MD vuông góc với đường thẳng BC tại D . ME vuông góc với đường thẳng AC tại E , MF vuông góc với AB tại F .

a) Chứng minh ba điểm F, D, E thẳng hàng.

b) Chứng minh $\frac{AB}{MF} + \frac{AC}{ME} = \frac{BC}{MD}$.

c) Chứng minh $\frac{FB}{FA} + \frac{EA}{EC} + \frac{DC}{DB} \geq 3$.

Lời giải.

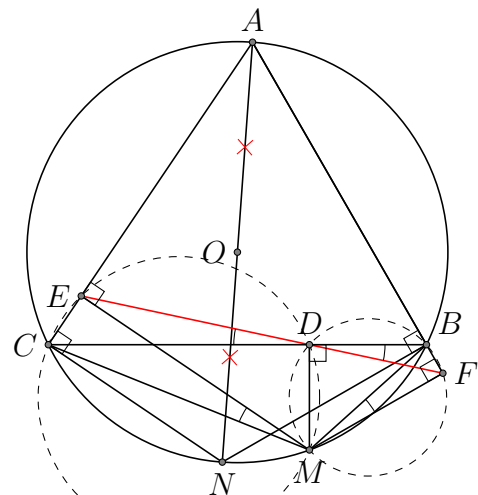
a) Ta có $MFBD, MDEC, MBAC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{BMF} = 90^\circ - \widehat{FBM}$ và $\widehat{EDC} = \widehat{EMC} = 90^\circ - \widehat{CEM}$.

Hơn nữa $\widehat{FBM} = \widehat{CEM}$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

Do đó $\widehat{BDF} = \widehat{EDC}$, hai góc ở vị trí đối đỉnh.

Vậy D, E, F thẳng hàng.

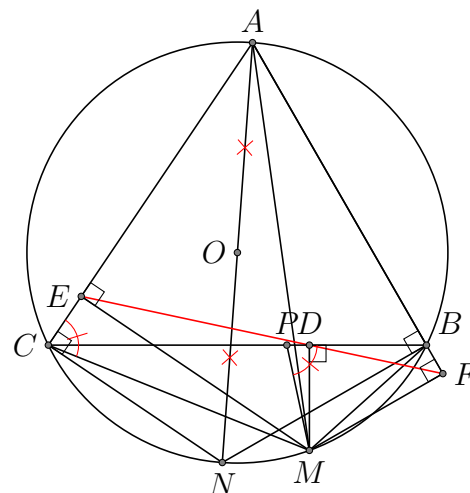


b) Gọi $P \in BC$ sao cho $\widehat{BPM} = \widehat{ACM}$.
 Suy ra $\triangle BPM \sim \triangle ACM$, từ đó có $\frac{BP}{BM} = \frac{AC}{AM}$.
 Hơn nữa $\triangle AME \sim \triangle BMD$ suy ra $\frac{AM}{ME} = \frac{BM}{DM}$.
 Vậy $\frac{AC}{ME} = \frac{BP}{DM}$.

Tương tự từ $\begin{cases} \triangle CPM \sim \triangle ABM \\ \triangle AMF \sim \triangle CMD \end{cases}$ suy ra $\frac{AB}{MF} = \frac{CP}{MD}$.

Cộng theo về hai đẳng thức trên ta có đpcm.

c) Từ câu a) áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với cát tuyến là D, E, F thu được $\frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} = 1$.
 Áp dụng BĐT $AM - GM$ ta có: $\frac{FB}{FA} + \frac{EA}{EC} + \frac{DC}{DB} \geq 3$.



□

Câu 5. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $y^3 - 2x - 2 = x(x + 1)^2$.

Lời giải.

Ta có $y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$. Rõ ràng $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8} > 0$. Do đó $y^3 > x^3$.

Mặt khác, xét $|x| > 1$.

Khi đó $y^3 = (x + 1)^3 + 1 - x^2 \leq (x + 1)^3$, mâu thuẫn vì $x^3 < y^3 < (x + 1)^3$.

Vậy $|x| \leq 1$. Khi đó $x = \pm 1$ hoặc $x = 0$.

TH1. $x = -1$. Thay vào pt được $y = 1$.

TH2. $x = 1$. Thay vào pt được $y = 2$.

TH3. $x = 0$. Thay vào pt được $y = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Z}$, loại.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(-1; 1), (1; 2)$.

□

Câu 6. Cho a, b, c dương và $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = 3a^4b^4c^4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} + \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} + \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

Lời giải.

Cách 1. Từ điều kiện đề bài ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = 3$.

Trước hết ta chứng minh BĐT sau: Với $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{1}{x + y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

BĐT trên tương đương với $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4$. BĐT này đúng theo $AM - GM$ như sau:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} > 0$$

Từ đó áp dụng vào ta có:

$$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^3b + 1} + \frac{1}{2c^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^3b} + 1 \right) + \frac{1}{2c^2} \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a^3b} + \frac{2}{c^2} + 1 \right)$$

Mà theo $AM - GM$ ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{4}{a^3b}$ và $\frac{1}{c^4} + 1 \geq \frac{2}{c^2}$.

Nên $\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4a^4} + \frac{1}{4b^4} + \frac{1}{c^4} + 2 \right)$.

Tương tự ta có $\begin{cases} \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4b^4} + \frac{1}{4c^4} + \frac{1}{a^4} + 2 \right) \\ \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4c^4} + \frac{1}{4a^4} + \frac{1}{b^4} + 2 \right) \end{cases}$.

Cộng theo vế các BĐT trên lại ta có $VT \leq \frac{1}{16} \left(2 \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \right) + 6 \right) = \frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2. Từ điều kiện ta có $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = 3$. Mặt khác: $3 = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} \Rightarrow abc \geq 1$.

Ta có $a^3b + 2c^2 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^3bc^4} \geq 4\sqrt[4]{a^2c^3} = 4\sqrt{ac}\sqrt[4]{c}$. Do đó

$\frac{1}{a^3b + 2c^2 + 1} \leq \frac{1}{4\sqrt{ac}\sqrt[4]{c}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$

Tương tự ta có $\begin{cases} \frac{1}{b^3c + 2a^2 + 1} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ba} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \\ \frac{1}{c^3a + 2b^2 + 1} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \end{cases}$.

Cộng theo vế các BĐT trên lại ta có $VT \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$.

Mà theo BDT BCS thì

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^2 \geq \frac{1}{27} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^4 \geq \frac{1}{243} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^8$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \leq 3$. Tương tự:

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)^2$$

Suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq 3$. Từ đó ta có $VT \leq \frac{3+3}{8} = \frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $a = b = c = 1$. □

————— HẾT —————

76 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN HUỖNH MÃN ĐẠT, KIÊN GIANG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức sau:

$$P = a + \sqrt{a^2 + 1} + \frac{1}{a + \sqrt{a^2 + 1}}$$

b) Chứng minh hằng đẳng thức sau:

$$(a^2x + b^2y)(c^2x + d^2y) = (acx + bdy)^2 + (ad - bc)^2xy$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= a + \sqrt{a^2 + 1} + \frac{a - \sqrt{a^2 + 1}}{(a + \sqrt{a^2 + 1})(a - \sqrt{a^2 + 1})} \\ &= a + \sqrt{a^2 + 1} + \frac{a - \sqrt{a^2 + 1}}{-1} \\ &= 2\sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} VT &= a^2c^2x^2 + b^2d^2y^2 + (a^2d^2 + b^2c^2)xy \\ &= a^2c^2x^2 + 2acx.bdy + b^2d^2y^2 + (a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2)xy \\ &= (acx + bdy)^2 + (ad - bc)^2xy \end{aligned}$$

□

Câu 2. Cho $m > 2$. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0$ có hai nghiệm dương, phân biệt x_1, x_2 và $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2m}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m(m-2) > 0$ với mọi $m > 2$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = 2(m-1)$ và $x_1x_2 = 1$.

Do $m > 2$ nên $x_1 + x_2 > 0, x_1x_2 > 0$ nên x_1, x_2 đều dương.

Ta có $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 2(m-1) + 2 = 2m$.

Mặt khác, vì $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ nên $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2m}$.

□

Câu 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x + \sqrt{x+12} - 2y = -2 & (1) \\ 2x + 6\sqrt{x+12} + 3y = -3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -12$.

Nhân 3 vào hai vế của (1) và nhân 2 vào hai vế của (2) rồi cộng lại, ta được

$$19x + 15\sqrt{x+12} + 12 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x+12} \geq 0$ ta được phương trình $19t^2 + 15t - 216 = 0 \Leftrightarrow t = 3, t = -\frac{72}{19}$.

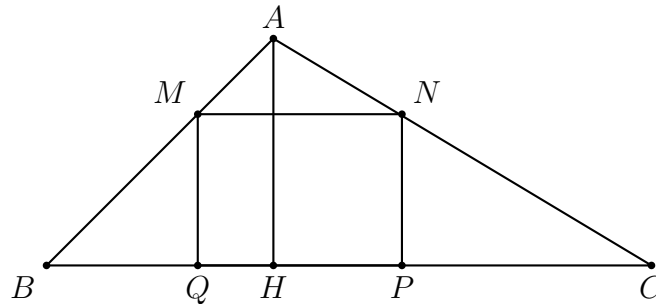
Ta nhận $t = 3 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -5$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(-3; -5)$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và $\sin \widehat{ABC} = \frac{4}{5}$. Gọi

M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB, AC và P, Q là các điểm trên các cạnh BC sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình vuông. Tính độ dài của cạnh hình vuông $MNPQ$.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao đỉnh A của tam giác ABC và x là độ dài cạnh của hình vuông $MNPQ$. Ta có $AH = AB \sin \widehat{ABC} = 8$ cm.

Theo định lý Ta-lét ta có $\frac{x}{AH} = \frac{BM}{BA}$ và $\frac{x}{BC} = \frac{AM}{AB}$.

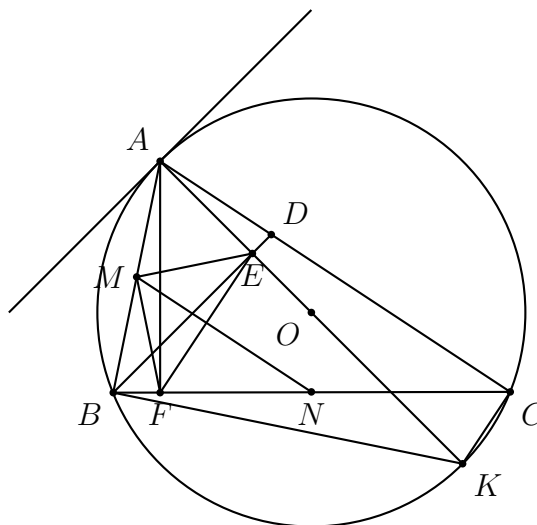
Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được $\frac{x}{AH} + \frac{x}{BC} = 1 \Rightarrow x = \frac{BC \cdot AH}{BC + AH} = 1$ cm.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A . Đường thẳng đi qua B và song song với Δ cắt đường thẳng AO tại điểm E và cắt đoạn AC tại điểm D (O là tâm của đường tròn (O)).

- Chứng minh rằng $AB^2 = AD \cdot AC$.
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và K là điểm đối xứng của điểm A qua điểm O . Chứng minh rằng B, I, K thẳng hàng.
- Gọi F là chân đường cao đỉnh A của tam giác ABC và M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Chứng minh rằng đường thẳng MN là đường trung trực của đoạn EF .

Lời giải.



- Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BA\hat{t}}$ (so le trong) và $\widehat{BA\hat{t}} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

Mặt khác, $\widehat{BAD} = \widehat{CAB}$ nên $\triangle ABD \sim \triangle ACB$. Vì vậy $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AC$.

- b) Vì AK là đường kính của đường tròn (O) nên $KB \perp AB$.

Trong đường tròn (I) ta có $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{DIB}$ phụ với $\widehat{DIB}$.

Mặt khác theo chứng minh trên thì $\widehat{ABD} = \widehat{DCB}$ nên $\widehat{ABI} = \widehat{ABD} + \widehat{DBI} = 90^\circ$.

Vì vậy $IB \perp AB$.

Từ các kết quả trên cho ta B, I, K thẳng hàng.

- c) Ta có $ME = \frac{1}{2}AB = MF$ nên M thuộc đường trung trực của EF .

Vì $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$ nên tứ giác $ABFE$ nội tiếp. Do đó $\widehat{EFC} = \widehat{BAK}$.

Mặt khác, $\widehat{BAK} = \widehat{BCK}$ (cùng chắn cung $\widehat{BK}$) nên $\widehat{EFC} = \widehat{FCK}$.

Từ đó ta được $EF \parallel CK$ (2 góc ở vị trí so le trong bằng nhau).

Do AK là đường kính của đường tròn (O) nên $CK \perp AC$.

Từ đó ta được $AC \perp EF$.

Vì $MN \parallel AC$ nên $MN \perp EF$.

Vậy MN là đường trung trực của đoạn EF .

□

Câu 6.

- a) Tìm số nguyên dương A nhỏ nhất có tính chất: A có nhiều hơn một chữ số thập phân và nếu xóa đi chữ số đầu tiên bên trái của A thì ta được một số nguyên dương bằng $\frac{A}{73}$.
- b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi nào?

Lời giải.

- a) Theo giả thiết ta có

$$A = \overline{aa_n a_{n-1} \dots a_1} = 10^n \cdot a + a_n a_{n-1} \dots a_1 = 10^n \cdot a + \frac{A}{73}$$

Với $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó ta được $72A = 73 \cdot 10^n \cdot a$. Suy ra $73 \cdot 10^n a : 9$.

Vì $(73 \cdot 10^n, 9) = 1$ nên $a : 9$. Vì vậy $a = 9$. Do đó, $73 \cdot 10^n = 2^3 A$.

Vì $(73, 8) = 1$ nên $10^n : 8$. Từ đó suy ra $n \geq 3$.

Vì vậy, $A = 73 \cdot 125 \cdot 10^{n-3} \geq 73 \cdot 125 = 9125$.

Mặt khác $A = 9125$ thỏa mãn bài toán nên $\min A = 9125$.

- b) Ta có $a + \frac{1}{a} = a + \frac{ab + bc + ca}{a} = a + b + c + \frac{bc}{a}$ (1).

Vì $a, b, c > 0$ nên $a + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{bc}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $a + \frac{1}{a} \geq b + c + 2\sqrt{bc} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \Rightarrow \sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Tương tự, ta được $\sqrt{b + \frac{1}{b}} \geq \sqrt{c} + \sqrt{a}$ và $\sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Cộng ba bất đẳng thức cuối cùng, vế với vế, ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = bc, b^2 = ca, c^2 = ab$ và $ab + bc + ca = 1$. Điều này tương đương với $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



———— HẾT ————

77 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHTN HÀ NỘI VÒNG 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x + x^2y = 2y^3. \end{cases}$$

2) Giải phương trình:

$$2(x+1)\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})(2 - \sqrt{1-x^2}).$$

Lời giải.

1) Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 & (1) \\ x.1 + x^2y = 2y^3. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$x(x^2 + y^2 - xy) + x^2y = 2y^3 \Leftrightarrow x^3 - 2y^3 + xy^2 = 0.$$

Với $y = 0 \Rightarrow x = 0$: không thỏa mãn hệ.

Với $y \neq 0$, chia cả hai vế cho y^3 ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2 + \frac{x}{y} = 0$.

Đặt $t = \frac{x}{y}$ ta có: $t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = y$.

Do đó ta có: $\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1$.

2) ĐKXD: $-1 \leq x \leq 1$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ 2u^3 = (u+v)(2-uv) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ 2u^3 = (u+v)(u^2 + v^2 - uv) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2u^3 = u^3 + v^3 \Leftrightarrow u = v$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 0 (\text{thỏa mãn}).$$

□

Câu 2.

1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$12x^2 + 26xy + 15y^2 = 4617.$$

2) Với a, b là các số thực dương, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = (a+b) \left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{b^3+a} \right) - \frac{1}{ab}.$$

Lời giải.

1) Đẳng thức đã cho được viết lại:

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 11x^2 + 11y^2 + 22xy = 4617$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)^2 + 11(x+y)^2 = 4617 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } VT(1) \equiv 0, 1, 3, 5, 9 \pmod{11}$$

$$\text{mà } 4617 \equiv 8 \pmod{11}$$

Vậy không có số nguyên x, y nào thỏa mãn đẳng thức đã cho.

2) Theo BDT Bunhiacopsky ta có:

$$\left(\sqrt{a^3} \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{b} \sqrt{b} \right)^2 \leq (a^3 + b) \left(\frac{1}{a} + b \right)$$

$$(a + b)^2 \leq (a^3 + b) \left(\frac{1}{a} + b \right) \Rightarrow \frac{a + b}{a^3 + b} \leq \frac{\frac{1}{a} + b}{a + b}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{a + b}{a + b^3} \leq \frac{\frac{1}{b} + a}{a + b}$$

$$\Rightarrow (a + b) \left(\frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{a + b^3} \right) \leq \frac{1}{a + b} \left(\frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + a \right)$$

$$\Rightarrow (a + b) \left(\frac{1}{a^3 + b} + \frac{1}{a + b^3} \right) \leq 1 + \frac{1}{ab}$$

$$\Rightarrow M \leq 1.$$

Vậy $Max M = 1$ khi $a = b = 1$.

□

Câu 3. Cho hình thoi $ABCD$ với $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BD , BA lần lượt tại J , L . Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song với ID .

- 1) Chứng minh rằng $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$.
- 2) Chứng minh rằng $CK \perp KB$.
- 3) Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I, L cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

1)

Ta có: $\widehat{ABI} = \widehat{IBD} = \widehat{ADI} = \widehat{DBK}$

mà $\widehat{CBD} = \widehat{ADB}$ (so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{CBD} - \widehat{DBK} = \widehat{ADB} - \widehat{IDB}$$

$$\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ADI} = \widehat{ABI}$$

2) Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác

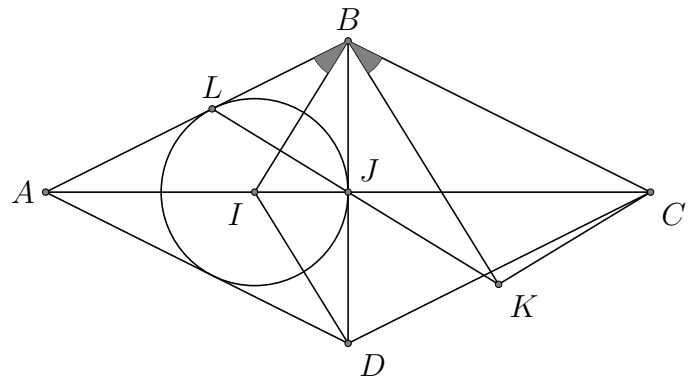
$BJIL$ nội tiếp nên $\widehat{CBK} = \widehat{IBA} =$

$\widehat{CJK}$. Từ đó ta có tứ giác $BCKJ$ nội

tiếp nên $\widehat{CKB} = \widehat{CJB} = 90^\circ$

3) Ta có tứ giác $BCKJ$ nội tiếp nên $\widehat{CKB} = \widehat{JBK} = \widehat{JBI} = \widehat{JLI}$ từ đó tứ giác $CKIL$ nội tiếp.

□



Câu 4. Tìm hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại một cách sắp xếp các số $1, 2, \dots, n$ thành $a_1, a_2, \dots, a_n$ mà khi chia các số $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2 \dots a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau.

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau: Với n là hợp số và $n > 4$ thì $(n - 1)! \cdot n$.

Thật vậy, ta có: Với n là hợp số và $n > 4$ thì $n = a \cdot b$ với a, b là các số nguyên khác 1 và n .

Vậy với $2 \leq a; b \leq n - 1$ thì $(n - 1)! \cdot n$.

Từ giả thiết ta có a_n phải bằng n , vì nếu $a \neq n; a_i = n (i \in [1; n-1])$ thì:

$$\begin{cases} a_1 a_2 \dots a_i : n \\ a_1 a_2 \dots a_n : n \end{cases}$$

điều này trái với giả thiết.

Do đó $a_n = n$, nếu n là một số lớn hơn 4 và n là hợp số, theo bổ đề trên ta có:

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} = (n-1)! : n.$$

Mà $a_1 a_2 \dots a_n : n$ do đó hai số này chia cho n có cùng số dư là 0, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Như vậy $n \leq 4 \Rightarrow n = 4$ (vì n là hợp số).

Xét với $n = 4$ thì tồn tại dãy số: 1; 3; 2; 4 có 1; 1.3; 1.3.2; 1.3.2.4 khi chia cho 4 có số dư lần lượt là 1; 3; 2; 0 thỏa mãn đề bài.

Vậy $n = 4$. □

———— HẾT ————

78 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN KHTN, HÀ NỘI, V2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

- 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = \sqrt{x + 3y} \\ x^2 + y^2 + xy = 3. \end{cases}$
- 2) Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 1$. Chứng minh rằng
- $$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

Lời giải.

- 1) Điều kiện xác định : $x + y \geq 0, x + 3y \geq 0$.
- $$\begin{cases} x + y = \sqrt{x + 3y} \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = x + 3y \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)(y-1) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$$
- + Với $x = 3, y^2 + 3y + 6 = 0$ (vô nghiệm).
- + Với $y = 1, x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1, x = -2$, ta loại nghiệm $x = -2$ do $x + y = -2 + 1 < 0$.
- Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; 1)$.
- 2) Do a, b dương và $ab + a + b = 1$ cho nên $0 < a, b < 1$ và $ab + a + b = 1 \iff (a+b)^2 = (1-ab)^2$.
- $$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}$$
- $$\iff (a+b+ab^2+ab^2+1)\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)} = (1+ab)(1+a^2)(1+b^2)$$
- $$\iff (a+b)(1+ab)\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)} = (1+ab)(1+a^2)(1+b^2)$$
- $$\iff 2(a+b)^2 = (1+a^2)(1+b^2)$$
- $$\iff a^2 + b^2 + 4ab = 1 + a^2b^2$$
- $$\iff (a+b)^2 = (1-ab)^2 \text{ (DPCM)}$$

□

Câu 2.

- 1) Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức
- $$p(p-1) = q(q^2-1) \quad (*)$$
- a. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq, q^2-1 = kp$.
- b. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn đẳng thức (*).
- 2) Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+2}{b^2+2b+2} + \frac{c+2}{c^2+2c+2}$$

Lời giải.

- 1) a. Dễ thấy $p > q \geq 2$ và $(p, q) = 1$ cho nên tồn tại số nguyên dương k sao cho $p-1 = kq$,
 (*) $\iff pkq = q(q^2-1) \iff q^2-1 = kp$.
- b. Theo a ta có $q^2-1 = k(1+kq) \iff q^2 - k^2q - 1 - k = 0$ (1), giả sử q_1, q_2 là các nghiệm của phương trình (1), theo định lý Vi-ét ta có $q_1q_2 = -1-k, q_1+q_2 = -k^2$ do $|q_1|, |q_2|$ là các

số nguyên lớn hơn 1 nên $|q_1 q_2| \geq |q_1| + |q_2|$ suy ra $1 + k \geq k^2 \iff \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$,
 k nguyên dương cho nên $k = 1 \implies q = 2$ và $p = 3$.

- 2) Đặt $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1, ab + bc + ca + abc = 2 \iff (x - 1)(y - 1) + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)(x - 1) + (x - 1)(y - 1)(z - 1) = 2 \iff x + y + z = xyz$ với $x, y, z > 1$
 (*). Khi đó $M = \frac{x}{1 + x^2} + \frac{y}{1 + y^2} + \frac{z}{1 + z^2}$, tiếp tục ta đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, w = \frac{1}{z}$, (*)
 $\iff uv + vw + wu = 1; 0 < u, v, w < 1$ và

$$\begin{aligned} M &= \frac{u}{1 + u^2} + \frac{v}{1 + v^2} + \frac{w}{1 + w^2} \\ &= \frac{u}{uv + vw + wu + u^2} + \frac{v}{uv + vw + wu + v^2} + \frac{w}{uv + vw + wu + w^2} \\ &= \frac{u}{(u + v)(u + w)} + \frac{v}{(u + v)(v + w)} + \frac{w}{(u + w)(v + w)} \\ &= \frac{u(v + w)}{(u + v)(v + w)(u + w)} + \frac{v(u + w)}{(u + v)(v + w)(u + w)} + \frac{w(u + w)}{(u + v)(v + w)(u + w)} \\ &= \frac{2}{(u + v)(v + w)(u + w)} \end{aligned}$$

Ta có $(u + v)(v + w)(u + w) = (u + v + w)(uv + vw + wu) - uvw = u + v + w - uvw$,
 $(u + v + w)^2 \geq 3(uv + vw + wu) = 3, uv + vw + wu \geq 3\sqrt{(uvw)^2} \implies uvw \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \implies$
 $-uvw \geq \frac{1}{3\sqrt{3}} \implies (u + v)(v + w)(u + w) \geq \sqrt{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \implies M \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $M_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, khi $a = b = c = \sqrt{3} - 1$.

□

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB . Trung trực của đoạn thẳng EF cắt BC tại D . Giả sử có điểm P nằm trong $\widehat{EAF}$ và nằm ngoài tam giác AEF sao cho $\widehat{PEC} = \widehat{DEF}$ và $\widehat{PFB} = \widehat{DFE}$. Đường thẳng PA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P .

- 1) Chứng minh rằng $\widehat{EQF} = \widehat{BAC} + \widehat{EDF}$.
- 2) Tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF cắt các đường thẳng CA, AB lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng bốn điểm C, M, N, B cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là đường tròn (K) .
- 3) Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

Lời giải.

2) Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{EMP} &= 180^\circ - \widehat{EPM} - \widehat{MEP} \\ &= 180^\circ - \widehat{PFE} - \widehat{PFB} \\ &= \widehat{ABC}\end{aligned}$$

Cho nên tứ giác $BCMN$ nội tiếp.

3) **Lời giải thứ nhất:**

Bổ đề : Cho tam giác ABC , P là một điểm bất kì khác A, B, C . Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng đối xứng với PA, PB, PC qua các đường phân giác trong của các góc A, B, C tương ứng. Khi đó d_1, d_2, d_3 song song hoặc đồng quy.

Gọi Z là giao điểm của AP và đường tròn (AEF) . Áp dụng bổ đề cho tam giác AEF , DE, PE đối xứng qua phân giác góc $\widehat{AFE}$, DF, PF đối xứng qua phân giác góc $\widehat{AEF}$, DA, PA đối xứng qua phân giác góc $\widehat{EAF}$ cho nên $\widehat{DAC} = \widehat{ZAF}$, mặt khác $\widehat{DCA} = \widehat{AEF} = \widehat{AZF}$ suy ra tam giác DAC đồng dạng với tam giác FAZ (1).

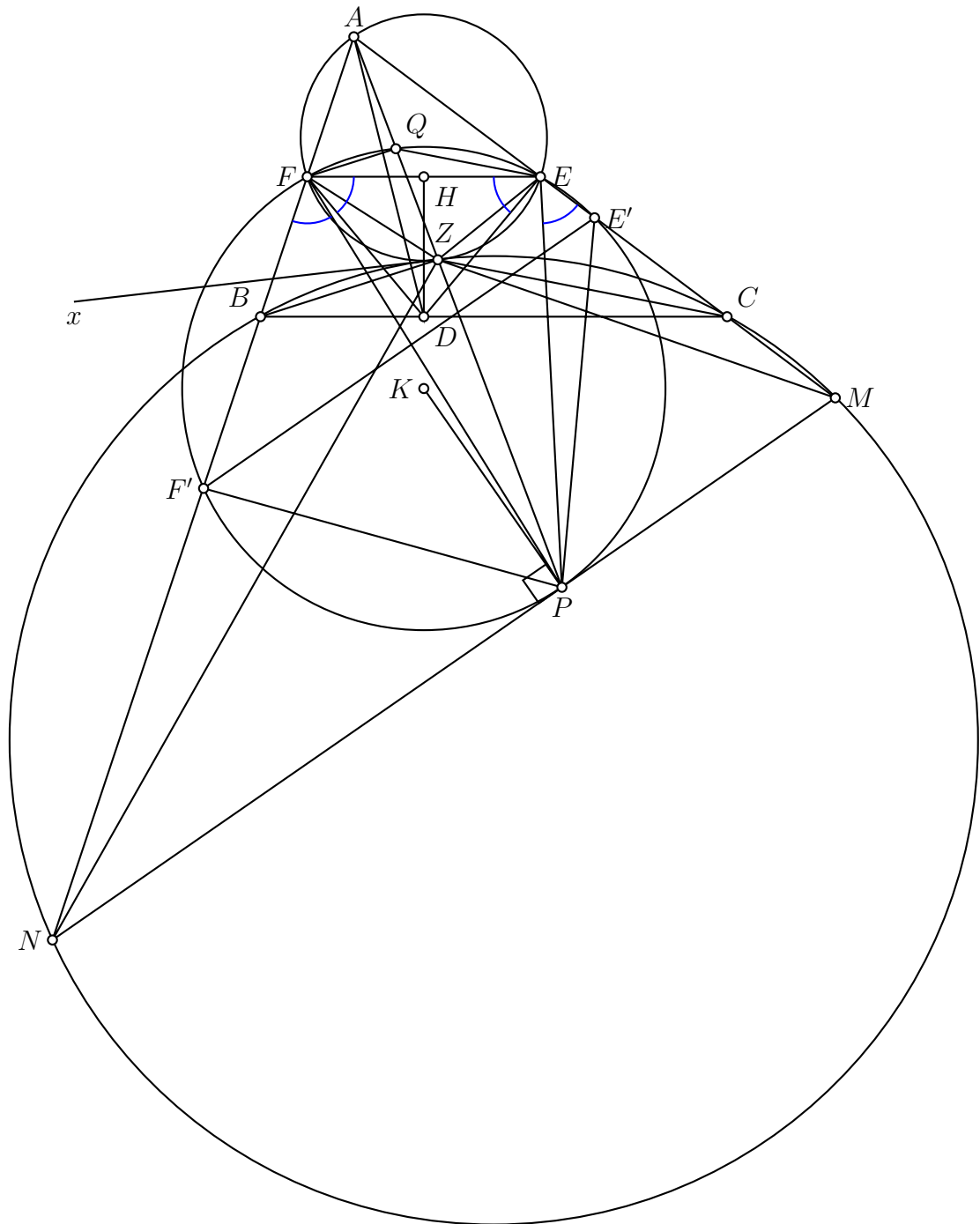
Tứ giác $FPEQ$ nội tiếp cho nên $\widehat{FQP} = \widehat{FEP} = \widehat{DEC}$ mà $\widehat{DCA} = \widehat{AEF} = \widehat{AZF}$ cho nên tam giác DEC và FQZ đồng dạng (2). Ta có E là trung điểm của AC đồng thời (1) và (2) suy ra Q là trung điểm của AZ kéo theo $FQ \parallel BZ$, $\widehat{QFE} = \widehat{ZBC}$ (3).

Dễ thấy các tứ giác $PMEZ, PNFZ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QFE} = \widehat{QPE} = \widehat{ZME}$ (4). Từ (3) và (4) ta có $\widehat{ZBC} = \widehat{ZME}$ cho nên tứ giác $BMCZ$ nội tiếp kéo theo Z thuộc đường tròn (K) .

Tứ giác $PNFZ$ nội tiếp cho nên $\widehat{FZN} = \widehat{FPN} = \widehat{FEP}$ (5) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). $\widehat{FEP} = \widehat{FEZ} + \widehat{FEP} = \widehat{PMZ} + \widehat{FAZ}$ (6). Từ (5) và (6) ta có $\widehat{FZN} = \widehat{PMZ} + \widehat{FAZ}$ (*).

Nếu Zx là tiếp tuyến của đường tròn (AFE) thì $\widehat{FAZ} = \widehat{FZx}$ kết hợp với (*) suy ra $\widehat{PMZ} = \widehat{NZx}$ cho nên Zx cũng là tiếp tuyến của (K) . Vậy đường tròn (AEF) tiếp xúc với (K) .

Lời giải thứ hai: (Thầy Trần Vinh Hợp - Vinhhop Tran)



+ Gọi E', F' là các giao điểm của đường tròn (PEF) và các đường thẳng AC, AB . Ta có $\widehat{PFF'} = \widehat{PE'F'} = \widehat{PEE'} = \widehat{PF'E'}$ cho nên tam giác $PE'F'$ cân tại P và đồng dạng với tam giác DEF , $MN \parallel E'F'$ (1).

+ Ta có tam giác AFE đồng dạng với tam giác $AE'F'$ suy ra $\frac{AF}{AE'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FD}{E'P}$, do (1). Mặt khác $\widehat{AFD} = \widehat{AE'P}$ cho nên tam giác AFD đồng dạng với tam giác $AE'P$ kéo theo $\widehat{FAD} = \widehat{PAE'}$.

+ Ta có tam giác BDF đồng dạng tam giác MPE' , ABD đồng dạng với tam giác APM và F là trung điểm của AB cho nên E' là trung điểm của AM , $E'F' \parallel MN$ cho nên F' là trung điểm của AN .

+ Hai tứ giác $FZPN$ và $FQPF'$ nội tiếp suy ra $AZ.AP = AF.AN = 2.AF.AF' = 2.AQ.AP \Rightarrow AZ = 2AQ$ hay Q là trung điểm của AZ .

+ Q là trung điểm của AZ kéo theo $FQ \parallel BZ$, $\widehat{QFE} = \widehat{ZBC}$ (2). Dễ thấy các tứ giác $PMEZ$, $PNFZ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QFE} = \widehat{QPE} = \widehat{ZME}$ (3).

+ Từ (2) và (3) ta có $\widehat{ZBC} = \widehat{ZME}$ cho nên tứ giác $BMCZ$ nội tiếp kéo theo Z thuộc đường tròn (K) . Tứ giác $PNFZ$ nội tiếp cho nên $\widehat{FZN} = \widehat{FPN} = \widehat{FEP}$ (4) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). $\widehat{FEP} = \widehat{FEZ} + \widehat{FEZ} = \widehat{PMZ} + \widehat{FAZ}$ (5). Từ (4) và (5) ta có $\widehat{FZN} = \widehat{PMZ} + \widehat{FAZ}$ (*).

+ Nếu Zx là tiếp tuyến của đường tròn (AFE) thì $\widehat{FAZ} = \widehat{FZx}$ kết hợp với (*) suy ra $\widehat{PMZ} = \widehat{NZx}$ cho nên Zx cũng là tiếp tuyến của (K) . Vậy đường tròn (AEF) tiếp xúc với (K) .

□

Câu 4. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 5$. Xét một đa giác lồi n cạnh. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác mà các đường chéo này chia đa giác đã cho thành đúng k miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi (hai miền bất kỳ không có điểm trong chung).

a. Chứng minh rằng ta có thể thực hiện được với $n = 2018, k = 672$.

b. Với $n = 2017, k = 672$ ta có thể thực hiện được không? Hãy giải thích.

Lời giải.

- Giả sử đa giác lồi là $A_1A_2 \dots A_{2018}$, ta kẻ các đường chéo A_1A_5, A_1A_{5+3i} với $1 \leq i \leq 671$, khi đó ta có được đúng 672 miền, mỗi miền là một ngũ giác lồi.
- Giả sử ta có thể thực hiện được, 672 ngũ giác lồi có tất cả $5 \times 672 = 3360$ cạnh, trong các cạnh này có 2017 cạnh của đa giác. Bởi vì cạnh nào của một ngũ giác không phải là cạnh của đa giác sẽ được tính 2 lần, cho nên $3360 = 2017 + 2m$ với m là số nguyên dương, phương trình này không có nghiệm nguyên dương, cho nên không thể thực hiện được việc chia đa giác.

□

———— HẾT ————

79 ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN, SỞ GIÁO DỤC LÂM ĐỒNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho $x = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt{9-4\sqrt{5}}-2}$. Tính giá trị biểu thức $P = (x^2 + x + 1)^{2017}$.

Lời giải.

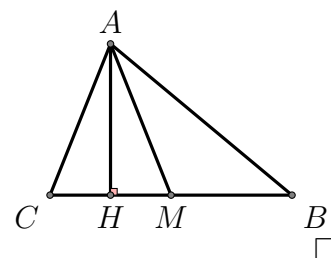
$$\text{Có } x = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)-2} = \frac{1}{5-4-2} = -1 \Rightarrow P = (1-1+1)^{2017} = 1. \quad \square$$

Câu 2. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC . Tính $\frac{\tan B}{\tan C}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của CM , do $AM = AC$ nên $\triangle AMC$ cân tại A , suy ra $AH \perp CM$

$$\text{Ta có: } \frac{\tan B}{\tan C} = \frac{AH}{BH} : \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH} = \frac{1}{3}.$$



Câu 3. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a^{2014} + b^{2015} + c^{2016}$ chia hết cho 6 thì $a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}$ chia hết cho 6.

Lời giải.

$$\text{Đặt } A = a^{2014} + b^{2015} + c^{2016}, B = a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}.$$

$$\text{Ta có: } B - A = a^{2014}(a^2 - 1) + b^{2015}(b^2 - 1) + c^{2016}(c^2 - 1).$$

$$\text{Nhận thấy rằng } a(a^2 - 1) = (a-1)a(a+1) : 6 \Rightarrow a^{2014}(a^2 - 1) : 6.$$

$$\text{Tương tự ta có } b^{2014}(b^2 - 1) : 6, c^{2014}(c^2 - 1) : 6 \text{ nên ta suy ra } B - A : 6.$$

$$\text{Mà } A : 6 \text{ nên } B : 6. \quad \square$$

Câu 4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2x^2 - xy = 1 \end{cases}$$

Lời giải.

$$x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow (x-y) \left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } x = y, (2) \Leftrightarrow 2x^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } y = -\frac{1}{x}, (2) \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là } (1, 1), (-1, -1). \quad \square$$

Câu 5. Giải phương trình $\frac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \sqrt{3x+1} - 1$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x \geq -\frac{1}{3}.$$

$$\text{pt} \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{3x+10} = \sqrt{3x+1}+1 (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow 3x+10 = 3x+2+2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 4 \Leftrightarrow x=5.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0$ và $x=5$. $\square$

Câu 6. Cho hai số dương x, y . Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{x^2}}$.

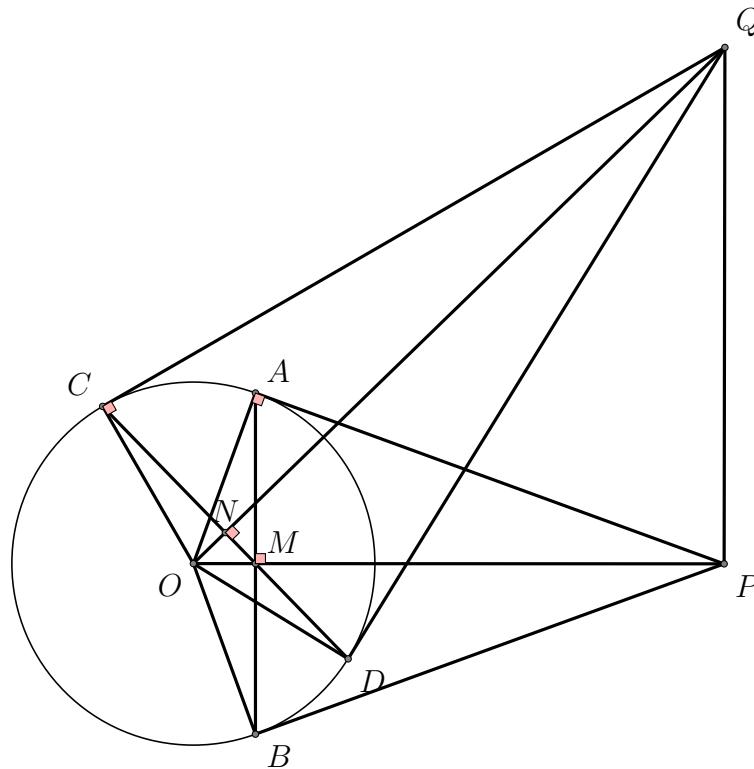
Lời giải.

$$\text{Ta có: } A \geq 2\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = 2\sqrt{x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}} \geq 2\sqrt{2+2} = 2\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$. Vậy $\min A = 2\sqrt{2}$. $\square$

Câu 7. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Gọi M là giao điểm của OP và AB . Kẻ dây cung CD đi qua M (CD không đi qua O và không trùng với AB). Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C và D cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng OP vuông góc với PQ .

Lời giải.



Gọi N là giao điểm của CD và OQ , ta có $ON.OQ = OC^2$.

Mặt khác ta có $OM.OP = OA^2$, vậy ta có $OM.OP = ON.OQ \Rightarrow \frac{OM}{OQ} = \frac{ON}{OP}$.

Vậy $\triangle OMN \sim \triangle OQP$ nên ta có $\widehat{OQP} = \widehat{ONM} = 90^\circ \Rightarrow PQ \perp OP$. $\square$

Câu 8. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì $2^n - 1$ không thể là số chính phương.

Lời giải.

Giả sử $2^n - 1$ là một số chính phương, do $2^n - 1$ là số nguyên lẻ nên $2^n - 1 = (2k + 1)^2 \Leftrightarrow 2^n = 2(2k^2 + 2k + 1) \Leftrightarrow 2k^2 + 2k + 1 = 2^{n-1}$, đây là điều vô lý vì 2^{n-1} là một số nguyên chẵn. Vậy ta có điều phải chứng minh, nghĩa là $2^n - 1$ không thể là một số chính phương. $\square$

Câu 9. Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$, trong đó m, n là các tham số thỏa mãn $m + n = 6$. Tìm giá trị của m, n để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 = x_2^2 + x_2 + 2$.

Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta = m^2 - 4n \geq 0$.

$$\text{Có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^2 + 2x_2 + 2 = -m \\ x_2^3 + x_2^2 + 2x_2 = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2^3 - 2 = n + m = 6 \Leftrightarrow x_2^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = -10 \\ n = 16 \end{cases} \text{ (nhận).} \quad \square$$

Câu 10. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + \sqrt{2abc} = 2$. Chứng minh rằng $\sqrt{a(2-b)(2-c)} + \sqrt{b(2-c)(2-a)} + \sqrt{c(2-a)(2-b)} = \sqrt{8} + \sqrt{abc}$.

Lời giải.

Ta có: $a(2-b)(2-c) = a(4 - 2(b+c) + bc) = a(2a + 2\sqrt{2abc} + bc) = a(\sqrt{2a} + \sqrt{bc})^2$.

$$\text{Vậy } VT = \sqrt{a}(\sqrt{2a} + \sqrt{bc}) + \sqrt{b}(\sqrt{2b} + \sqrt{ca}) + \sqrt{c}(\sqrt{2c} + \sqrt{ab}) = \sqrt{2}(a+b+c) + 3\sqrt{abc} \\ = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2abc}) + 3\sqrt{abc} = 2\sqrt{2} + \sqrt{abc} = VP. \quad \square$$

Câu 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) với đường cao $AH = R\sqrt{2}$. Gọi D, K lần lượt là hình chiếu của H lên AB và AC . Chứng minh rằng $S_{ADK} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, với S_{ADK} và S_{ABC} lần lượt là diện tích của hai tam giác ADK và ABC .

Lời giải.

$$\text{Ta có } AD \cdot AB = AH^2 = AK \cdot AC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AK}{AB}$$

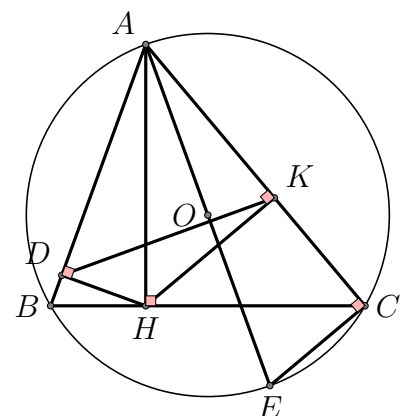
$$\text{Vậy } \triangle ADK \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{S_{ADK}}{S_{ACB}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2.$$

Kẻ đường kính AE , ta có $\widehat{AHD} = \widehat{ABH} = \widehat{AEC}$

Nên $\triangle ADH \sim \triangle ACE$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AH}{AE} = \frac{R\sqrt{2}}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADK}}{S_{ACB}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{ADK}. \quad \square$$



Câu 12. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) , kẻ CH vuông góc với AB (C khác A, B và H thuộc đoạn AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E . Gọi N là giao điểm của DE với CH . Chứng minh rằng N là trung điểm của CH .

Lời giải.

Gọi M, F lần lượt là giao điểm thứ hai của CH, CO với đường tròn (O) , gọi K là giao điểm của CF với DE .

Ta có: CF là đường nối tâm của hai đường tròn nên $CF \perp DE$ tại K .

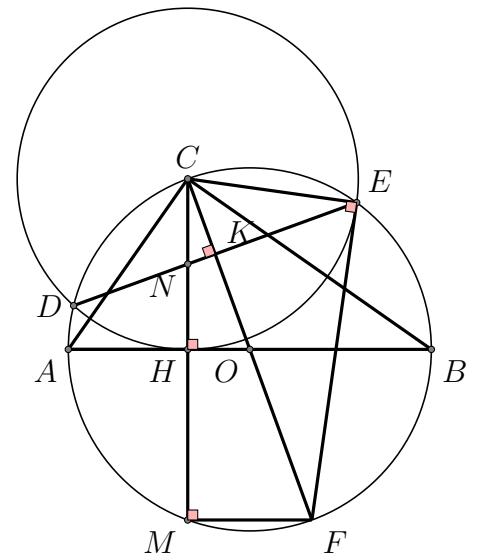
Vậy ta có $\triangle CKN \sim \triangle CMF$

$$\Rightarrow \frac{CK}{CM} = \frac{CN}{CF} \Rightarrow CN \cdot CM = CK \cdot CF.$$

Mặt khác ta có $CK \cdot CF = CE^2$ nên $CN \cdot CM = CE^2$.

$$\Leftrightarrow CH \cdot 2CH = CH^2 \Leftrightarrow CN = \frac{1}{2}CH.$$

Vậy N là trung điểm của CH .



□

———— HẾT ————

80

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Rút gọn biểu thức A .

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

b) $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{-3}{\sqrt{x}+1}$. Để A nhận giá trị nguyên khi $\frac{-3}{\sqrt{x}+1}$ đạt giá trị nguyên. Hay

$$-3 : (\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \text{ là ước của } -3.$$

$$\text{Nên } \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\sqrt{x}+1 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ (không thỏa mãn).}$$

$$\sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\sqrt{x}+1 = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -4 < 0 \text{ (không thỏa mãn).}$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 4$ thì A nhận giá trị nguyên. □

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba đường thẳng $(d_1): y = -5(x+1)$, $d_2: y = 3x-13$ và $(d_3): y = mx+3$ (với m là tham số). Tìm tọa độ giao điểm I của (d_1) và (d_2) . Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d_3) qua I ?

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x-1| + 2\sqrt{y+2} = 5 \\ 3\sqrt{y+2} - |x-1| = 5 \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Tọa độ giao điểm I của hai đường (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = -5x - 5 \\ y = 3x - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 13 = -5x - 5 \\ y = 3x - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 8 \\ y = 3x - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 13 = -10 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm I của hai đường (d_1) và (d_2) là $I(1; -10)$.

Đường thẳng (d_3) đi qua giao điểm I khi tọa độ của I là $x = 1$ và $y = -10$ thỏa mãn công thức $y = mx + 3$ thay vào ta có: $-10 = m.1 + 3 \Leftrightarrow m = -13$.

Vậy với $m = -13$ thì đường thẳng (d_3) đi qua điểm I .

- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |x - 1| + 2\sqrt{y + 2} = 5 \\ 3\sqrt{y + 2} - |x - 1| = 5 \end{cases}.$$

Đặt $A = |x - 1| \geq 0$; $B = \sqrt{y + 2} \geq 0$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A + 2B = 5 \\ 3B - A = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B = 5 \\ -A + 3B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} |x - 1| = 1 \\ \sqrt{y + 2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = 1 \\ y + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{cases} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy $(x; y) = \{(2; 2), (0; 2)\}$ là nghiệm của hệ.

□

Câu 3.

- a) Tìm m để phương trình: $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn hệ thức: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0$.
- b) Giải phương trình: $x\sqrt{2x - 2} = 9 - 5x$.

Lời giải.

- a) Phương trình $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - (m - 1)(m - 2) > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m - 1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m + 2}{m - 1} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{2m}{m - 1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m + 2}{m - 1}}{\frac{m + 2}{m - 1}} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{4m^2}{(m - 1)^2} - 2 \cdot \frac{2m^2 - 2m + 4}{(m - 1)^2}}{\frac{m + 2}{m - 1}} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{4m^2 - 2m^2 - 2m + 4}{(m - 1)^2}}{\frac{m + 2}{m - 1}} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{2m^2 - 2m + 4}{(m - 1)^2}}{\frac{m + 2}{m - 1}} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2m^2 - 2m + 4)}{(m - 1)(m + 2)} + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4m^2 - 4m + 8) + 5(m^2 + m - 2)}{2(m-1)(m+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{9m^2 + m - 2}{2(m-1)(m+2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{-1 + \sqrt{73}}{18} \\ m_2 = \frac{-1 - \sqrt{73}}{18} \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-2} = 9-5x$.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Đặt $t = \sqrt{2x-2}$, $t \geq 0$. Ta có: $t^2 = 2x-2 \Rightarrow x = \frac{t^2+2}{2} = \frac{1}{2}t^2 + 1$.

Phương trình trở thành:

$$\left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)t = 9 - 5\left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t^3 + t = 9 - \frac{5}{2}t^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 5t^2 + 2t - 8 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (\text{nhận}) \\ t = -2 & (\text{loại}) \\ t = -4 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Với $t = 1$, ta có: $\sqrt{2x-2} = 1 \Leftrightarrow 2x-2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (nhận).

□

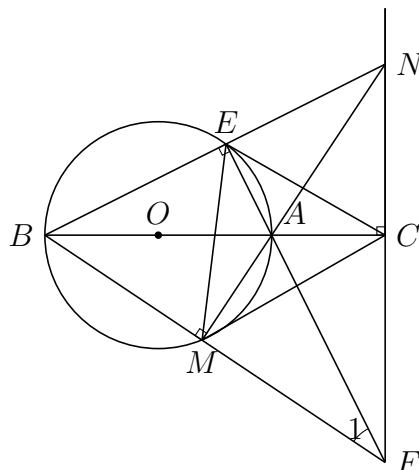
Câu 4. Cho đường tròn (O) với tâm O , bán kính R đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (O) sao cho M không trùng với các điểm A và B . Lấy C là điểm đối xứng với O qua A . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N . Đường thẳng BN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E . Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F .

a) Chứng minh ba điểm A , E , F thẳng hàng và tứ giác $MENF$ nội tiếp.

b) Chứng minh : $AM \cdot AN = 2R^2$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên đường tròn (O) để tam giác BNF có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải.



- a) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

Xét tam giác BNF có: $\widehat{BMA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow NM \perp BF$ nên MN là đường cao.

$BC \perp NF$ (gt) nên BC là đường cao, mà BC cắt MN tại A nên A là trực tâm. FA thuộc đường cao thứ ba nên $FA \perp BN$ mà $\widehat{BEA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EA \perp BN$, theo tiên đề Euclide (Ơ-cơ-lít) thì qua A kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với BN nên ba điểm A, E, F thẳng hàng.

Chứng minh tứ giác $MENF$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{FEN} = 90^\circ$ ($FE \perp BN$).

$\widehat{FMN} = 90^\circ$ ($MN \perp BF$) $\Rightarrow \widehat{FEN} = \widehat{FMN} = 90^\circ$.

Mà E và M nằm về nửa mặt phẳng bờ là NF . Vậy bốn điểm N, E, M, F cùng thuộc đường tròn đường kính MN hay tứ giác $MENF$ nội tiếp.

- b) Chứng minh: $AM \cdot AN = 2R^2$.

Xét $\triangle BAN$ và $\triangle MAC$ ta có:

$\widehat{N_1} = \widehat{F_1}$ (góc nội tiếp của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $NEMF$ cùng chắn cung EM). (1)

$\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CAMF$ cùng chắn cung AM) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{N_1} = \widehat{C_1} (= \widehat{F_1})$ (*)

Mà $\widehat{BAN} = \widehat{MAC}$ (đối đỉnh) (**)

Từ (*) và (**) ta có hai tam giác: $\triangle BAN$ và $\triangle MAC$ đồng dạng với nhau.

$\Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow AM \cdot AN = AB \cdot AC = 2R \cdot R = 2R^2$.

- c) Theo câu a) thì A là trọng tâm của $\triangle BNF$ mà $BC = AB + AC = 2R + R = 3R$.

Vì $S_{\triangle BNF} = \frac{1}{2} BC \cdot NF = \frac{1}{2} \cdot 3R \cdot (NC + CF)$ (1)

Mà NC và $NF > 0$.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có: $NC + CF \geq 2\sqrt{NC \cdot CF}$. (2)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $NC = CF$. Vậy BC là trung tuyến của $\triangle BNF$.

Điểm $A \in BC$ có $AB = 2R$; $BC = 3R$ nên $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$. Suy ra A là trọng tâm tam giác BNF .

Điểm A vừa là trọng tâm, vừa là trực tâm tam giác BNF nên suy ra tam giác BNF là tam giác đều $\Rightarrow BC$ là phân giác góc $\widehat{FBN} \Rightarrow \widehat{MBA} = 30^\circ$; $\widehat{MAB} = 60^\circ$

hay $\begin{cases} M \in AB \\ \widehat{MAB} = 60^\circ; \widehat{MBA} = 30^\circ \end{cases}$ thì dấu bằng xảy ra.

Xét $\triangle CNA$ và $\triangle CBF$ ta có: $\widehat{NCA} = \widehat{FCB} = 90^\circ$; $\widehat{CNA} = \widehat{CBM}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMCN$).

Do đó $\triangle CNA$ và $\triangle CBF$ đồng dạng (g.g).

$\Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{AC}{CF} \Rightarrow CN \cdot CF = AC \cdot CB = R \cdot 3R = 3R^2$ (3)

Thay (2) và (3) và (1) ta có:

$S_{\triangle BNF} = \frac{1}{2} BC \cdot NF = \frac{1}{2} \cdot 3R(NC + CF) \geq \frac{3R}{2} \cdot 2\sqrt{CN \cdot CF} = 3R\sqrt{AC \cdot BC} = 3R\sqrt{R \cdot 3R} = 3R^2\sqrt{3}$.

Vậy $\min S_{\triangle BNF} = 3R^2\sqrt{3}$ khi $\begin{cases} M \in AB \\ \widehat{MAB} = 60^\circ; \widehat{MBA} = 30^\circ \end{cases}$.

□

Câu 5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} > 1.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} > 1 \\ \Leftrightarrow & [c(a^2 + b^2 - c^2) + 2abc] + [a(b^2 + c^2 - a^2) - 2abc] + [b(a^2 + c^2 - b^2) - 2abc] > 0 \\ \Leftrightarrow & c[(a + b)^2 - c^2] + a[(b - c)^2 - a^2] + b[(a - c)^2 - b^2] > 0 \\ \Leftrightarrow & c(a + b - c)(a + b + c) + a(b - c - a)(b - c + a) + b(a - c - b)(a - c + b) > 0 \\ \Leftrightarrow & c(a + b - c)(a + b + c) + a(b - c - a)(a + b - c) + b(a - c - b)(a + b - c) > 0 \\ \Leftrightarrow & (a + b - c)[c(a + b + c) + a(b - c - a) + b(a - c - b)] > 0 \\ \Leftrightarrow & (a + b - c)[ca + cb + c^2 + ab - ac - a^2 + ba - bc - b^2] > 0 \\ \Leftrightarrow & (a + b - c)[c^2 - a^2 + 2ba - b^2] > 0 \\ \Leftrightarrow & (a + b - c)[c^2 - (a^2 - 2ba + b^2)] > 0 \\ \Leftrightarrow & (a + b - c)[c^2 - (a - b)^2] > 0 \\ \Leftrightarrow & (a + b - c)(c - a + b)(c + a - b) > 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cùng đúng vì với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, ta có: $a + b > c$ suy ra $a + b - c > 0$; tương tự ta có: $c + b - a > 0$ và $c + a - b > 0$.

Nhân ba bất đẳng thức này về theo về ta có: $(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b) > 0$.

Vậy bất đẳng thức ban đầu đúng. □

———— HẾT ————

81 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH (VÒNG 1)

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức $\frac{1}{\sqrt{2-x}} - \frac{5}{x-1}$.
- Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng $y = 2x + 3$ với trục Oy .
- Với những giá trị nào của m thì hàm số $y = (1 - m^2)x + 2017m$ đồng biến?
- Tam giác đều ABC có diện tích hình tròn ngoại tiếp bằng $3\pi \text{ cm}^2$. Tính độ dài cạnh.

Lời giải.

- Điều kiện xác định của biểu thức là $\begin{cases} 2-x > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

b) $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow M(0; 3)$.

c) Để hàm số đồng biến thì $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow |m| < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

d) Diện tích hình tròn là $3\pi \text{ cm}^2$ nên bán kính đường tròn là $R = \sqrt{3} \text{ (cm)}$.

Kẻ trung tuyến AM , gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Vì $\triangle ABC$ đều nên $GA = \frac{2}{3}AM$ cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow \frac{2}{3}AM = \sqrt{3} \text{ (cm)} \Rightarrow AM = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm.}$$

Mà $\triangle AMB$ vuông tại M nên $\sin B = \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{AM}{\sin 60^\circ} = 3 \text{ cm.}$

□

Câu 2. Cho biểu thức $A = \frac{x-1}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}$ (Với $x > 0$).

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{1}{A}$ là một số nguyên.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x > 0$.

$$A = \frac{(x-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) = x-1.$$

- b) Do $x \in \mathbb{Z}$ nên để $\frac{1}{A} = \frac{1}{x-1}$ là số nguyên thì $(x-1)$ là các ước nguyên của 1.
 $\Rightarrow (x-1) \in \{\pm 1\} \Rightarrow x = 2 \text{ (Với } x > 0\text{)}.$

□

Câu 3.

1) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1) (Với m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{x+3} = 7 - \sqrt{x^2+3} \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{7-y} = y^2 - 6y + 13 \end{cases}$.

Lời giải.

1)

a) Với $m = 2$ phương trình trở thành $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

b) $\Delta' = m - 1$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Khi đó theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m + 1 \end{cases}$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên $x_1^2 - 2mx_1 + m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2mx_1 - m^2 + m - 1$.

Do đó

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2mx_1 - m^2 + m - 1 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2m(x_1 + x_2) - 4m^2 + 2m - 6 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2m \cdot 2m - 4m^2 + 2m - 6 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow m &\leq 3 \end{aligned}$$

Vậy $1 < m \leq 3$.

2) Điều kiện: $x \geq 0, y \leq 7, x + y \geq 0$.

Giải phương trình thứ nhất

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 2\sqrt{x+3} &= 7 - \sqrt{x^2+3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x+3} - 4 + \sqrt{x^2+3} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 &\quad (\text{Thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Thế $x = 1$ giải phương trình thứ hai

$$\begin{aligned} \sqrt{y+1} + \sqrt{7-y} &= y^2 - 6y + 13 \\ \Leftrightarrow (y-3)^2 + 4 - \sqrt{y+1} - \sqrt{7-y} &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-3)^2 + \frac{1}{2} (8 - 2\sqrt{y+1} - 2\sqrt{7-y}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-3)^2 + \frac{1}{2} (\sqrt{y+1} - 2)^2 + \frac{1}{2} (\sqrt{7-y} - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y = 3 &\quad (\text{Thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm hệ là $(x; y) = (1; 3)$.

□

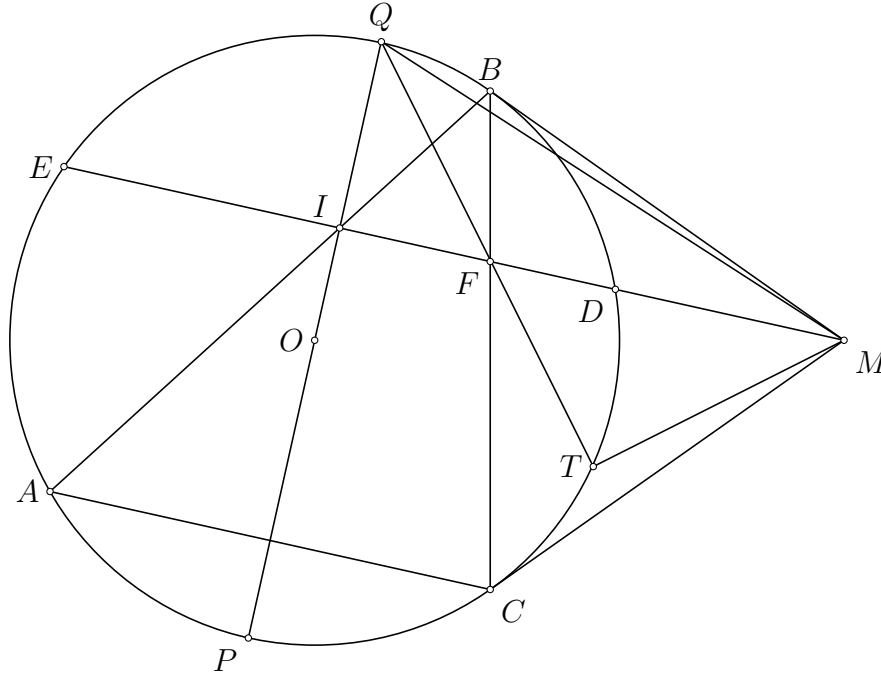
Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , $AB < AC$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại M . Đường thẳng qua M song song với AB cắt đường tròn (O) tại D và E (D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F , cắt AC tại I .

a) Chứng minh 5 điểm M, B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\frac{FI}{FE} = \frac{FD}{FM}$.

c) Đường thẳng OI cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB), đường thẳng QF cắt (O) tại T (T khác Q). Tính tỉ số $\frac{TQ^2 + TM^2}{MQ^2}$.

Lời giải.



- a) Ta có: $\widehat{OBM} = \widehat{OCM} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến).
 $\Rightarrow B, C, M, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM (1).
 Lại có: $ME \parallel AC \Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BAC}$ (cặp góc đồng vị).
 Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BCM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn $\widehat{BC}$).
 $\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BCM} \Rightarrow$ tứ giác $BMCI$ nội tiếp.
 $\Rightarrow B, C, I, M$ cùng thuộc một đường tròn (2).
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow B, M, O, I, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM .
- b) Theo a) thì tứ giác $BMCI$ nội tiếp nên $\triangle FBI \sim \triangle FMC$ (g.g).
 $\Rightarrow \frac{FI}{FC} = \frac{FB}{FM} \Leftrightarrow FI \cdot FM = FB \cdot FC$ (3).
 Lại dễ chứng minh được $\triangle FBE \sim \triangle FDC$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{FE}{FC} \Leftrightarrow FD \cdot FE = FB \cdot FC$ (4).
 Từ (3) và (4) $\Rightarrow FI \cdot FM = FD \cdot FE \Leftrightarrow \frac{FI}{FE} = \frac{FD}{FM}$.
- c) Ta dễ chứng minh được $\triangle FBQ \sim \triangle FTC$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{FB}{FT} = \frac{FQ}{FC} \Leftrightarrow FT \cdot FQ = FB \cdot FC$ (5).
 Từ (3) và (5) $\Rightarrow FI \cdot FM = FT \cdot FQ \Leftrightarrow \frac{FI}{FT} = \frac{FQ}{FM}$.
 Từ đó ta được $\triangle FIQ \sim \triangle FTM$ (c.g.c).
 $\Rightarrow \widehat{FIQ} = \widehat{FTM} = 90^\circ \Rightarrow \triangle QTM$ vuông tại T .
 $\Rightarrow MQ^2 = TQ^2 + TM^2 \Leftrightarrow \frac{TQ^2 + TM^2}{MQ^2} = 1$.

□

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq -2, b \geq -2$ và $a + b + 2c = 6$. Chứng minh rằng

- a) $a^2 + b^2 + 4ab + 16 \geq 4c^2 - 16c + 20$.
 b) $\frac{4 - b^2}{4[(c - 2)^2 + 1]} - \frac{a^2}{(a - b)^2 + 6ab + 16} + 5 \geq 0$.

Lời giải.

(Thực hiện bởi viet9a14124869 - VMF's Member)

a) Ta có $a + b = 6 - 2c$ và $(a + 2)(b + 2) \geq 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 4ab + 16 = (a + b)^2 + 2(a + 2)(b + 2) - 4(a + b) + 8$$

$$\geq (a + b)^2 - 4(a + b) + 8 = (6 - 2c)^2 - 4(6 - 2c) + 8 = 4c^2 - 16c + 20.$$

Dễ dàng thấy xảy ra khi $a = -2$ hoặc $b = -2$.b) Theo câu a) ta có $(a - b)^2 + 6ab + 16 \geq 4c^2 - 16c + 20$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{4 - b^2}{4c^2 - 16c + 20} - \frac{a^2}{(a - b)^2 + 6ab + 16} + 5 \\ &\geq \frac{4 - b^2 - a^2}{4c^2 - 16c + 20} + 5 = \frac{4 - (a + b)^2 + 2(a + 2)(b + 2) - 4(a + b) - 8}{4c^2 - 16c + 20} + 5 \\ &\geq \frac{4 - (a + b)^2 - 4(a + b) - 8}{4c^2 - 16c + 20} + 5 = \frac{4 - (6 - 2c)^2 - 4(6 - 2c) - 8}{4c^2 - 16c + 20} + 5 \\ &= \frac{4(2c - 3)^2}{4c^2 - 16c + 20} \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $(a, b, c) \in \left\{ \left(-2, 5, \frac{3}{2} \right); \left(5, -2, \frac{3}{2} \right) \right\}$.

□

———— HẾT ————

82 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LHP NAM ĐỊNH VÒNG 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

- a) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right) \geq 1$
- b) Với a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện $a + b + c = 3$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = (a-3)^{2017} \cdot (b-3)^{2017} \cdot (c-3)^{2017}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định: $x \geq 2$.

$$\text{BPT} \iff \frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \geq 1 \iff \frac{1}{\sqrt{x}-1} \geq 1 \iff \sqrt{x} \leq 2 \iff x \leq 4 \implies x = 2, 3, 4.$$
- b) Ta có $(a-3)(b-3)(c-3) = abc + 9(a+b+c) - 3(ab+bc+ca) - 27 = abc - 3(ab+bc+ca)$, mặt khác $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \iff abc = 3(ab+bc+ca)$, cho nên $P = 0$

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+6x+5} + 1) = 4$
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ x^2 - 3x - 4\sqrt{y} + 10 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định: $x \geq -1$.

$$\text{PT} \iff \sqrt{x^2+6x+5} + 1 = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+1} \iff (\sqrt{x+5} - 1)(\sqrt{x+1} - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ hoặc } x = -4 \text{ (loại)}.$$
- b) Điều kiện xác định: $x \geq -2, y \geq 0$.
 Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3y} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{(3+1)(3y+x+2)}$, cho nên phương trình thứ nhất tương đương với $\sqrt{y} = \sqrt{x+2}$, thay vào phương trình thứ hai ta được $x^2 - 3x - 4\sqrt{x+2} + 10 = 0 \iff (x-2)^2 + \frac{(x-2)^2}{x+6+4\sqrt{x+2}} = 0 \iff (x-2)^2 = 0$
 hoặc $1 + \frac{1}{x+6+4\sqrt{x+2}} = 0$ (vô nghiệm do $x+2 \geq 0$). Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (2; 4)$.

□

Câu 3. Cho đường tròn (O) , từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC , I là trung điểm của BH . Đường thẳng qua I vuông góc với OB cắt (O) tại hai điểm D, K (D thuộc cung nhỏ BC). Tia AD cắt đường (O) tại thứ hai E , DK cắt BE tại F .

- a) Chứng minh tứ giác $ICEF$ nội tiếp.
- b) Chứng minh rằng: $\widehat{DBH} = 2\widehat{DKH}$.
- c) Chứng minh rằng: $BD \cdot CE = BE \cdot CD$ và $BF \cdot CE^2 = BE \cdot CD^2$.

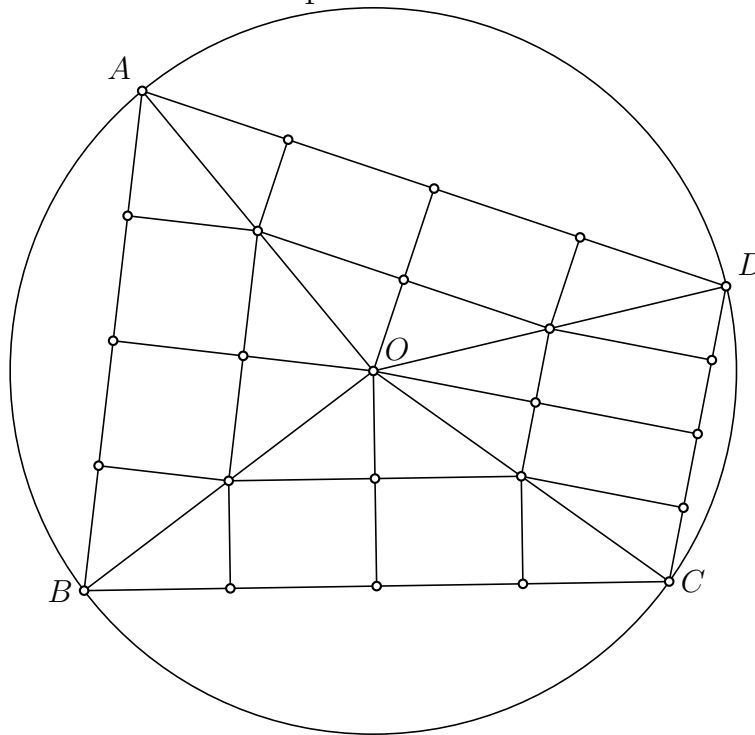
Lời giải.

Câu 5.

- a) Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + (a+b)(4+5c)$.
- b) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính bằng $R = 4\text{cm}$ (O nằm trong tứ giác $ABCD$). Xét 33 điểm phân biệt nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong 33 điểm đó luôn tìm được 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} \geq \frac{4}{a+b+bc+ac} = \frac{4}{(a+b)(c+1)}$, kéo theo $P \geq \frac{4}{(a+b)(c+1)} + 4(a+b)(1+c) + (a+b)c$. Áp dụng AM-GM $\frac{4}{(a+b)(c+1)} + 4(a+b)(1+c) \geq 2\sqrt{\frac{4}{(a+b)(c+1)} \cdot 4(a+b)(1+c)} = 8$, a, b, c không âm cho nên $(a+b)c \geq 0$. Vậy $P_{\min} = 8$ khi $a = b = \frac{1}{2}$ và $c = 0$.
- b) Bổ đề: Trong các tam giác nội tiếp đường tròn bán kính R , tam giác đều có diện tích lớn nhất và diện tích lớn nhất đó bằng $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.



Chia tứ giác $ABCD$ thành 16 tứ giác bởi các điểm chia các cạnh AB, BC, CD, DA thành 4 phần bằng nhau và các trung điểm các cạnh OA, OB, OC, OD , dễ thấy mỗi tứ giác nhỏ là các tứ giác nội tiếp đường tròn có bán kính 1cm. Theo nguyên lý Dirichlet có một tứ giác chứa ít nhất 3 điểm, 3 điểm này tạo nên tam giác thuộc hình tròn bán kính 1cm cho nên diện tích lớn nhất bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$.

□

———— HẾT ————

83 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

a) Giải phương trình $(x-1)(x+2) + 2\sqrt{x^2+x+1} = 0$.

b) Cho x, y là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| = |x| + |y|.$$

Đẳng thức trên còn đúng hay không trong trường hợp x, y là các số thực âm? Tại sao?

Lời giải.

a) Do $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên phương trình đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có:

$$(x-1)(x+2) + 2\sqrt{x^2+x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 + 2\sqrt{x^2+x+1} - 3 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+x+1}$, $t > 0$. Thay vào (1), ta được: $t^2 + 2t - 3 = 0$. (2)

Giải (2) được nghiệm $t = 1$ (nhận) hoặc $t = -3$ (loại).

Vậy $t = 1$ hay $x^2 + x + 1 = 1$. Giải phương trình này ta được các nghiệm $x = -1$, $x = 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$ và $x = -1$.

b) Với $x > 0$ và $y > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| &= \left| \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} \right| + \left| \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{2} \right| \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} + \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2} = x+y = |x| + |y|. \end{aligned}$$

Trong trường hợp $x < 0$, $y < 0$. Đặt $a = -x$, $b = -y$. Ta có $a > 0$, $b > 0$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| &= \left| \frac{-x-y}{2} + \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{-x-y}{2} - \sqrt{xy} \right| \\ &= \left| \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \right| + \left| \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right| = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} + \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \\ &= a+b = |x| + |y|. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức vẫn đúng trong trường hợp x, y là các số thực âm. □

Câu 2.

a) Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $n^2 + n + 3$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng n chia 3 dư 1 và $7n^2 + 6n + 2017$ không phải là số chính phương.

b) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$2x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 1 = 2017.$$

Lời giải.

a) Vì n là số nguyên dương nên $n^2 + n + 3 > 3$. Gọi r là số dư khi chia n cho 3, $r \in \{0, 1, 2\}$.

Nếu $r = 0$ hoặc $r = 2$ thì $n^2 + n + 3$ chia hết cho 3, mâu thuẫn với giả thiết $n^2 + n + 3$ là số nguyên tố. Do đó $r = 1$ hay n chia 3 dư 1. Khi đó $7n^2 + 6n + 2017$ chia 3 dư 2. Vì một số chính phương có số dư khi chia cho 3 là 0 hoặc 1 nên $7n^2 + 6n + 2017$ không phải là một số chính phương.

b) Ta có:

$$2x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 1 = 2017 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x + 1)^2 = 2017.$$

Ta có $2017 = 9^2 + 44^2$. Như vậy có các trường hợp sau:

$x - 2y$	9	9	-9	-9	44	44	-44	-44
$x + 1$	44	-44	44	-44	9	-9	9	-9
x	43	-45	43	-45	8	-10	8	-10
y	17	-27	26	-18	-18	-27	26	17

□

Câu 3.

- a) Cho đa thức $P(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 11$ và các số thực a, b thỏa mãn $P(a) = 1, P(b) = 5$. Tính giá trị của $a + b$.
- b) Giả sử x, y là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x(xy + 1) = 2y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H = \frac{y^4}{1 + y^2 + y^4(x^4 + x^2)}$.

Lời giải.

a) Vì $P(a) = 1$ nên

$$a^3 - 6a^2 + 15a - 11 = 1 \Leftrightarrow (a - 2)^3 + 3(a - 2) = -2. \quad (1)$$

Vì $P(b) = 5$ nên

$$b^3 - 6b^2 + 15b - 11 = 5 \Leftrightarrow (b - 2)^3 + 3(b - 2) = 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\begin{aligned} & (a - 2)^3 + 3(a - 2) + (b - 2)^3 + 3(b - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (a + b - 4) \left[(a - 2)^2 - (a - 2)(b - 2) + (b - 2)^2 + 3 \right] = 0 \\ & \Leftrightarrow a + b - 4 = 0 \text{ (do } (a - 2)^2 - (a - 2)(b - 2) + (b - 2)^2 \geq 0). \end{aligned}$$

Như vậy $a + b = 4$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\begin{aligned} 1 + y^2 + y^4(x^4 + x^2) &= (1 + y^4x^2) + (y^2 + y^4x^4) \\ &\geq 2xy^2 + 2x^2y^3 = 2xy^2(1 + xy) = 4y^4. \end{aligned}$$

Do đó $H = \frac{y^4}{1 + y^2 + y^4(x^4 + x^2)} \leq \frac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$. Vậy nên giá trị lớn nhất của H là $\frac{1}{4}$, đạt được khi $x = y = 1$.

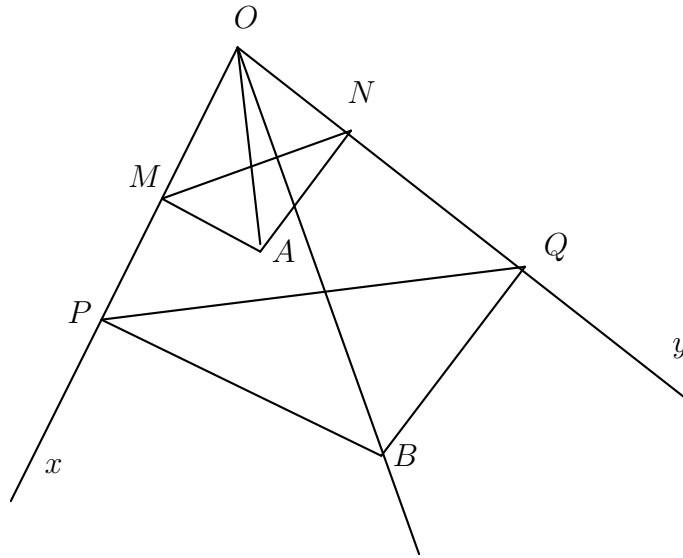
□

Câu 4.

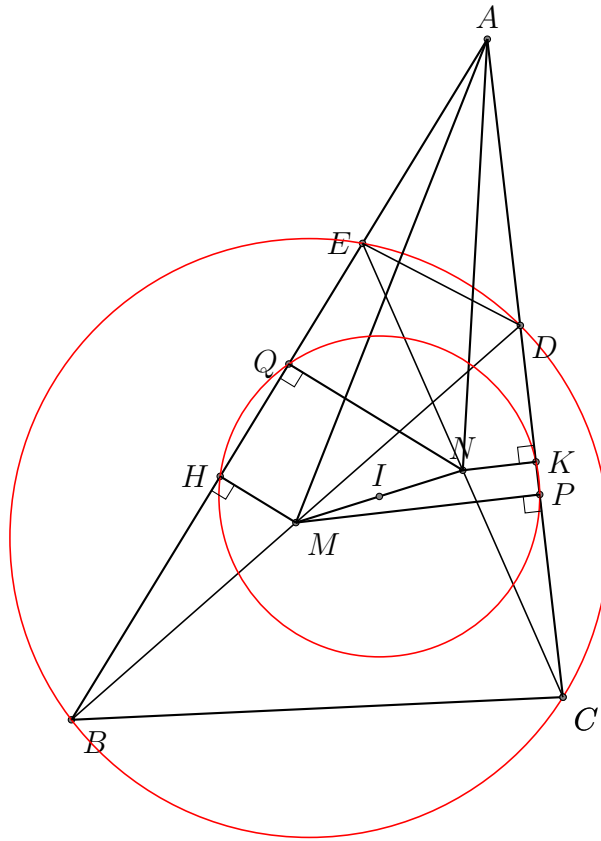
- a) Cho hai điểm A, B phân biệt nằm trong góc nhọn xOy sao cho $\widehat{xOA} = \widehat{yOB}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy . Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên các tia Ox, Oy . Giả sử M, N, P, Q đôi một phân biệt. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Cho tam giác ABC không cân, có ba góc nhọn. Một đường tròn qua B, C cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại D, E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, CE .
- b₁) Chứng minh rằng các tam giác ABD, ACE đồng dạng với nhau và $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$.

- $b_2)$ Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AB , K là hình chiếu vuông góc của N lên AC và I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng tam giác IHK cân.

Lời giải.



- a) Tứ giác $OMAN$ nội tiếp nên $\widehat{ONM} = \widehat{OAM}$. Tứ giác $OPBQ$ nội tiếp nên $\widehat{OPQ} = \widehat{OBQ}$. Mà các tam giác OAM , OBQ đồng dạng nên $\widehat{OAM} = \widehat{OBQ}$. Suy ra $\widehat{ONM} = \widehat{OPQ}$. Do đó bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
- b) Các tam giác ABD , ACE có góc A chung và $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ nên là các tam giác đồng dạng. M, N lần lượt là trung điểm BD, CE nên các tam giác ABM , ACN cũng đồng dạng.



Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. Gọi P là hình chiếu vuông góc của M lên AC ; Q là hình chiếu vuông góc của N lên AB . Theo câu a), bốn điểm H, K, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Hơn nữa, tâm của đường tròn đó là giao điểm các đường trung trực của các đoạn thẳng PK, QH nên tâm đường tròn đó chính là trung điểm I của MN . Do đó, tam giác IHK cân tại I .

□

Câu 5. Cho 9 số nguyên dương đôi một phân biệt, các số đó đều chỉ chứa các ước số nguyên tố gồm 2, 3, 5. Chứng minh rằng trong 9 số đã cho, tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải.

Theo đề, tất cả 9 số đã cho đều có dạng $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$). Xét tính chẵn - lẻ của các bộ số (x, y, z) , ta có tất cả 8 trường hợp. Theo nguyên lý Dirichlet, phải có ít nhất 2 số trong 9 số đã cho có bộ số mũ trong phân tích nguyên tố là cùng tính chẵn - lẻ. Do đó, tích của hai số đó có dạng $2^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot 5^{2c}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$). Suy ra, tích của hai số đó là số chính phương.

□

———— HẾT ————

84 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH, VÒNG 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A = 4$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x > 0$ và $x \neq 1$.

$$A = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $A = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$

b) $A = 4 \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x = 1$ (Thỏa mãn điều kiện).

□

Câu 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m-1)x - m + 2$ (m là tham số.)

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Lời giải.

a) Hoàn chỉnh giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình

$$x^2 = (2m-1)x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (2m-1)x + m - 2 = 0. (*)$$

$\Delta = 4m^2 - 8m + 9 = (2m-2)^2 + 1 > 0$ với mọi m . Vậy với mọi m , (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Theo bài ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ và có $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$. Khi đó $x_1y_1 + x_2y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$.

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}.$$

Do đó, yêu cầu đề bài tương đương với

$$(2m-1)[(2m-1)^2 - 3(m-2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1=0 \\ 4m^2-7m+7=0 \end{cases} \text{ (Phương trình vô nghiệm)}.$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

□

Câu 3. Hai thành phố A và B cách nhau 450 km. Một ô-tô đi từ A đến B với vận tốc không đổi trong một thời gian dự định. Khi đi, ô-tô tăng vận tốc hơn dự kiến 5 km/h nên đã đến B sớm hơn 1 giờ so với thời gian dự định. Tính vận tốc dự kiến ban đầu của ô-tô.

Lời giải.

Gọi vận tốc dự kiến ban đầu của ô-tô là x (km/h). Điều kiện: $x > 0$.

Thời gian ô tô dự định đi từ A đến B là $\frac{450}{x}$ (giờ).

Thời gian ô tô thực tế đi từ A đến B là: $\frac{450}{x+5}$ (giờ).

Vì ô-tô đến B sớm hơn dự định 1 giờ nên ta có phương trình:

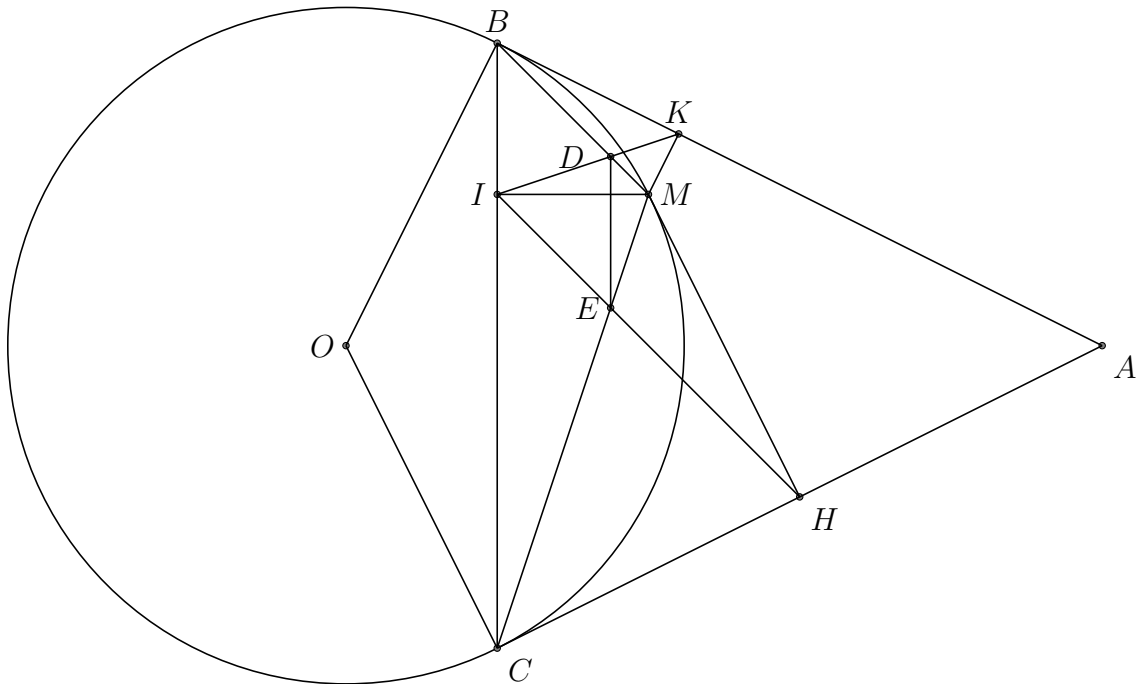
$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2250 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ x = -50 \text{ (Không thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc dự kiến ban đầu của ô-tô là 45 km/h. $\square$

Câu 4. Cho đường tròn (O) , dây cung BC không phải là đường kính. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau ở A . Lấy điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C), gọi I, H, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA và AB . Chứng minh

- Các tứ giác $BKMI, CHMI$ nội tiếp.
- $MI^2 = MK.MH$.
- BM cắt IK tại D, CM cắt IH tại E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

Lời giải.



a) Theo giả thiết ta có $\widehat{MKB} = 90^\circ, \widehat{MIB} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{MKB} + \widehat{MIB} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $BKMI$ nội tiếp. Chứng minh tương tự ta có tứ giác $CHMI$ nội tiếp.

b) Vì tứ giác $MKBI$ nội tiếp, nên $\widehat{DIM} = \widehat{DBK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MK).

$\widehat{MCB} = \widehat{DBK}$ (góc nội tiếp với góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BM)

Vì tứ giác $MHCI$ nội tiếp, nên $\widehat{MCB} = \widehat{MHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MI)

Suy ra $\widehat{DIM} = \widehat{MHI}$.

Tương tự ta có $\widehat{EIH} = \widehat{ECH}$ $\widehat{ECH} = \widehat{MBC}$ $\widehat{MBC} = \widehat{MKI}$. Suy ra $\widehat{EIH} = \widehat{MKI}$.

Do đó tam giác MIK đồng dạng với tam giác MHI . Suy ra $\frac{MI}{MH} = \frac{MK}{MI} \Leftrightarrow MI^2 = MK.MH$.

c) Ta có $\widehat{DIM} = \widehat{MCB}$ (vì cùng bằng $\widehat{MHI}$) và $\widehat{EIH} = \widehat{MBC}$ (vì cùng bằng $\widehat{MKI}$).

Do đó $\widehat{DIE} + \widehat{DME} = \widehat{DIM} + \widehat{EIH} + \widehat{DME} = \widehat{MCB} + \widehat{MBC} + \widehat{DME} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong tam giác). Suy ra tứ giác $MDIE$ nội tiếp, nên $\widehat{DEM} = \widehat{DIM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MD) mà $\widehat{DIM} = \widehat{MCB}$, suy ra $\widehat{DEM} = \widehat{MCB}$, hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DE \parallel BC$. $\square$

Câu 5. Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$.

Lời giải.

Vì $a, b, c \in [0; 1]$, nên $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0 \Leftrightarrow a + b + c - ab - bc - ca + abc \leq 1$. Cũng vì $a, b, c \in [0; 1]$, nên $b \geq b^2, c \geq c^3, abc \geq 0$.

Vậy $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq a + b + c - ab - bc - ca + abc \leq 1$. Dấu " $=$ " khi $b = c = 1, a = 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

———— HẾT ————

85

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - ĐÀ NẴNG

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải bất phương trình: $\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1} \geq 2017 + \sqrt{2017}$. (1)
- b) Cho các số dương x, y thỏa mãn $x = 4y + \sqrt{2xy}$. Tính $P = \frac{\sqrt[3]{xy} (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y})}{\sqrt{2xy}}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện $x > 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1} &= \frac{\sqrt{x}(x+1) + 1 - (\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= x + \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x + \sqrt{x} \geq 2017 + \sqrt{2017} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{2017})(\sqrt{x} + \sqrt{2017} + 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{2017} \geq 0 \text{ vì } \sqrt{x} + \sqrt{2017} + 1 > 0 \forall x > 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 2017. \end{aligned}$$

- b) Ta có:

$$\begin{aligned} x = 4y + \sqrt{2xy} &\Leftrightarrow x - 2\sqrt{2xy} + \sqrt{2xy} - 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{2y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{2y}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 8y \text{ vì } \sqrt{x} + \sqrt{2y} > 0 \forall x, y > 0. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt[3]{xy} (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y})}{\sqrt{2xy}} = \frac{\sqrt[3]{8y^2} (3\sqrt[3]{8y} - 2\sqrt[3]{y})}{\sqrt{16y^2}} = \frac{8y}{4y} = 2.$$

□

Câu 2.

- a) Cho phương trình $x^2 + 2(2m-1)x - 3m = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $Q = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{x_1 + x_2}$ đạt giá trị nguyên.
- b) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a \neq 0$ và $2a + b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm các nghiệm đó khi biểu thức $T = (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

- a) Ta có $\Delta = (2m-1)^2 + 3m = 4m^2 - m + 1 = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \forall m$. Do đó với mọi m phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -4m + 2 \\ x_1 x_2 = -3m \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó } Q = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{x_1 + x_2} = \frac{-16m^2 + 10m - 4}{2m - 1} = -8m + 1 - \frac{3}{2m - 1}.$$

Vậy với $m \in \mathbb{Z}$ thì $Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2m - 1) | 3 \Leftrightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

- b) Ta có $\Delta = (2a + c)^2 - 4ac = 4a^2 + c^2 > 0$ vì $a \neq 0$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo định lý Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2a + c}{c} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

$$T = (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a} + 8 = \left(\frac{c}{a} + 1\right)^2 + 7 \geq 7.$$

Vậy T nhỏ nhất khi và chỉ khi $b = c = -a$, khi đó phương trình trở thành $x^2 - x - 1 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình $(x + 1)^3 = (x^4 + 3x^3)\sqrt{x + 3}$.

- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ 2x^6 - 1 = xy(2x^2y^2 - 3) \end{cases}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện $x \geq -3$.

$$\text{Ta có } (x + 1)^3 = (x^4 + 3x^3)\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow (x + 1)^3 = (x\sqrt{x + 3})^3 \Leftrightarrow x + 1 = x\sqrt{x + 3}.$$

$$\text{Bình phương hai vế suy ra: } x^2 + 2x + 1 = x^2(x + 3) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Thử lại ta chọn được hai nghiệm } x_1 = 1, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.$$

- b) Ta có

$$\begin{aligned} 2x^6 - 1 = xy(2x^2y^2 - 3) &\Leftrightarrow 2x^6 = 2xy(x^2y^2 - 1) - xy + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^6 = (xy - 1)(2x^2y^2 + 2xy - 1) \\ &\Leftrightarrow 2x^6 = (xy - 1)[3x^2y^2 - (xy - 1)^2] \\ &\Leftrightarrow 2x^6 = (-x^2 - y^2)[3x^2y^2 - (x^2 + y^2)^2] \text{ do } x^2 + y^2 + xy = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^6 = x^6 + y^6 \\ &\Leftrightarrow x^6 = y^6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}. \end{aligned}$$

Với $x = y$ ta có $3x^2 = 1$ nên hệ phương trình có hai nghiệm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Với $x = -y$ ta có $x^2 = 1$ nên hệ phương trình có hai nghiệm $(1; -1)$ và $(-1; 1)$.

□

Câu 4. Các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n} (n \geq 2)$ được sắp xếp theo thứ tự đó trên đường tròn (O) và chia đường tròn thành $2n$ cung tròn bằng nhau. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện $2 < k \leq n + 1$ ta đều có hai dây cung A_1A_k và A_2A_{k+n-1} vuông góc với nhau.

Lời giải.

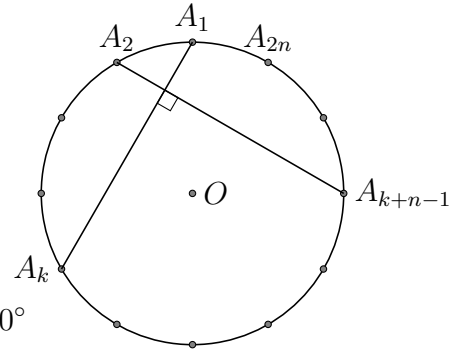
Ký hiệu $\widehat{AB}$ là số đo của cung nhỏ AB . Theo giả thiết bài ra ta có:

$$\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \dots = \widehat{A_{2n}A_1} = \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

Với $2 < k \leq N+1$, gọi B là giao điểm của A_1A_k và A_2A_{k+n-1} .

Khi đó ta có:

$$\widehat{A_1BA_2} = \frac{\widehat{A_1A_2} + \widehat{A_kA_{k+n-1}}}{2} = \frac{\left(\frac{180}{n}\right)^\circ + \left(\frac{180(n-1)}{n}\right)^\circ}{2} = 90^\circ$$



Từ đó suy ra A_1A_k luôn vuông góc với A_2A_{k+n-1} với mọi $2 < k \leq n+1$. □

Câu 5.

- a) Cho tam giác nhọn ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD . Hai đoạn thẳng BC và AD cắt nhau tại I . Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng CI , (M khác C và I). Đường thẳng qua M song song với CD cắt BD tại Q . Chứng minh rằng AM vuông góc với QK .
- b) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$, nội tiếp đường tròn tâm O và có trục tâm H . Đường thẳng AH cắt BC, CO tại D, E . Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và CEH tiếp xúc nhau.

Lời giải.

a)

Ta có $MQDK$ là hình bình hành (vì $MK \parallel BD$; $MQ \parallel CD$) nên MD và QK cắt nhau tại trung điểm E của mỗi đường và $KM = DQ$.

Tam giác DBC cân tại D , suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{CBD}$

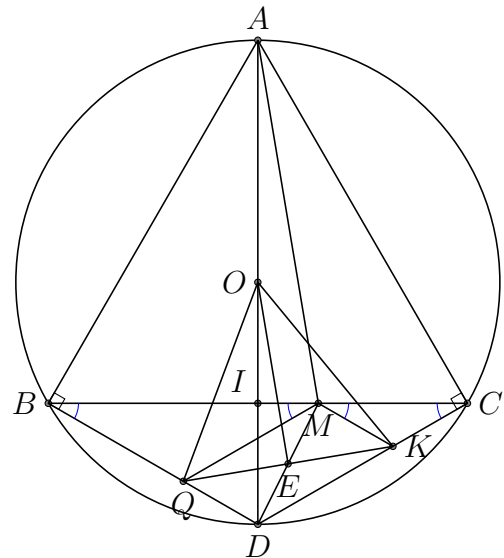
Ta có $MK \parallel BD$, suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CMK}$ (đồng vị). Từ đó suy ra $\widehat{KMC} = \widehat{MCK} \Rightarrow \triangle MKC$ cân tại K , do đó $KC = KM = DQ$. (1)

$\triangle ODC$ cân nên $\widehat{OCD} = \widehat{ODC}$, mà $\widehat{ODC} = \widehat{ODB} \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODB}$. (2)

Từ (1) và (2) và do $OD = OC$ nên ta có $\triangle OQD = \triangle OKC$, suy ra $OQ = OK \Rightarrow \triangle OQK$ cân tại $O \Rightarrow OE \perp QK$.

Mà OE là đường trung bình của tam giác ADM nên $AM \parallel OE \Rightarrow AM \perp QK$.

b)



Gọi F là chân đường cao hạ từ C của $\triangle ABC \Rightarrow$
 $\widehat{HCA} = 90^\circ - \widehat{BAC}$.
 Ta có $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ và do tam giác OBC cân
 tại O nên

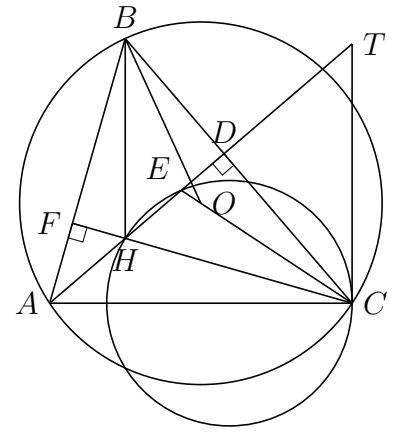
$$\widehat{BCO} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BOC}) = 90^\circ - \widehat{BAC}$$

Từ đó suy ra $\widehat{HCA} = \widehat{BCO}$.

Gọi CT là tiếp tuyến của đường tròn (ADC) (với
 T thuộc đường thẳng AD), suy ra $\widehat{TAC} = \widehat{DCT}$.

Mà $\widehat{THC} = \widehat{TAC} + \widehat{HCA}$ (góc ngoài $\triangle HAC$).

Lại có $\widehat{ECT} = \widehat{DCT} + \widehat{BCO} = \widehat{TAC} + \widehat{HCA} =$
 $\widehat{THC}$.



Bằng cách vẽ tiếp tuyến CT' của đường tròn (CEH) ta chứng minh được CT cũng là tiếp
 tuyến của đường tròn (CEH) . Do đó hai đường tròn (ACD) và (CEH) tiếp xúc nhau. $\square$

Câu 6. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $5^x \cdot 3^y + 1 = z(3z + 2)$.

Lời giải.

Ta có $5^x \cdot 3^y = (z + 1)(3z - 1)$, mà $3(z + 1) - (3z - 1) = 4 \Rightarrow (z + 1), (3z - 1)$ là 2 số nguyên dương
 lớn hơn 1 và không có ước chung lẻ khác 1.

Lại có $(3z - 1)$ không chia hết cho 3 nên ta có $3z - 1 = 5^x$ và $z + 1 = 3^y$ (do 3 và 5 là nguyên tố).

Khử z hai phương trình trên ta được: $3^{y+1} = 4 + 5^x$. (1)

Từ (1) suy ra 3^{y+1} chia 4 dư 1 (vì 5^x chia cho 4 dư 1). (2)

Nếu $y + 1$ là số lẻ thì $y = 2k$ (k nguyên dương), suy ra $3^{y+1} = 3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k$. Do đó 3^{y+1} chia cho 4
 dư 3. Điều này mâu thuẫn với (2) nên $y + 1$ phải là số chẵn, từ đó $y + 1 = 2h$ với h là số nguyên
 dương. Từ (1) ta có $(3^h - 2)(3^h + 2) = 5^x$. Mà $(3^h + 2) - (3^h - 2) = 4$ nên $(3^h - 2), (3^h + 2)$ không
 có ước chung lẻ khác 1.

Lại có $3^h + 2 > 3^h - 2 \geq 1$ nên $3^h - 2 = 1$ (do 5 là số nguyên tố). Từ đó suy ra $h = 1 \Rightarrow y = 1$.

Từ (1) suy ra $x = 1$ và $z = 2$. Vậy $(x, y, z) = (1, 1, 2)$. $\square$

———— HẾT ————

Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn Ninh Thuận

◆◆◆ NỘI DUNG

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}} \right)^2$
- b) Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $M = \frac{x^2+1}{x-1}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

- a) DK: $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2} \\ &= -x + \sqrt{x} \end{aligned}$$

- b) Ta có: $M = x + 1 + \frac{2}{x-1}$

$$M \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow x-1 \text{ là ước của } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ x-1 = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

□

Câu 2.

- a) Tìm m để đường thẳng (a) : $y = x + 2m$ cắt đường thẳng (b) : $y = 2x - 4$ tại một điểm trên trục hoành.
- b) Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m - 11 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1, một nghiệm lớn hơn 1.

Lời giải.

- 1) Đường thẳng (b) : $y = 2x - 4$ cắt trục hoành tại điểm $A(2; 0)$

Ycbt $\Leftrightarrow$ đường thẳng (a) : $y = x + 2m$ đi qua A , từ đó tìm được $m = -1$.

- 2) Ta có $\Delta' = m^2 + 12 > 0, \forall m$.

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, gọi hai nghiệm đó là x_1 và x_2 . Theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m - 11 \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 2$$

□

Câu 3. Trên quãng đường AB dài 60 km, người thứ nhất đi xe máy từ A đến B , người thứ hai đi xe đạp từ B đến A . Họ khởi hành cùng một lúc và gặp nhau tại C sau khi khởi hành được 1 giờ 20 phút. Từ C người thứ nhất đi tiếp đến B và người thứ hai đi tiếp đến A . Kết quả người

thứ nhất đến nơi sớm hơn người thứ hai là 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng trên suốt quãng đường cả hai người đều đi với vận tốc không đổi.

Lời giải.

Gọi vận tốc của người thứ nhất là x (km/h, $x > 0$).

Gọi vận tốc của người thứ hai là y (km/h, $y > 0$).

Đổi 1 giờ 20 phút $= \frac{4}{3}$ giờ.

Theo bài ra ta có : $\frac{4}{3}(x + y) = 60 \Leftrightarrow x + y = 45$ Mặt khác do người thứ nhất đến sớm hơn người thứ hai 2 giờ nên ta có phương trình : $\frac{60}{x} + 2 = \frac{60}{y}$ Từ đó giải ra được $x = 30, y = 15$.

Vậy vận tốc của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là : $x = 30(km/h), y = 15(km/h)$. $\square$

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo $AC > BD$. Kẻ $CH \perp AD, CK \perp AB$.

a) Chứng minh $\triangle CKH$ và $\triangle BCA$ đồng dạng.

b) Chứng minh $HK = AC \cdot \sin \widehat{BAD}$

c) Tính diện tích tứ giác $AKCH$ biết $\widehat{BAD} = 60^\circ, AB = 6cm, AD = 8cm$.

Lời giải.

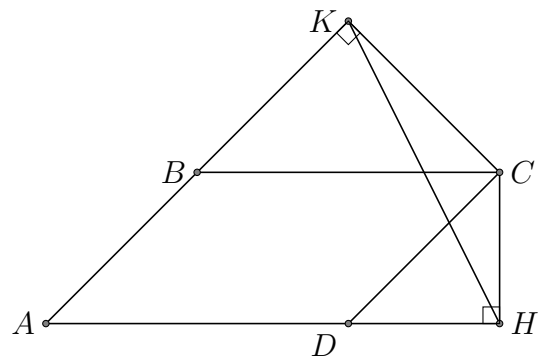
1)

Vì $\widehat{AKC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ nên tứ giác $AKCH$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{KHC}$ và $\widehat{CKH} = \widehat{CAH}$.

Mặt khác $\widehat{CAH} = \widehat{ACB}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{CKH} = \widehat{ACB}$ nên $\triangle CKH$ đồng dạng với $\triangle BCA$ (g-g).

2) Ta có $\sin \widehat{BAD} = \sin \widehat{KBC} = \frac{KC}{BC}$. Mà $\triangle CKH$ đồng dạng $\triangle BCA \Rightarrow \frac{CK}{BC} = \frac{HK}{AC}$ nên $\frac{HK}{AC} = \sin \widehat{BAD} \Rightarrow HK = AC \cdot \sin \widehat{BAD}$



3) Trong tam giác KBC vuông tại K có $\widehat{KBC} = 60^\circ$ và $BC = 8cm$ nên $KC = 4\sqrt{3}cm, BK = 4cm$.

Trong tam giác CHD vuông tại H có $\widehat{CDH} = 60^\circ$ và $DC = 6cm$ nên $CH = 3\sqrt{3}cm, HD = 3cm$. $\Rightarrow S_{\triangle ACK} = \frac{1}{2}AK \cdot CK = 20\sqrt{3}(cm^2) \Rightarrow S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2}AH \cdot CH = \frac{33\sqrt{3}}{2}(cm^2)$

Vậy $S_{AKCH} = \frac{73\sqrt{3}}{2}(cm^2)$. $\square$

Câu 5. Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 - x + \frac{1}{x} + 2013$

Lời giải.

Ta có $A = x^2 - x + \frac{1}{x} + 2013 = (x - 1)^2 + (x + \frac{1}{x}) + 2012 \Rightarrow A \geq 0 + 2 + 2012 = 2014$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

Vậy $A_{\min} = 2014$ khi $x = 1$ $\square$

———— HẾT ————

86

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, QUẢNG TRỊ

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3 + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Câu 2. Cho biểu thức $P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{1}{x+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P trong các trường hợp sau.

- a) x, y là các số thực dương.
- b) x, y là các số nguyên dương.

Lời giải.

- a) Ta có: $\frac{x^2}{y} + y \geq 2x$ suy ra $\frac{x^2}{y} \geq 2x - y$. Từ đó ta có $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$ hay $P \geq x + y + \frac{1}{x+y} \geq 2$.
Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$.
- b) Từ giả thiết ta có $x + y \geq 2$. Vậy $P \geq x + y + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4}(x+y) + \frac{1}{x+y} + \frac{3}{4}(x+y) \geq \frac{5}{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình $2\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = 5$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 + 1 = 3xy \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 5 \end{cases}$.

Lời giải.

- a) Đặt $t = \sqrt{2+x}$, ta được phương trình theo t : $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$. Đối chiếu điều kiện thấy $t = 1$ thỏa mãn, do đó $t = 1 \Leftrightarrow x = -1$.
- b) Ta có: $x^3 + y^3 + 1 = 3xy \Leftrightarrow (x+y+1)[(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x=y=1 \end{cases}$.
+ Rõ ràng $x = y = 1$ là một nghiệm của hệ.
+ Với $x+y+1=0$ ta có $y = -x-1$ thay vào phương trình còn lại ta được $x^2 + 2x - 3 = 0$.
Giải ra ta được $x = 1$ và $x = -3$.
Vậy hệ có 3 nghiệm $(1; 1)$, $(1; -2)$, $(-3; 2)$.

□

Câu 4.

- a) Tìm chữ số tận cùng của $a = 2017^{64}$.
 b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $7(x + y) = 3(x^2 + xy + y^2)$.

Lời giải.

- a) $2017^{64} \equiv 7^{64} \equiv 3^{64} \equiv 81^{4 \cdot 81} \equiv 1 \pmod{10}$.
 b) $7(x + y) = 3(x^2 + xy + y^2) \Rightarrow 3 \mid x + y$. Từ giả thiết suy ra $0 \leq x + y \leq 3$ do đó $x + y = 0$ hoặc $x + y = 3$.
 + Với $x + y = 0$ ta được $x = y = 0$.
 + Với $x + y = 3$ suy ra $y = 3 - x$ thay vào phương trình ta được $x^2 - 3x + 2 = 0$. Giải ra ta được $x = 1, x = 2$.
 Vậy ta được 3 nghiệm nguyên $(0; 0), (1; 2), (2; 1)$.

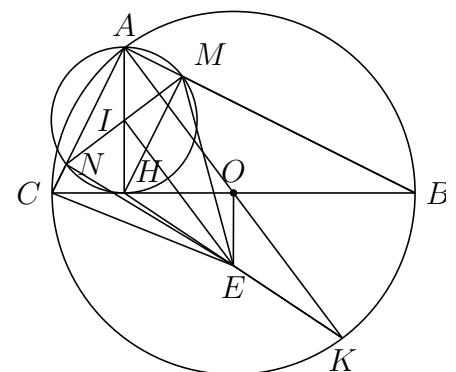
□

Câu 5. Cho đường tròn tâm O , đường kính BC . Gọi A là điểm thuộc đường tròn (A khác B, C), H là hình chiếu của A lên BC . Vẽ đường tròn (I) đường kính AH cắt AB và AC lần lượt tại M và N .

- a) Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp.
 b) Vẽ đường kính AK của đường tròn (O) , gọi E là trung điểm của HK . Chứng minh rằng $EM = EN$.

Lời giải.

- a) $\angle ANM = \angle AHM = \angle ABH = \angle ABC$, nên tứ giác $BMNC$ nội tiếp được.
 b) EO là đường trung bình của tam giác KHA nên $EO \parallel HA$. Suy ra $EO \perp BC$.
 $\angle OAB + \angle NMA = \angle OBA + \angle ACB = 90^\circ$, nên $MN \perp AO$.
 Suy ra $MN \perp IE$.
 Từ đó, $EM^2 = EI^2 + IM^2 = OA^2 + IA^2 = OB^2 + OE^2 = EB^2$, hay $EM = EB$. Tương tự ta cũng có $EN = EB$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

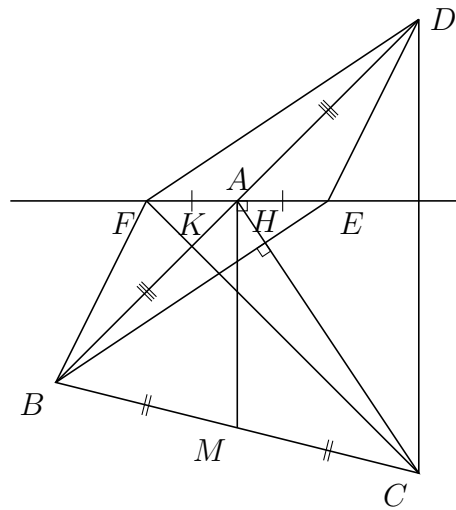


□

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Gọi M là trung điểm của BC , kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$), đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt BH tại E , gọi F là điểm đối xứng với E qua A , K là giao điểm của CF và AB . Chứng minh rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK .

Lời giải.

Lấy D đối xứng với B qua A . Dễ thấy $BEDF$ là hình bình hành. Suy ra $CA \perp FD$. Cũng dễ thấy $CD \parallel MA$ nên $FA \perp CD$. Do đó, A là trực tâm tam giác FCD . Suy ra $DA \perp CF$. Từ đó, $MK = MB = MC = MH$, ta có điều phải chứng minh.



□

———— HẾT ————

87 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VÙNG TÀU VÒNG 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Giải phương trình $x^2 - 7x - 8 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$.
- c) Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{2}\sqrt{48} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$.

Lời giải.

- a) Ta có $a = 1$, $b = -7$ và $c = -8$. Vì $a - b + c = 1 - (-7) - 8 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-8}{1} = 8$.

Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = 8$.

- b) Ta có $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 3x + 9y = -15 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -11y = 22 \\ x = -5 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -5 - 3(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -2)$.

- c) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sqrt{48} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2^4 \cdot 3} + |2 - \sqrt{3}| - \sqrt{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2. \end{aligned}$$

□

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d) : y = mx - m + 2$ (m là tham số).

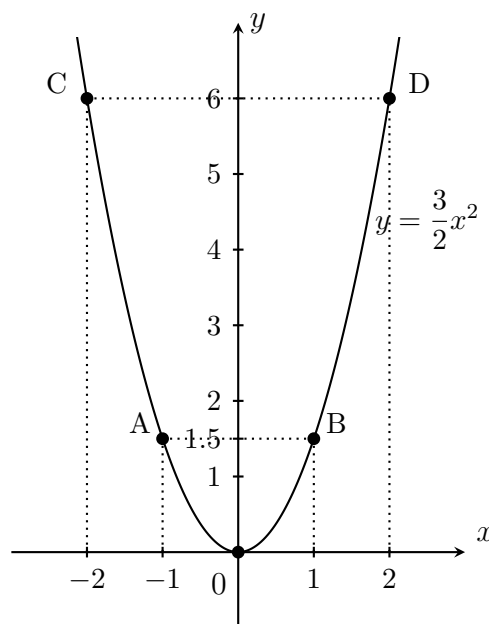
- a) Vẽ (P) .
- b) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .

Lời giải.

a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

Trên mặt phẳng tọa độ lấy các điểm $O(0;0)$, $A\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $C(-2;6)$ và $D(2;6)$. Parabol cần vẽ là đường cong đi qua năm điểm O , A , B , C , D .



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$\frac{3}{2}x^2 = mx - m + 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - mx + m - 2 = 0 \quad (1).$$

Ta có $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot (m - 2) = m^2 - 6m + 12 = m^2 - 2 \cdot m \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 12 = (m - 3)^2 + 3$.

Vì $(m - 3)^2 \geq 0$ với mọi m nên $(m - 3)^2 + 3 > 0$ với mọi m . Do đó $\Delta > 0$ với mọi m hay phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m . □

Câu 3.

a) Cho phương trình $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 2m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 4$.

b) Giải phương trình $\sqrt{(x+1)^4 + 3} = x^2 + 2x + 2$.

Lời giải.

a) Phương trình $x^2 - (2m - 1)x + m^2 - 2m - 1 = 0$ (1).

$$\text{Xét } \Delta = [-(2m - 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 2m - 1) = 4m + 5.$$

$$\text{Phương trình (1) có hai nghiệm } x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét, } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1x_2 = m^2 - 2m - 1 \end{cases}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 4 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 4 \\ &\Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 3(m^2 - 2m - 1) = 4 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \text{ (loại)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

- b) Dễ thấy $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x . Bình phương hai vế của phương trình, ta có:

$$(x + 1)^4 + 3 = [(x + 1)^2 + 1]^2 \Leftrightarrow (x + 1)^4 + 3 = (x + 1)^4 + 2(x + 1)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

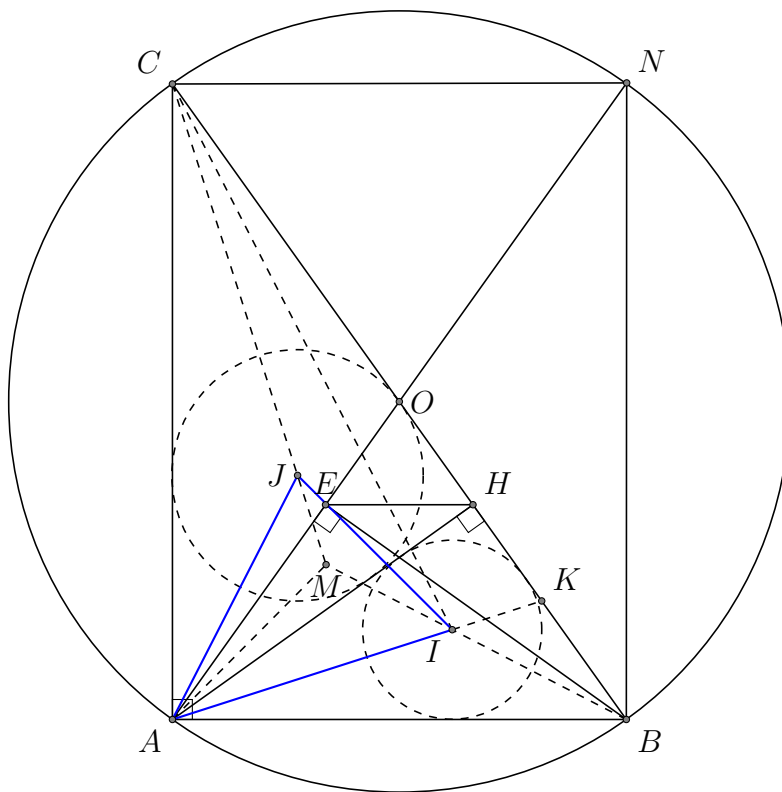
Vậy $x = 0; x = -2$ là nghiệm của phương trình.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ AH vuông góc với BC tại H ; AO cắt (O) tại N khác A . Gọi E là hình chiếu của B trên đường thẳng AN .

- Chứng minh tứ giác $AEHB$ nội tiếp.
- Chứng minh $BH \cdot AN = AB \cdot NC$.
- Chứng minh HE song song với CN .
- Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC ; BI cắt CJ tại M . Chứng minh AM vuông góc với IJ .

Lời giải.



a) Vì $\widehat{AEB} = \widehat{BHA} = 90^\circ$ (giả thiết) nên E và H cùng nhìn cung $\widehat{AB}$ dưới một góc 90° . Do đó E và H cùng nằm trên đường tròn đường kính AB . Vậy bốn điểm E, H, A, B cùng nằm trên một đường tròn hay tứ giác $AEHB$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{ACN}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O nên $\widehat{ACN} = 90^\circ$. Do đó tam giác ACN là tam giác vuông tại C .

Xét hai tam giác vuông ACN và AHB , ta có

$$\widehat{ACN} = \widehat{AHB} = 90^\circ.$$

$$\widehat{ANC} = \widehat{ABH} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{AC} \text{)}.$$

Nên $\triangle ACN \sim \triangle AHB$. Do đó $\frac{AN}{AB} = \frac{NC}{BH}$ hay $BH \cdot AN = AB \cdot NC$.

c) Vì tứ giác $ABNC$ là hình chữ nhật ($\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{N} = 90^\circ$) nên $CN \parallel AB$ (1).

Vì tứ giác $AEHB$ nội tiếp nên $\widehat{BAH} = \widehat{BEH}$. Mà $\widehat{BAH} = \widehat{NAC}$ (vì $\triangle ACN \sim \triangle AHB$) nên $\widehat{BEH} = \widehat{NAC}$ (2).

Xét tam giác ABE vuông tại E , ta có $\widehat{ABE} + \widehat{BAE} = 90^\circ$. Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có $\widehat{NAC} + \widehat{BAE} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{ABE} = \widehat{NAC}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{BEH} = \widehat{ABE}$, hay $HE \parallel AB$ (hai góc bằng nhau ở vị trí so le trong) (4).

Từ (1) và (4) suy ra $HE \parallel CN$.

d) Kéo dài AI cắt BC tại K . Xét tam giác AKB có góc $\widehat{AKC}$ là góc ngoài nên ta có:

$$\widehat{AKC} = \widehat{KAB} + \widehat{HBA} = \frac{\widehat{HAB}}{2} + \widehat{HBA}.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{CAK} = \widehat{CAH} + \widehat{HAK} = \widehat{HBA} + \frac{\widehat{HAB}}{2}.$$

Do đó $\widehat{AKC} = \widehat{CAK}$ hay tam giác ACK cân tại C .

Mà CM là phân giác góc $\widehat{ACK}$ nên CM cũng là đường cao của tam giác ACK . Do đó $CM \perp AI$.

Chứng minh tương tự, ta có $BM \perp AJ$. Nên M là trực tâm của tam giác AIJ . Vậy $AM \perp IJ$.

□

Câu 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Lời giải.

Với mọi $a, b, c > 0$ ta chứng minh bất đẳng thức:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) \quad (*).$$

Ta có: $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = (a^3 + ab^2) + (b^3 + bc^2) + (c^3 + ca^2) + a^2b + b^2c + c^2a$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases} a^3 + ab^2 \geq 2a^2b \\ b^3 + bc^2 \geq 2b^2c \\ c^3 + ca^2 \geq 2c^2a \end{cases}$$

Suy ra $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a + a^2b + b^2c + c^2a = 3(a^2b + b^2c + c^2a)$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. Vậy bất đẳng thức (*) đã được chứng minh.

Khi đó từ bất đẳng thức (*), ta có

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Hơn nữa, $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1} \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Do đó

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{(a+b+c)^2}{9} \\ &= -\frac{1}{9} \left[(a+b+c)^2 - 2(a+b+c) \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \right] \\ &= -\frac{1}{9} \left(a+b+c - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c = \frac{1}{2}.$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $a=b=c = \frac{1}{2}.$

□

———— HẾT ————

88 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN VÙNG TÀU V2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-1}$ với $a > 0; a \neq 1$.
- b) Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-3} = 3x-6$.
- c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 3x + 2y = 5xy \end{cases}$.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{4\sqrt{a} + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}} \\ &= 4 + 4(a-1) = 4a. \end{aligned}$$

- b) Điều kiện: $x \geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-2)(\sqrt{x-3}-3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x-3}-3=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-3} &= 3 \Leftrightarrow x-3=9 \Leftrightarrow x=12. \end{aligned}$$

- c) Phương trình đầu của hệ tương đương với

$$x^2 - y^2 + xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-2y \end{cases}.$$

TH1. $x = y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$3y + 2y = 5y^2 \Leftrightarrow 5y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=0, \\ y=1 \Rightarrow x=1. \end{cases}$$

TH2. $x = -2y$. Thay vào phương trình thứ 2 của hệ, ta được

$$-6y + 2y = -10y^2 \Leftrightarrow 10y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow 2y(5y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=0, \\ y=\frac{2}{5} \Rightarrow x=-\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Vậy hệ có các nghiệm $(0;0), (1;1), \left(\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

□

Câu 2.

- a) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Biết $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng $\frac{5a+b+3c}{a-b+c} > 1$.
- b) Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $A = n^4 + 4n^{p-1}$ là số chính phương.

Lời giải.

- a) Ta có $P(-1) = a - b + c > 0$, nên BĐT cần chứng minh tương đương với $5a + b + 3c > a - b + c \Leftrightarrow 4a + 2b + 2c > 0$.

Mà $P(2) = 4a + 2b + c$, $P(0) = c$ nên $4a + 2b + 2c = P(2) + P(0) > 0$.

b) Với $n = 0, 1$, dễ thấy A không phải là số chính phương. Do đó $n \geq 2 \Rightarrow 2n^2 + 1 > 4n$.

- Nếu $p = 2$, thì $A = n^4 + 4n$. Và từ $(n^2)^2 < n^4 + 4n < (n^2 + 1)^2$, ta suy ra A không phải là số chính phương.
- Nếu $p = 3$, giả sử $A = n^4 + 4n^2$ là số chính phương. Do $(n^2)^2 < n^4 + 4n^2 < (n^2 + 2)^2$ nên $n^4 + 4n^2 = (n^2 + 1)^2 \Rightarrow 2n^2 = 1$ (vô lí). Vậy A không phải là số chính phương.
- Với $p \geq 5$. Giả sử $A = n^4 + 4n^{p-1} = n^4(1 + 4n^{p-5})$ là số chính phương.
 $\Rightarrow 1 + 4n^{p-5} = m^2 (m \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 1 = \left(m - 2n^{\frac{p-5}{2}}\right) \left(m + 2n^{\frac{p-5}{2}}\right) \Rightarrow 2n^{\frac{p-5}{2}} = 0$ (vô lí)
 $\Rightarrow A$ không phải là số chính phương.
 Vậy không tồn tại n để A là số chính phương. □

Câu 3. Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

Lời giải.

Áp dụng BĐT $\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq x + y$, ta suy ra

$$P \geq \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{1}{4} \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{3}{4} \frac{x^2 + y^2}{xy} + 2 \geq 1 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{2}.$$

Vậy, GTNN của P bằng $\frac{9}{2}$, đạt được khi $x = y$. □

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tia AI cắt (O) tại J khác A . Đường thẳng JO cắt BC tại E , và cắt (O) tại K khác J .

- Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và $JE \cdot JK = JI^2$.
- Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S . Chứng minh rằng $SJ \cdot EK = SK \cdot EJ$.
- Đường thẳng SA cắt (O) tại D khác A , đường thẳng DI cắt (O) tại M khác D . Chứng minh rằng JM đi qua trung điểm của đoạn thẳng IE .

Lời giải.

a) Dễ thấy J là điểm chính giữa của cung BC nên E là trung điểm của BC , và JK chính là một đường kính của đường tròn (O) .

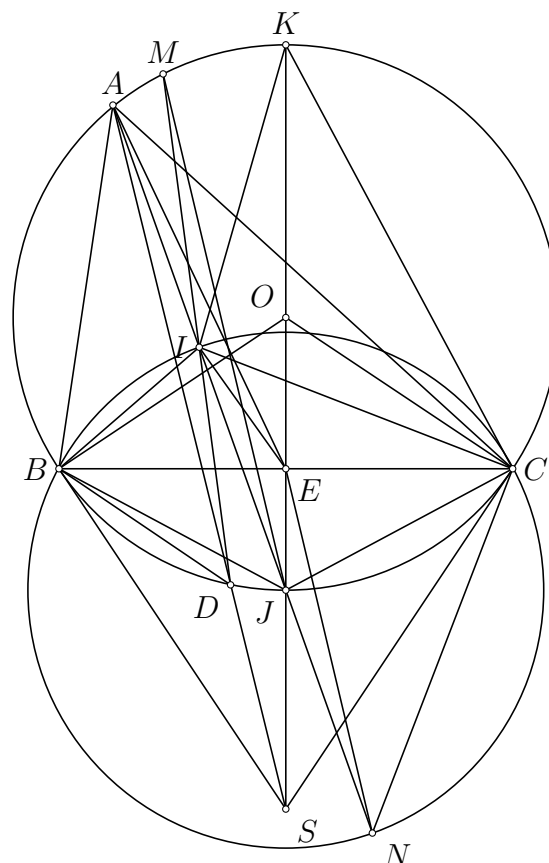
Trong tam giác AIB , góc $\angle BIJ$ là góc ngoài đỉnh I nên $\angle BIJ = \angle BAI + \angle ABI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

Lại có $\angle IBJ = \angle IBC + \angle CBJ = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

Nên tam giác JIB cân tại J , hay $JI = JB$. Chứng minh tương tự ta cũng có $JI = JC$. Do đó, J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC .

Từ đó, áp dụng thêm hệ thức lượng trong tam giác vuông JCK , ta dễ dàng thu được $JI^2 = JC^2 = JE \cdot JK$.

b) Do SO là đường trung trực của BC nên S nằm trên đường thẳng JK . Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{SJ}{SK} = \frac{EJ}{EK}$. Mà $\frac{SJ}{SK} = \frac{SJ}{SC} \cdot \frac{SC}{SK} = \left(\frac{CJ}{CK}\right)^2 = \frac{JC^2}{KC^2} = \frac{JE \cdot JK}{KE \cdot KJ} = \frac{EJ}{EK}$, nên ta có điều cần chứng minh.



c) Trước hết, ta có $SE \cdot SO = SD \cdot SA (= SB^2)$ suy ra tứ giác $AOED$ nội tiếp. Nên $\angle DAE = \angle DOE = \angle DOJ = 2\angle DAJ$. Dẫn đến AJ là phân giác của góc $\angle EAS$, hay $\angle BAD = \angle EAC$. Từ đây, cùng với $\angle ADB = \angle ACE (= \angle ACB)$, ta suy ra các tam giác ABD và ACE đồng dạng với nhau. Dẫn đến $AE \cdot AD = AB \cdot AC$. (1)

Gọi N là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC . Dễ thấy hai tam giác AIB và ACN đồng dạng với nhau, nên $AI \cdot AN = AB \cdot AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE \cdot AD = AI \cdot AN$. Cùng với $\angle DAI = \angle NAE$, ta suy ra các tam giác AID và AEN đồng dạng với nhau. Suy ra $\angle ENA = \angle IDA = \angle MDA = \angle MJA$. Hay EN song song với JM . Mà rõ ràng J là trung điểm của IN , nên MJ cũng đi qua trung điểm của IE . $\square$

Câu 5. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; AF cắt DE tại P ; BF cắt CE tại Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{FA}{FP} + \frac{FB}{FQ} + \frac{ED}{EP} + \frac{EC}{EQ}.$$

Lời giải.

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

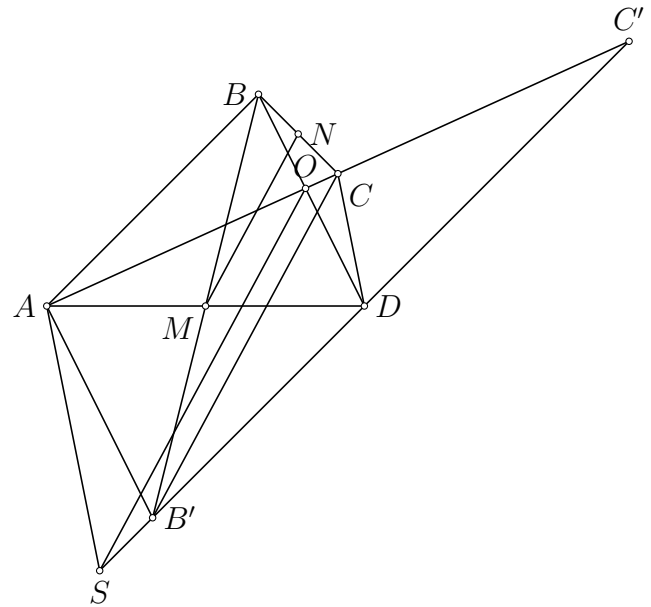
Bổ đề. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Đường thẳng qua A và song song với CD cắt đường thẳng qua D và song song với AB tại S . Khi đó SO song song (hoặc trùng) với MN .

Chứng minh. Gọi B' đối xứng với B qua M . Khi đó MN song song với $B'C$. Ta chứng minh SO cũng song song với $B'C$.

Thật vậy, gọi C' là giao của AC và SD . Để ý rằng tứ giác $ABDB'$ là hình bình hành, nên

$$\frac{C'B'}{C'S} = \frac{C'B'}{C'A} \cdot \frac{C'A}{C'S} = \frac{C'D}{C'O} \cdot \frac{C'C}{C'D} = \frac{C'C}{C'O}.$$

Ta có điều cần chứng minh.



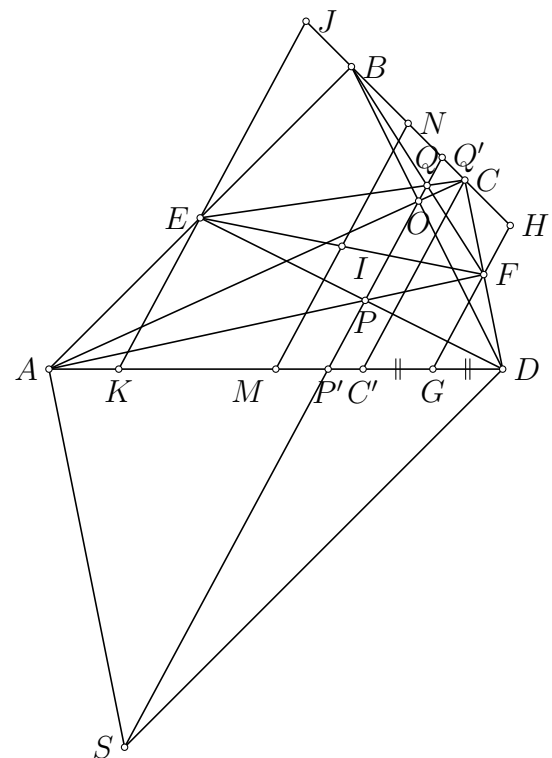
Trở lại bài toán.

Áp dụng bổ đề trên với các tứ giác $ABCD$ và $AEFD$, ta suy ra S, O, P thẳng hàng, suy ra OP song song với MN . Tương tự, ta cũng có OQ song song với MN . Do đó, O, P, Q thẳng hàng và $PQ \parallel MN$.

Gọi I là giao điểm của FE và MN , P', Q' là giao điểm của PQ với AD, BC . Qua F , kẻ đường thẳng song song với PQ , cắt đoạn AD tại G và cắt tia đối của tia CB tại H . Các điểm J, K được định nghĩa tương tự (xem hình vẽ).

Theo trên, IM là đường trung bình của hình thang $EFGK$ nên M là trung điểm của KG . Suy ra $GA = KD$.

Áp dụng định lý Thales và BĐT Cauchy-Schwartz, ta thu được



$$\frac{FA}{FP} + \frac{ED}{EP} = \frac{GA}{GP'} + \frac{KD}{KP'} = DK \left(\frac{1}{GP'} + \frac{1}{KP'} \right) \geq DK \cdot \frac{4}{GP' + KP'} = 4 \frac{DK}{GK}.$$

Tương tự, ta cũng thu được $\frac{FB}{FQ} + \frac{EC}{EQ} \geq 4 \frac{CJ}{HJ}$. Suy ra $T \geq 4 \left(\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} \right)$.

Cuối cùng, ta chứng minh $\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} = 2$, và do đó, GTNN của T bằng 8.

Thật vậy, gọi C' là điểm trên AD sao cho CC' song song với HG . Khi đó, do F là trung điểm CD nên G là trung điểm $C'D$. Do đó $\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} = \frac{DK}{GK} + \frac{C'K}{GK} = \frac{KD + KC'}{KG} = 2$.

□

————— HẾT —————

89 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH, ĐỒNG NAI

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{a + \sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a} + 1} + \frac{1}{a + 1} \right) : \frac{\sqrt{a} - 1}{a + 1}, \text{ với } a \geq 0, a \neq 1.$$

- a) Rút gọn biểu thức P .
b) Tìm các số tự nhiên a khác 1 sao cho P nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a + \sqrt{a}}{a\sqrt{a} + a + \sqrt{a} + 1} + \frac{1}{a + 1} &= \frac{a + \sqrt{a}}{a(\sqrt{a} + 1) + (\sqrt{a} + 1)} + \frac{1}{a + 1} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} + 1)(a + 1)} + \frac{1}{a + 1} \\ &= \frac{\sqrt{a} + 1}{a + 1}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$P = \frac{\sqrt{a} + 1}{a + 1} \cdot \frac{a + 1}{\sqrt{a} - 1} = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}.$$

- b) Ta có $P = 1 + \frac{2}{\sqrt{a} - 1}$. Vì P là số nguyên nên $\sqrt{a} - 1$ là số hữu tỉ, mà $a \in \mathbb{N}$ nên $\sqrt{a} - 1$ là số nguyên. Từ đó suy ra $(\sqrt{a} - 1) | 2$. Từ đây ta tìm được $a \in \{0; 4; 9\}$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$.

- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + x + 4y = 2 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases}.$$

Lời giải.

- a) Phương trình tương đương với

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24.$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$, ta có phương trình

$$t(t + 2) = 24 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0.$$

Giải phương trình này ta được các nghiệm $t = -6, t = 4$.

Với $t = 4$ ta được $x = 0, x = -5$. Với $t = -6$ ta thấy phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0, x = -5$.

- b) Ta viết phương trình thứ nhất của hệ như sau

$$x^2 + x - 2 - 4xy + 4t = 0 \text{ hay } (x - 1)(x + 2) - 4y(x - 1) = 0$$

Suy ra $(x - 1)(x + 2 - 4y) = 0$, dẫn tới $x = 1$ hoặc $x = 4y - 2$.

Với $x = 1$ thay vào phương trình thứ hai ta có $y = \pm 2$.

Với $x = 4y - 2$ thay vào phương trình thứ hai ta được

$$15y^2 - 16y + 7 = 0.$$

Ta thấy phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; \pm 2)$.

□

Câu 3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 5 = 0$. Lập phương trình bậc hai nhận $2x_1 + x_2$ và $x_1 + 2x_2$ làm nghiệm.

Lời giải.

Để thấy phương trình $x^2 - x - 5 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Theo định lí Vi - ét ta có $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = -5$.

Ta có

$$(2x_1 + x_2) + (x_1 + 2x_2) = 3(x_1 + x_2) = 3$$

$$(2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) = 2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 5x_1x_2 = -3.$$

Suy ra phương trình bậc hai cần tìm là $x^2 - 3x - 3 = 0$.

□

Câu 4.

a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 8y + 7 = 0$.

b) Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$ab(b^2 + bc + ca) + bc(c^2 + ca + ab) + ca(a^2 + ab + bc) \leq (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Lời giải.

a) Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$x^2 - 2(y + 2)x + 2y^2 + 8y + 7 = 0. \quad (1)$$

Vì (1) có nghiệm nguyên x nên $\Delta' = -y^2 - 4y - 3$ là số chính phương.

Ta có $-y^2 - 4y - 3 \geq 0$ khi $-3 \leq y \leq -1$, mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-3; -2; -1\}$.

Từ đây ta tìm được các cặp nghiệm là $(x; y) \in \{(-1; -3), (\pm 1; -2), (1; -1)\}$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2abc(a + b + c) \leq ab(a^2 + c^2) + bc(b^2 + a^2) + ca(b^2 + c^2). \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số thực không âm ta được

$$VP(2) \geq ab \cdot 2ac + bc \cdot 2ba + ca \cdot 2bc = 2abc(a + b + c) = VT(2).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

□

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có các đỉnh A, B, C, D, E đều là điểm nguyên (có hoành độ và tung độ là các số nguyên). Chứng minh rằng có ít nhất một điểm nguyên M nằm bên trong hoặc thuộc cạnh của ngũ giác đã cho, với M khác các đỉnh ngũ giác đã cho.

Lời giải.

Khi xét tính chẵn lẻ các tọa độ thì ta chỉ có 4 trạng thái sau:

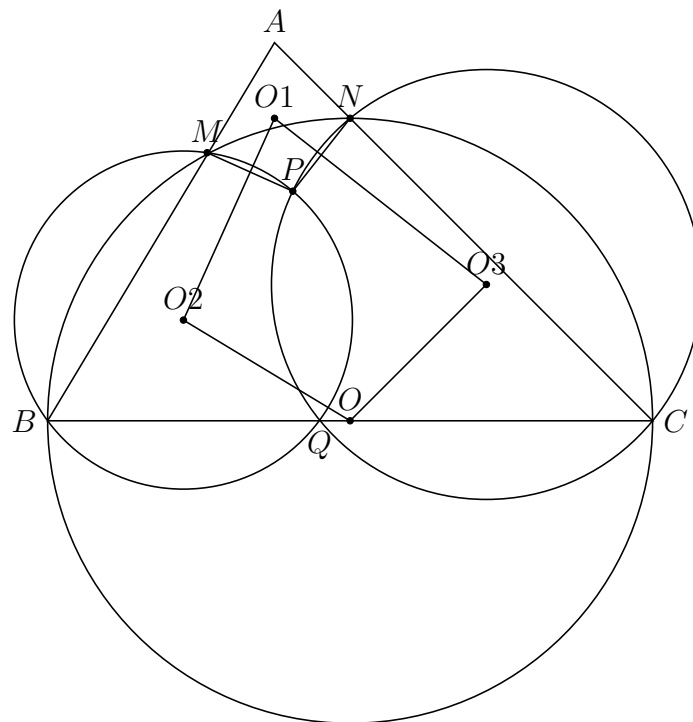
$$(C; C), (C; L), (L; L), (L; C).$$

Mà ta có 5 điểm nên có ít nhất hai điểm có cùng trạng thái. Khi đó trung điểm M của đoạn nối hai điểm có cùng trạng thái sẽ có tọa độ nguyên. Dễ thấy M nằm trong hoặc nằm trên cạnh của ngũ giác và không trùng với đỉnh của ngũ giác. Từ đó, ta có đpcm. $\square$

Câu 6. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn tâm O , đường kính BC cắt hai cạnh AB , AC tại hai điểm M , N với $M \neq B$, $N \neq C$. Hai tia phân giác của hai góc $\widehat{CAB}$ và $\widehat{OMN}$ cắt nhau tại điểm P .

- Chứng minh rằng $\widehat{OMN} = \widehat{CAB}$ và tứ giác $AMPN$ nội tiếp một đường tròn.
- Gọi Q là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMP và CNP với Q khác P . Chứng minh rằng B , Q , C thẳng hàng.
- Gọi O_1 , O_2 , O_3 là tâm của ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác AMN , BMP , CNP . Chứng minh rằng bốn điểm O , O_1 , O_2 , O_3 cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



- Vì tứ giác $BMNC$ nội tiếp nên $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$. Mặt khác $\triangle BOM$ cân tại O nên $\widehat{OMB} = \widehat{OBM}$.
Mà $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$, $\widehat{OMN} + \widehat{AMN} + \widehat{OMB} = 180^\circ$. Nên suy ra $\widehat{OMN} = \widehat{BAC}$.
Ta có $\widehat{NAP} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, $\widehat{NMP} = \frac{1}{2}\widehat{OMN}$, mà $\widehat{BAC} = \widehat{OMN}$ nên $\widehat{NMP} = \widehat{NAP}$, hay tứ giác $AMPN$ nội tiếp.

- Vì các tứ giác $AMPN$, $BMPQ$, $CNPQ$ là các tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{PQB} + \widehat{PQC} = \widehat{AMP} + \widehat{ANP} = 180^\circ.$$

Suy ra B , Q , C thẳng hàng.

- Ta có

$$\widehat{MPQ} + \widehat{APM} = \widehat{MPQ} + \widehat{ANM} = \widehat{MPQ} + \widehat{MBQ} = 180^\circ,$$

suy ra A, P, Q thẳng hàng. Ta có $O_1O_2 \perp PM$ và $O_1O_3 \perp PN$ nên

$$\widehat{O_2O_1O_3} + \widehat{MPN} = 180^\circ,$$

hay

$$\widehat{O_2O_1O_3} = \widehat{BAC}. \quad (1)$$

Mặt khác $OO_2 \perp AB$, $OO_3 \perp AC$ nên

$$\begin{aligned} \widehat{O_2OO_3} &= 180^\circ - (\widehat{O_2OB} + \widehat{O_3OC}) = 180^\circ - (90^\circ - \widehat{B} + 90^\circ - \widehat{C}) \\ &= \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{APM} + \widehat{APN} = \widehat{MPN}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\widehat{O_2O_1O_3} + \widehat{O_2OO_3} = \widehat{BAC} + \widehat{MPN} = 180^\circ,$$

hay bốn điểm O, O_1, O_2, O_3 nằm trên một đường tròn. Bài toán được chứng minh. □

————— **HẾT** —————

90 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỰ, NINH BÌNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho $P = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} + \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} + \frac{5\sqrt{a}+2}{4-a}$ ($a \geq 0, a \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tính giá trị biểu thức P khi $a = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$.

Lời giải.

a) $P = \frac{3a - 6\sqrt{a} + a + 3\sqrt{a} + 2 - 5\sqrt{a} - 2}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} = \frac{4a - 8\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} = \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}.$

b) Đặt $b = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}}$ và $c = \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$. Ta có $a^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$. Chú ý $b^3 + c^3 = 2$ và $bc = -\frac{1}{3}$, ta suy ra $a^3 = 2 - a$ hay $(a-1)(a^2 + a + 2) = 0$. Do đó $a = 1$. Thay vào biểu thức rút gọn của P ta được $P = \frac{4}{3}$ khi $a = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$. □

Câu 2.

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x^2+3x-4} + 1) = 5$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 + y & (1) \\ x^2 = y^2 + 3 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x \geq 1$. Đặt $u = \sqrt{x+4} > 0$ và $v = \sqrt{x-1} \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{cases} (u-v)(uv+1) = 5 & (1) \\ u^2 - v^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) với chú ý $u > v$ ta được $uv + 1 = u + v$ hay $u = 1$ hoặc $v = 1$. Tuy nhiên từ (2), ta thấy $u^2 > 5 > 1$ nên $v = 1$. Thay vào (2) ta được $u = \sqrt{6}$. Do đó ta có

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} = \sqrt{6} \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2\}$.

b) Dễ thấy với $y = 0$ khi và chỉ khi $x^2 - 3 = 0$ hay $x = \pm\sqrt{3}$. Xét $y \neq 0$. Thay $x^2 - 3 = y^2$ vào (1) ta được $xy = y^2 + 1$ hay $x - y = \frac{1}{y}$ (3). Thay (3) vào (2) với chú ý (2) tương đương

$(x-y)(x+y) = 3$, ta được $x = 2y$. Kết hợp (3) ta được $y = \pm 1$. Do đó $x = \pm 2$.

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm $(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(2; 1)$ và $(-2; -1)$. □

Câu 3.

a) Cho các số hữu tỉ a, b, c thoả mãn $ab + bc + ca = 2017$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a^2 + 2017)(b^2 + 2017)(c^2 + 2017)}$$

là một số hữu tỉ.

b) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình $7x^2 + 3y^2 = 714$.

Lời giải.

a) Ta có $a^2 + 2017 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$. Tương tự $b^2 + 2017 = (b + c)(b + a)$ và $c^2 + 2017 = (c + a)(c + b)$. Từ đó

$$\sqrt{(a^2 + 2017)(b^2 + 2017)(c^2 + 2017)} = \sqrt{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2} = |a + b||b + c||c + a|$$

là một số hữu tỉ.

b) Giả sử x và y là hai số nguyên dương thỏa mãn đề bài. Do $7 \mid 714$ và $7 \mid 7x^2$ nên $7 \mid 3y^2$. Chú ý $(3, 7) = 1$ nên $7 \mid y^2$ hay $7 \mid y$. Lại có $3y^2 < 714$ nên $y \leq 15$. Do đó $y = 7$ hoặc $y = 14$.

Nếu $y = 7$ thì $7x^2 = 714 - 3 \cdot 7^2 = 567$, suy ra $x = 9$.

Nếu $y = 14$ thì $7x^2 = 714 - 3 \cdot 14^2 = 126$, suy ra $x^2 = 18$ (vô lí).

Vậy có duy nhất một cặp số thỏa mãn bài toán là $(x; y) = (9; 7)$.

□

Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B (O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O) và (O') tại C và D . Qua A kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt (O) và (O') tại M và N (M, N khác A). Các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E . Gọi P và Q lần lượt là giao của hai đường thẳng MN với đường thẳng BC và đường thẳng BD . Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng AE vuông góc đường thẳng CD .

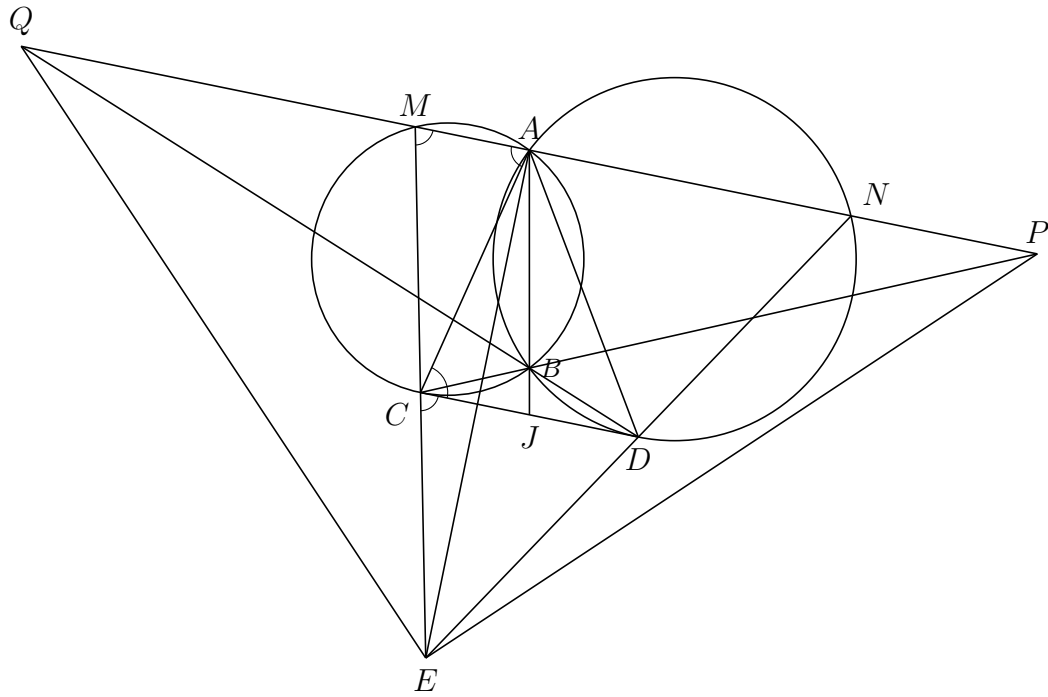
b) Tứ giác $BCED$ nội tiếp.

c) Tam giác EPQ là tam giác cân.

Lời giải.

a) Do $AM \parallel CD$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{DCE}$ và $\widehat{MAC} = \widehat{ACD}$. Mặt khác do CD là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{AMC} = \widehat{ACD}$, suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{ACD}$. Tương tự, ta có $\widehat{CDE} = \widehat{ADC}$. Từ đó $\triangle ECD = \triangle ACD$ (g.c.g), suy ra $AC = EC$ và $AD = ED$. Do đó CD là đường trung trực của AE . Mặt khác $MN \parallel CD$ nên $AE \perp MN$.

b) Ta có $\widehat{BCE} + \widehat{BDE} = 180^\circ - \widehat{BAM} + 180^\circ - \widehat{BAN} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.



- c) Gọi J là giao điểm của AB và CD . Ta có $JC^2 = JA \cdot JB = JD^2$, do đó J là trung điểm của CD . Suy ra $\frac{AQ}{AP} = \frac{AQ}{JD} \cdot \frac{JC}{AP} = \frac{AB}{JB} \cdot \frac{JB}{AB} = 1$ hay A là trung điểm PQ . Tam giác EPQ có EA vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên nó là tam giác cân đỉnh E .

□

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2018$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a + \sqrt{2018a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2018b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2018c + ab}}$.

Lời giải.

Từ giả thiết và bất đẳng thức Cauchy - Schwartz, ta có

$$2018a + bc = (a + b + c)a + bc = (a + b)(c + a) \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{ac})^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{2018a + bc}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b}{b + \sqrt{2018b + ca}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{c}{c + \sqrt{2018c + ab}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$.

Do đó

$$P \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$. Vậy $\max P = 1$.

□

————— **HẾT** —————

91 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH - KON TUM

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Giải phương trình: $x^4 + 3x^2 - \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^2} - 2 = 0$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$$

Lời giải.

a) DKXD: $x \neq 0$.

Đặt $x^2 + \frac{1}{x^2} = t$ (ĐK: $t \geq 2$).

Phương trình trở thành $t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (nhận)} \end{cases}$

Với $t = 4$ có $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 + \sqrt{3} \\ x^2 = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ x = \pm\sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{cases} \text{ (TM)}.$

b) DKXD: $x \geq 0; y \geq 0$.

Hệ đã cho tương đương
$$\begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 6 \\ xy(x + y) = 20. \end{cases}$$

Đặt
$$\begin{cases} \sqrt{xy} = u \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = v \end{cases} \text{ĐK: } u, v > 0.$$

Hệ trở thành
$$\begin{cases} uv = 6 \\ u^2(v^2 - 2u) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{6}{u} \\ u^2\left(\frac{36}{u^2} - 2u\right) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{6}{u} \\ u^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ u = 2 \end{cases} \text{ (TM)}$$

Hay
$$\begin{cases} \sqrt{xy} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (TM)} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ (TM)}. \end{cases}$$

□

Câu 2. Cho biểu thức $M = \frac{y}{\sqrt{xy} - x} + \frac{x}{\sqrt{xy} + y} - \frac{x + y}{\sqrt{xy}}$ ($x > y > 0$).

a) Rút gọn M .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $N = x^2 - \frac{M}{x + y}$, với $x > y > 0$.

Lời giải.

a) Với $x > y > 0$,

$$M = \frac{y\sqrt{xy} + y^2 + x\sqrt{xy} - x^2}{(y - x)\sqrt{xy}} - \frac{x + y}{\sqrt{xy}} = \frac{(x + y)(\sqrt{xy} + y - x)}{(y - x)\sqrt{xy}} - \frac{(x + y)(y - x)}{(y - x)\sqrt{xy}} = \frac{x + y}{y - x}.$$

b) Với $x > y > 0$,

$$N = x^2 - \frac{1}{y(y-x)} = x^2 + \frac{1}{y(x-y)} \geq x^2 + \frac{1}{\frac{(y+x-y)^2}{4}} = x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} = 4.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} y = x - y \\ x^2 = \frac{4}{x^2} \\ x > y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

□

Câu 3. Xét 2020 số thực $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ chỉ nhận một trong hai giá trị $2 - \sqrt{3}$ và $2 + \sqrt{3}$. Hỏi biểu thức $\sum_{k=1}^{1010} x_{2k-1}x_{2k}$ nhận bao nhiêu giá trị nguyên khác nhau?

Lời giải.

Vì các số x_i chỉ nhận một trong hai giá trị $2 - \sqrt{3}$ và $2 + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{2k-1} \cdot x_{2k} = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1 \\ x_{2k-1} \cdot x_{2k} = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} \\ x_{2k-1} \cdot x_{2k} = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Do đó để $P = \sum_{k=1}^{1010} x_{2k-1} \cdot x_{2k}$ nhận giá trị nguyên thì chỉ xảy ra 2 trường hợp sau:

- TH1: $x_{2k-1} \cdot x_{2k} = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$ với $\forall k$.

Khi đó $P = 1010$.

- TH2: $\begin{cases} m \text{ giá trị } k \text{ thỏa mãn } x_{2k-1} \cdot x_{2k} = (2 - \sqrt{3})^2 \\ m \text{ giá trị } k \text{ thỏa mãn } x_{2k-1} \cdot x_{2k} = (2 + \sqrt{3})^2 \\ 1010 - 2m \text{ giá trị } k \text{ thỏa mãn } x_{2k-1} \cdot x_{2k} = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \end{cases}$ với $1 \leq m \leq 505$.

Khi đó $P = 1010 + 12m$ với $1 \leq m \leq 505$.

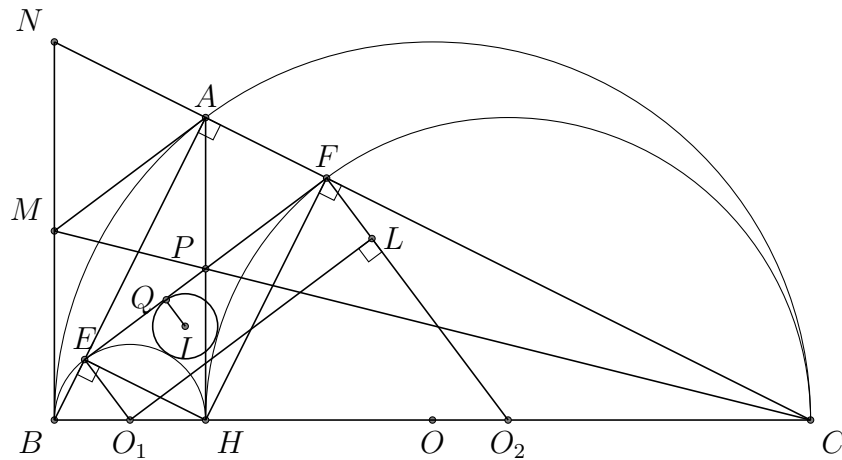
Vậy P nhận 506 giá trị nguyên khác nhau.

□

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính BC và điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Kẻ đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , ta vẽ nửa đường tròn $(O_1; R_1)$ đường kính HB và nửa đường tròn $(O_2; R_2)$ đường kính HC , chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F . Các tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) vẽ từ A và B (A và B là tiếp điểm) cắt nhau tại điểm M .

- Chứng minh rằng tứ giác $BEFC$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh rằng các đường thẳng MC , AH và EF đồng quy tại một điểm.
- Gọi $(I; r)$ là đường tròn tiếp xúc ngoài với các đường tròn (O_1) và (O_2) và tiếp xúc với EF tại điểm D (D thuộc đoạn EF). Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$.

Lời giải.



- a) Vì A thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
 Vì E thuộc đường tròn đường kính BH nên $\widehat{BEH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$.
 Tương tự $\widehat{AFH} = 90^\circ$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AHF}$.
 Mà $\widehat{AHF} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{FHC}$).
 Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{FCB} = 180^\circ$.
 Vậy tứ giác $BEFC$ nội tiếp đường tròn.
- b) Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật nên EF đi qua trung điểm của AH .
 Gọi P là giao điểm của AH và MC .
 Gọi N là giao điểm của AC và MB .
 Xét tam giác vuông BAN có $MA = MB$ (tính chất tiếp tuyến)
 Suy ra M là trung điểm NB .
 Ta có $AH \parallel NB$, áp dụng định lý Ta-lét: $\frac{AP}{MN} = \frac{PH}{NB}$.
 Vì $MN = MB$ nên $PA = PH$.
 Do đó MC đi qua trung điểm AH .
 Vậy 3 đường thẳng MC, AH, EF đồng quy tại một điểm.
- c) Ta có $\widehat{O_1EF} = \widehat{AEH} = 90^\circ$.
 Tương tự $\widehat{O_2EF} = 90^\circ$.
 $\Rightarrow EF$ là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) .
 Gọi Q là chân đường vuông góc từ I xuống EF .
 Gọi L là chân đường vuông góc từ O_1 xuống FO_2 .
 Ta có $EF = O_1L = \sqrt{O_1O_2^2 - LO_2^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2} = 2\sqrt{R_1 \cdot R_2}$.
 Tương tự $QE = 2\sqrt{R_1 \cdot r}$; $QF = 2\sqrt{R_2 \cdot r}$.
 Mà $EF = FQ + QE$ nên suy ra đpcm.

□

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + mx + m - 13$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0$ với $m > 13$. Tìm m thỏa mãn điều kiện

$$|x_1| \cdot f(x_2 - m) + |x_2| \cdot f(x_1 - m) = 104.$$

Lời giải.

$$f(x) = x^2 + mx + m - 13 \text{ (với } m > 13 \text{)}.$$

$$x_1, x_2 \text{ là 2 nghiệm phân biệt của đa thức } f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m - 13. \end{cases}$$

Vì $m > 13$ và $x_1 + x_2 > 0$ nên $x_1 < 0; x_2 < 0$.

$$\text{Có } f(x - m) = (x - m)^2 + m(x - m) + m - 13 = x^2 - mx + m - 13 = f(x) - 2mx.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1 - m) = -2mx_1 \\ f(x_2 - m) = -2mx_2. \end{cases}$$

$$\text{Theo giả thiết } P = |x_1|f(x_2 - m) + |x_2|f(x_1 - m) = 104.$$

$$\Leftrightarrow |x_1| \cdot (-2mx_2) + |x_2| \cdot (-2mx_1) = 104.$$

$$\Leftrightarrow -2mx_2 \cdot (-x_1) - 2mx_1 \cdot (-x_2) = 104.$$

$$\Leftrightarrow mx_1 x_2 = 26 \Leftrightarrow m(m - 13) = 26 \Leftrightarrow m = \frac{13 + \sqrt{273}}{2} \text{ (vì } m > 13 \text{)}.$$

□

Câu 6. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 6(ab + bc + ca) + a(a - b)^2 + b(b - c)^2 + c(c - a)^2.$$

Lời giải.

$$\text{Có } 0 < a, b, c < 1.$$

$$\text{Do } 2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2$$

$$\Rightarrow 6(ab + bc + ca) = 2(a^2 + b^2 + c^2) - [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] + 2(2ab + 2bc + 2ca) \\ = 2(a + b + c)^2 - [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

$$\text{Do đó } P = 2 + (a - 1)(a - b)^2 + (b - 1)(b - c)^2 + (c - 1)(c - a)^2.$$

$$\text{Lại có } a < 1 \text{ suy ra } (a - 1)(a - b)^2 \leq 0.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } a = b.$$

$$\text{Tương tự với } (b - 1)(b - c)^2 \text{ và } (c - 1)(c - a)^2.$$

$$\text{Vậy } P \leq 2.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ hay } a = b = c = \frac{1}{3}.$$

□

———— HẾT ————

92 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN NGUYỄN TRÃI, HẢI DƯƠNG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

- a) Cho 3 số x, y, z đôi một khác nhau và thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{2018(x-y)(y-z)(z-x)}{2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz}$.
- b) Rút gọn biểu thức: $Q = \frac{1+ax}{1-ax} \sqrt{\frac{1-bx}{1+bx}}$ với $x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a-b}{b}}$ và $0 < a < b < 2a$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} 2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz &= (2xy^2 + xyz) + 2yz^2 + (2zx^2 + xyz) \\ &= xy(2y + z) + 2yz^2 + 2xz(x + y) \\ &= xy(2y + z) + 2yz^2 - 2xz^2 \\ &= xy(y - x) + 2z^2(y - x) = (y - x)(xy + 2z^2) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (y - x)(xy + 2z^2) &= (y - x)(xy + z^2 + z^2) \\ &= (y - x)[xy + z^2 - z(x + y)] \\ &= (y - x)(x - z)(y - z) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{2018(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 2018.$$

b) Ta có $ax = \sqrt{\frac{2a-b}{b}}$.

Nên

$$\begin{aligned} \frac{1+ax}{1-ax} &= \frac{1 + \sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1 - \sqrt{\frac{2a-b}{b}}} = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{2a-b}}{\sqrt{b} - \sqrt{2a-b}} \\ &= \frac{2a + 2\sqrt{2ab-b^2}}{2b - 2a} = \frac{a + \sqrt{2ab-b^2}}{b-a}. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } bx = \frac{\sqrt{2ab-b^2}}{a}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1-bx}{1+bx} &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2ab-b^2}}{a}}{1 + \frac{\sqrt{2ab-b^2}}{a}} = \frac{a - \sqrt{2ab-b^2}}{a + \sqrt{2ab-b^2}} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{(a + \sqrt{2ab-b^2})^2} = \frac{(a-b)^2}{(a + \sqrt{2ab-b^2})^2}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{1-bx}{1+bx}} = \frac{|a-b|}{a + \sqrt{2ab-b^2}} = \frac{b-a}{a + \sqrt{2ab-b^2}}.$$

$$\text{Do vậy } Q = \frac{a + \sqrt{2ab-b^2}}{b-a} \cdot \frac{b-a}{a + \sqrt{2ab-b^2}} = 1.$$



Câu 2.

a) Giải phương trình: $x\sqrt{2x+3} + 3(\sqrt{x+5} + 1) = 3x + \sqrt{2x^2 + 13x + 15} + \sqrt{2x+3}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 4y - 13 + (x-3)\sqrt{x^2 + y - 4} = 0 \\ (x+y-3)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x+y+1} = x + 3y - 5 \end{cases}$$

Lời giải.

a) Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ 2x^2 + 13x + 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x+3}(x-1) + 3\sqrt{x+5} + 3 - 3x - \sqrt{(2x+3)(x+5)} = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}(x-1) - 3(x-1) + \sqrt{x+5}(3 - \sqrt{2x+3}) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{2x+3} - 3) - (\sqrt{2x+3} - 3)\sqrt{x+5} = 0 \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{2x+3} - 3)(\sqrt{x+5} - x + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3} = 3 \\ \sqrt{x+5} = x - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $\sqrt{2x+3} = 3$ ta có $x = 3$.

Với $\sqrt{x+5} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 5 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3, x = 4$.

b) Điều kiện:
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y + 1 \geq 0 \\ x^2 + y - 4 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} & (x+y-3)(\sqrt{y}-1) + (y-1)(\sqrt{x+y+1}-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{(x+y-3)(y-1)}{\sqrt{y}+1} + \frac{(x+y-3)(y-1)}{\sqrt{x+y+1}+2} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+y-3)(y-1) \left(\frac{1}{\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+y+1}+2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \end{aligned}$$

Với $y = 1$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$(x^2 - 9) + (x - 3)\sqrt{x^2 - 3} = 0,$$

Hay

$$(x-3)(x+3+\sqrt{x^2-3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+3+\sqrt{x^2-3}=0 \end{cases}$$

Thay $y = 3 - x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x^2 - 4x - 1 + (x-3)\sqrt{x^2 - x - 1} = 0,$$

Hay

$$(x^2 - x - 1) - (3 - x)\sqrt{x^2 - x - 1} - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 1} = 3 \\ \sqrt{x^2 - x - 1} = -x \end{cases}.$$

Giải các phương trình này ta được $x = \frac{1 - \sqrt{41}}{2} \Rightarrow y = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$ và $x = -1 \Rightarrow y = 4$.

Vậy nghiệm của hệ là $(3; 1)$, $(-1; 4)$, $\left(\frac{1 - \sqrt{41}}{2}; \frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)$.

□

Câu 3.

- a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 4y + 3 = 0$.
 b) Tìm tất cả các số nguyên dương (x, y) thỏa mãn: $x^2 + 3y$ và $y^2 + 3x$ là số chính phương.

Lời giải.

- a) Ta viết lại phương trình như sau

$$x^2 + 4(1 - y)x + 5y^2 - 4y + 3 = 0. \quad (*)$$

Vì $(*)$ có nghiệm x nên $\Delta' = 5 - (y + 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2 \leq 5$.

Do y nguyên nên $y \in \{0; -1; -2; -3; -4\}$.

- + Với $y = 0$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = -3$.
- + Với $y = -1$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 + 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -6; x = -2$.
- + Với $y = -2$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \pm \sqrt{5}$ (loại).
- + Với $y = -3$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 + 16x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = -10; x = -6$.
- + Với $y = -4$ thay vào $(*)$ ta được: $x^2 + 20x + 99 = 0 \Leftrightarrow x = -11; x = -9$.

Vậy phương trình có các cặp nghiệm nguyên là:

$(-1; 0)$, $(-3; 0)$, $(-6; -1)$, $(-2; -1)$, $(-10; -3)$, $(-6; -3)$, $(-9; -4)$, $(-11; -4)$.

- b) Nếu $x = y$ thì $x^2 + 3y = y^2 + 3x = x^2 + 3x$. Đặt $x^2 + 3x = a^2$ với $x, a \in \mathbb{N}^*$.

Ta có:

$$4x^2 + 12x - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)^2 - (2a)^2 = 9 \Leftrightarrow (2x + 3 - 2a)(2x + 3 + 2a) = 9 = 1 \cdot 9.$$

Do $2x + 3 - 2a < 2x + 3 + 2a$ nên ta có

$$\begin{cases} 2x + 3 - 2a = 1 \\ 2x + 3 + 2a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Suy ra $x = y = 1$ thỏa mãn.

Nếu $x \neq y$, do vai trò của x, y như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x < y$.

Khi đó $y^2 < y^2 + 3x < y^2 + 3y < (y + 2)^2$.

Do x, y nguyên dương suy ra

$$y^2 + 3x = (y + 1)^2 \Leftrightarrow y^2 + 3x = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3x - 1}{2}$$

Ta có: $x^2 + 3y = \frac{2x^2 + 9x - 3}{2}$. Đặt $\frac{2x^2 + 9x - 3}{2} = b^2$ với $x, b \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$2x^2 + 9x - 3 = 2b^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 72x - 24 - 16b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 9)^2 - (4b)^2 = 105$$

$$\Leftrightarrow (4x + 9 - 4b)(4x + 9 + 4b) = 105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15.$$

Vì $4x + 9 - 4b < 4x + 9 + 4b$ nên có các trường hợp sau:

$$+) \begin{cases} 4x + 9 - 4b = 1 \\ 4x + 9 + 4b = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \Rightarrow y = 16 \\ b = 13 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+) \begin{cases} 4x + 9 - 4b = 3 \\ 4x + 9 + 4b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 2b = 2x + 3 \end{cases} \text{ (loại).}$$

$$+) \begin{cases} 4x + 9 - 4b = 5 \\ 4x + 9 + 4b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ (loại).}$$

$$+) \begin{cases} 4x + 9 - 4b = 7 \\ 4x + 9 + 4b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 2b = 2x + 1 \end{cases} \text{ (loại).}$$

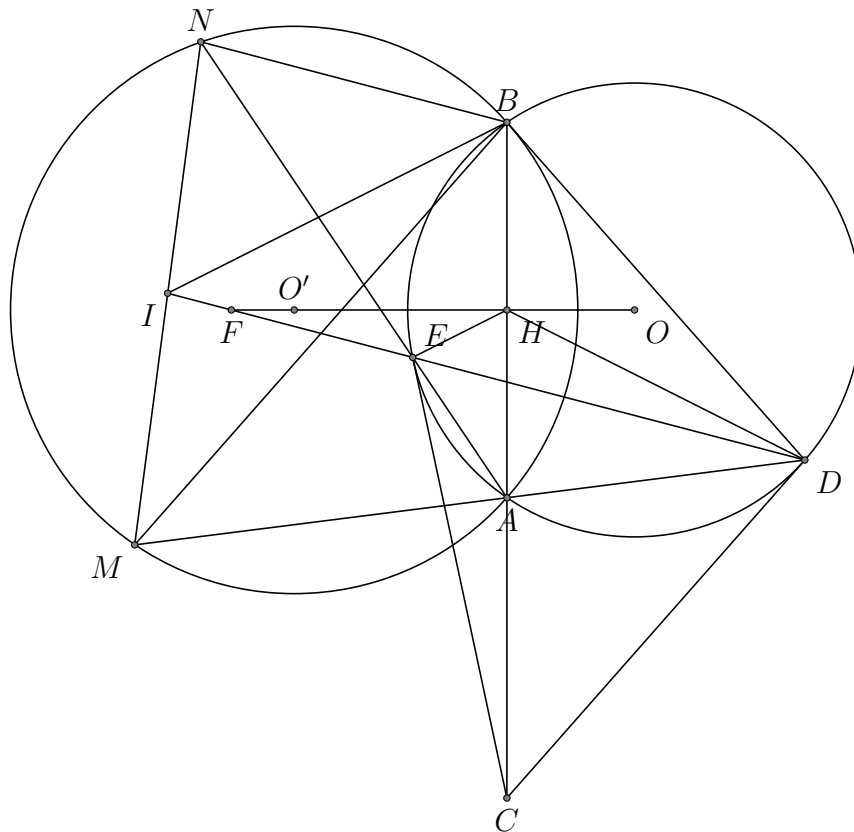
Vậy các số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 1)$, $(11; 16)$, $(16; 11)$.

□

Câu 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$, $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B (A, O, B không thẳng hàng). Trên tia đối của tia AB lấy điểm C , kẻ tiếp tuyến CD, CE với (O) , trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong (O') . Đường thẳng AD, AE cắt (O') lần lượt tại M, N (M, N khác A). Đường thẳng DE cắt MN tại I , OO' cắt AB và DI lần lượt tại H và F .

- Chứng minh: $FE \cdot HD = FD \cdot HE$.
- Chứng minh: $MB \cdot EB \cdot DI = IB \cdot AN \cdot BD$.
- Chứng minh: $O'I$ vuông góc với MN .

Lời giải.



a) (O) cắt (O') tại A, B nên $OO' \perp AB$, do đó $\widehat{CHO} = 90^\circ$. (1)

Mặt khác CD, CE là tiếp tuyến của (O) tại D, E nên $\widehat{CDO} = \widehat{CEO} = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) ta có C, D, O, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính CO .

$$\text{Do đó } \begin{cases} \widehat{CHE} = \widehat{CDE} \\ \widehat{CHD} = \widehat{CED} \end{cases}.$$

Mà $CD = CE$ nên $\widehat{CDE} = \widehat{CED}$, hay $\widehat{CHE} = \widehat{CHD}$.

Từ đó, ta có được HC là phân giác của góc $\widehat{DHE}$. Mặt khác $OO' \perp AB$ tại H hay $FH \perp HC$ tại H , suy ra HF là phân giác ngoài tại H của $\triangle DHE$.

$$\text{Suy ra } \frac{FE}{FD} = \frac{HE}{HD} \text{ hay } FE \cdot HD = FD \cdot HE.$$

b) Trong (O') có: $\widehat{BMN} = \widehat{BAN}$.

Trong (O) có: $\widehat{BAN} = \widehat{BDE}$ nên $\widehat{BMN} = \widehat{BDE}$.

Suy ra $BDMI$ là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{MBI} = \widehat{MDI} = \widehat{ABE}$.

Xét hai tam giác $\triangle MIB$ và $\triangle AEB$ có: $\widehat{MBI} = \widehat{ABE}$, $\widehat{BMI} = \widehat{BAE}$, suy ra

$$\triangle MIB \sim \triangle AEB \text{ suy ra } \frac{MB}{AB} = \frac{IB}{EB} \quad (3)$$

Xét hai tam giác $\triangle ABN$ và $\triangle DBI$ có: $\widehat{BAN} = \widehat{BDI}$, $\widehat{BNA} = \widehat{BID}$, suy ra

$$\triangle ABN \sim \triangle DBI \text{ suy ra } \frac{AB}{DB} = \frac{AN}{DI}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có

$$\frac{MB}{AB} \cdot \frac{AB}{DB} = \frac{IB}{EB} \cdot \frac{AN}{DI} \text{ hay } MB \cdot EB \cdot DI = IB \cdot AN \cdot DB.$$

c) Xét $\triangle IBN$ và $\triangle DBA$ có: $\widehat{BNI} = \widehat{BAD}$, $\widehat{BIN} = \widehat{BDA}$ (vì $BDMI$ là tứ giác nội tiếp). Suy ra

$$\triangle IBN \sim \triangle DBA \text{ suy ra } \frac{IN}{IB} = \frac{DA}{DB}. \quad (5)$$

Xét $\triangle CDA$ và $\triangle CBD$ có: $\widehat{DCB}$ chung và $\widehat{CDA} = \widehat{CBD}$. Suy ra

$$\triangle CDA \sim \triangle CBD \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{CD}{CB}$$

$$\text{Mà } CD = CE \text{ nên } \frac{DA}{DB} = \frac{CE}{CB} \quad (6)$$

Xét $\triangle CEA$ và $\triangle CBE$ có: $\widehat{BCE}$ chung; $\widehat{CEA} = \widehat{CBE}$. Suy ra

$$\triangle CEA \sim \triangle CBE \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{EA}{EB}. \quad (7)$$

Mặt khác

$$\triangle MIB \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{IM}{IB}. \quad (8)$$

Từ (5), (6), (7), (8) ta có

$$\frac{IN}{IB} = \frac{IM}{IB} \Rightarrow IN = IM \Rightarrow O'I \perp MN.$$

□

Câu 5. Cho x, y, z là bộ ba số dương thỏa mãn: $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$.

Lời giải.

Đặt $a = \sqrt{x^2 + y^2}$, $b = \sqrt{y^2 + z^2}$, $c = \sqrt{z^2 + x^2}$ ta có $a + b + c = 6$.

Ta có $y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)}$ nên

$$\frac{x^2}{y+z} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \sqrt{y^2 + z^2} \right).$$

Tương tự

$$\frac{y^2}{\sqrt{z+x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{z^2+x^2}} - \sqrt{z^2+x^2} \right), \quad \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} \right).$$

Suy ra

$$P \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2+y^2+z^2) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c).$$

Mặt khác

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{3}{2},$$

và

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{1}{6}(a+b+c)^2 = 6.$$

Suy ra $P \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\sqrt{2}$.

Vậy $\min P = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

□

————— HẾT —————

93 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Giải phương trình: $3x + 7\sqrt{x-4} = 14\sqrt{x+4} - 20$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x + 4y + 2 = (x+1)^2 \\ 6y + 4x - 2 = (y-1)^2 \end{cases}$.

Lời giải.

a) Xét phương trình $3x + 7\sqrt{x-4} = 14\sqrt{x+4} - 20$.

Với điều kiện xác định $x \geq 4$, phương trình tương đương với:

$$\begin{aligned} 3x + 20 - 7(2\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x + 20 - 7 \cdot \frac{(2\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{x-4})^2}{2\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x + 20) \left(1 - \frac{7}{2\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} &= 7 \text{ (vì điều kiện } x \geq 4 \text{ nên } 3x + 20 > 0) \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{x+4} - 3) + (\sqrt{x-4} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{2}{\sqrt{x+4}+3} + \frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 5$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} 6x + 4y + 2 = (x+1)^2 & (1) \\ 6y + 4x - 2 = (y-1)^2 & (2) \end{cases}$

Trừ theo vế phương trình (1) cho phương trình (2), ta được:

$$\begin{aligned} 6x + 4y + 2 - 6y - 4x + 2 &= (x+1)^2 - (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x - 2y + 4 &= (x+1)^2 - (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow 2(x-y+2) &= (x+y)(x-y+2) \\ \Leftrightarrow (x-y+2)(x+y-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ y = 2-x \end{cases} \end{aligned}$$

- Trường hợp 1: $y = x+2$, thay vào (1) ta được:

$$x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases}$$

Với $x = -1$ ta được $y = 1$. Với $x = 9$ ta được $y = 11$.

- Trường hợp 2: $y = 2-x$, thay vào (1) ta được: $x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$.

Với $x = 3$ ta được $y = -1$. Với $x = -3$ ta được $y = 5$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 1), (9; 11), (3; -1), (-3; 5)$.

□

Câu 2. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $S(n) = n^2 - 2017n + 10$, với $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

Lời giải.

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Với mọi số tự nhiên n ta luôn có $S(n) \leq n$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử số tự nhiên n có $m + 1$ chữ số ($m \geq 0$), có dạng $\overline{a_m a_{m-1} \dots a_0}$, trong đó $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $a_m \neq 0$. Ta có:

$$n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_0} = \sum_{i=0}^m a_i \cdot 10^i \geq \sum_{i=0}^m a_i = S(n).$$

Trở lại bài toán. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $n = 0$. Hiển nhiên không thỏa mãn.
- Trường hợp 2: $1 \leq n \leq 2016$. Ta có:

$$S(n) = n^2 - 2017n + 10 < n^2 - 2017n + 2016 = (n - 1)(n - 2016) \leq 0 \text{ (mâu thuẫn)}.$$

- Trường hợp 3: $n = 2017$. Nhận thấy $S(n) = 10 = 2017^2 - 2017 \cdot 2017 + 10 = n^2 - 2017n + 10$.
Do vậy $n = 2017$ thỏa mãn.

- Trường hợp 4: $n > 2017$. Khi đó $n - 2017 \geq 1 \Leftrightarrow n^2 - 2017n \geq n$. Khi đó
 $S(n) = n^2 - 2017n + 10 > n^2 - 2017n \geq n$ (mâu thuẫn với bổ đề).

Kết luận: $n = 2017$. □

Câu 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $c \geq a$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Với $x, y > 0$ và $xy \geq 1$ thì $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$. (*)

Chứng minh. Thật vậy (*) tương đương:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} &\geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \\ &\Leftrightarrow (x+y+2)(1+\sqrt{xy}) \geq 2xy+2x+2y+2 \\ &\Leftrightarrow x+y+(x+y)\sqrt{xy}+2+2\sqrt{xy} \geq 2xy+2x+2y+2 \\ &\Leftrightarrow (x+y)\sqrt{xy}+2\sqrt{xy}-2xy-(x+y) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(\sqrt{xy}-1)+2\sqrt{xy}(1-\sqrt{xy}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{xy}-1)(x+y-2\sqrt{xy}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{xy}-1)(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \geq 0 \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Như vậy, bổ đề đã được chứng minh. Đồng thời, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ hoặc $xy = 1$. Trở lại bài toán. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{a}{a+b} \tag{1}$$

$$\left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{b}{b+c} \tag{2}$$

$$\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{c}{c+a}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} - \frac{3}{2}.$$

Áp dụng bổ đề với $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}$, ta được:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}} + \frac{1}{1+\frac{c}{b}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{c}{a}}} \quad (\text{do } c \geq a \text{ nên } \frac{c}{a} \geq 1).$$

Như thế:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} - \frac{3}{2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{c}{a}}} + \frac{4}{1+\frac{a}{c}} - \frac{3}{2}.$$

□

Ta còn phải chứng minh:

$$\frac{2}{1+\sqrt{\frac{c}{a}}} + \frac{4}{1+\frac{a}{c}} - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}. \quad (**)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{a}{c}}$, điều kiện $0 \leq t \leq 1$. Khi đó bất đẳng thức (**) trở thành:

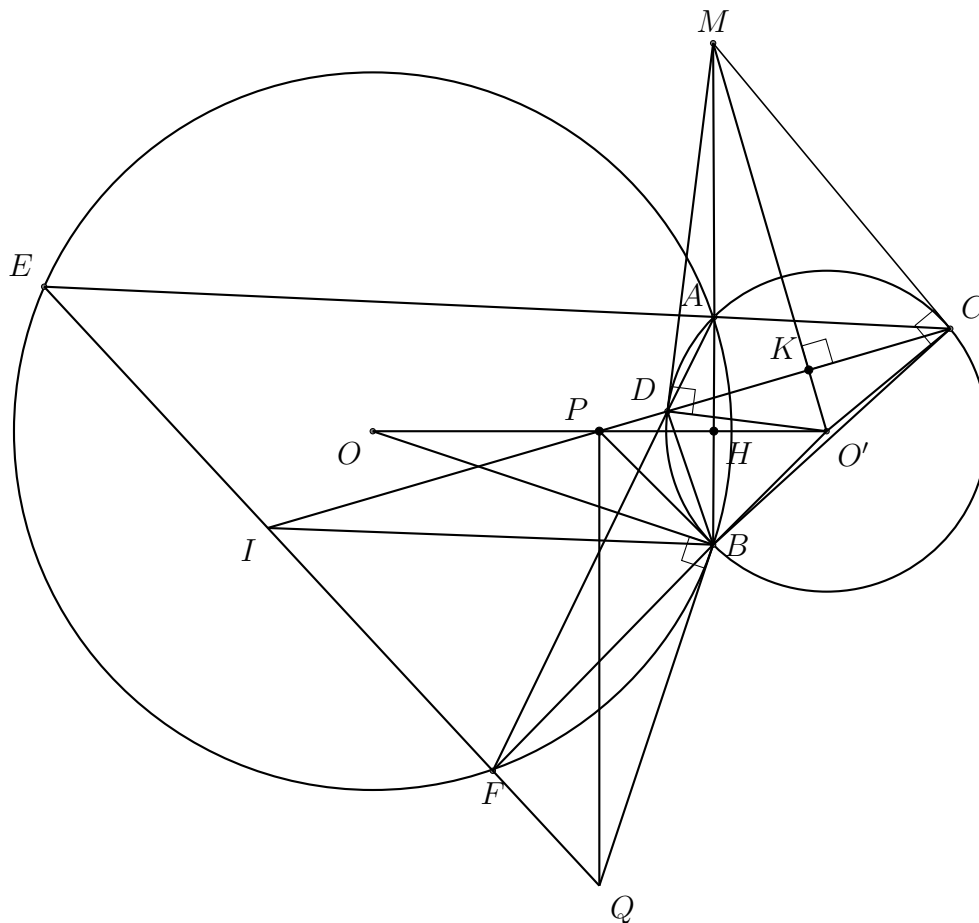
$$\begin{aligned} \frac{2t}{1+t} + \frac{4}{1+t^2} - \frac{3}{2} &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2t+2t^3+4+4t}{(t^2+1)(t+1)} \geq 3 \\ \Leftrightarrow 2t^3+6t+4 &\geq 3(t^3+t^2+t+1) \Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+1) + 3t(t-1) &\leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+4t+1) \leq 0 \quad (\text{đúng}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M khác A . Qua M kẻ tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (O') (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong (O)).

- Chứng minh $AD \cdot BC = AC \cdot DB$.
- Các đường thẳng AC, AD cắt (O) lần lượt tại E, F (E, F khác A). Chứng minh đường thẳng CD đi qua trung điểm của EF .
- Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

Lời giải.



- Do đó $AC.BD = AD.BC$.

Lưu ý. Tứ giác $ACBD$ được gọi là tứ giác điều hòa (tứ giác được tạo thành bởi hai tiếp tuyến và một cát tuyến cùng đi qua một điểm) và $AC.BD = AD.BC$ là một tính chất cơ bản của tứ giác điều hòa.

- Từ (4), (5), (6), ta có $\frac{IF}{BI} = \frac{IE}{BI} \Rightarrow IF = IE$. Vậy CD đi qua trung điểm của EF .

- c) Gọi P, H lần lượt là giao điểm của OO' với CD và AB . Gọi K là giao điểm của CD với

$O'M$. Do $OO' \perp AB$, $O'M \perp CD$, suy ra $\Delta O'HM \sim \Delta O'KP$ (g-g). Do đó:

$$\frac{O'H}{O'K} = \frac{O'M}{O'P} \Rightarrow O'H.O'P = O'K.O'M = O'C^2 = O'B^2.$$

Suy ra $\frac{O'H}{O'B} = \frac{O'B}{O'P} \Rightarrow \Delta HO'B \sim \Delta BO'P$ (c-g-c). Do đó $\widehat{O'BP} = \widehat{O'HB} = 90^\circ$. Suy ra $BP \perp O'B$ hay PB là tiếp tuyến của đường tròn (O') . Tương tự, AP cũng là tiếp tuyến của (O') , từ đó suy ra (P) là điểm cố định. Qua B kẻ tiếp tuyến với (O) , tiếp tuyến này cắt EF tại Q . Khi đó đường thẳng BQ cố định. Xét hai tam giác BDP và BFQ có $\widehat{BFQ} = \widehat{BDP}$ (do $BFID$ là tứ giác nội tiếp) và $\widehat{QBF} = \widehat{QEB} = \widehat{BAF} = \widehat{PBD}$. Suy ra $\Delta BDP \sim \Delta BFQ$ (g-g). Do đó $\widehat{BPD} = \widehat{BQF}$, dẫn tới tứ giác $BPIQ$ nội tiếp. Như vậy $\widehat{BPQ} = \widehat{BIQ} = \widehat{BDF} = \widehat{BCA} = \widehat{BO'O}$. Để chứng minh $\widehat{O'BO} = \widehat{QBP}$, suy ra $\Delta PBQ \sim \Delta O'BO$. (g-g). Do đó $\frac{BQ}{BO} = \frac{BP}{O'B} \Rightarrow BQ = \frac{BP.OB}{O'B}$ (không đổi). Từ đó ta được Q là điểm cố định. Vậy EF đi qua điểm cố định Q . □

Câu 5. Trong đường tròn (O) có bán kính bằng 21 đơn vị, cho 399 điểm bất kì $A_1, A_2, \dots, A_{399}$. Chứng minh rằng tồn tại vô số hình tròn có bán kính bằng 1 đơn vị nằm trong đường tròn (O) và không chứa điểm nào trong 399 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{399}$.

Lời giải.

Vẽ đường tròn (C) tâm (O) có bán kính 20 đơn vị. Ta có diện tích hình tròn (C) là: $S = 400\pi$. Vẽ các đường tròn $(C_1), (C_2), \dots, (C_{399})$ có tâm $A_1, A_2, \dots, A_{399}$ với bán kính 1 đơn vị. Khi đó, tổng diện tích của 399 hình tròn này là $S_1 = 399\pi < S$. Do vậy, 399 hình tròn này không phủ hết hình tròn (C) . Từ đó suy ra có vô hạn các điểm $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ nằm trong (C) nhưng không thuộc bất kỳ hình tròn nào trong 399 hình tròn $(C_1), (C_2), \dots, (C_{399})$. Vì thế, các hình tròn tâm $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ bán kính 1 đơn vị luôn nằm trong đường tròn tâm O bán kính 21 nhưng không chứa điểm nào trong 399 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{399}$. □

———— HẾT ————

94 ĐỀ THI VÀO 10 PTNK HỒ CHÍ MINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 4m + 1 = 0$ (1) với m là tham số.

- a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Chứng minh rằng $\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| < 1$.
- b) Giả sử các nghiệm x_1, x_2 khác 0, chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|$.

Lời giải.

- a) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta = -m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$. Suy ra $\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| = |m+1| < 1$ (do $-2 < m < 0$).

- b) Ta có $m^2 + 2m + 1 \geq 0 \Rightarrow 2m^2 + 4m + 1 \geq -1$. Mặt khác, $m(m+2) < 0 \Rightarrow 2(m+1)^2 \geq 0 \Rightarrow 2m^2 + 4m + 1 < 1$.

Do đó, $|2m^2 + 4m + 1| \leq 1$ (1).

Xét $|x_1| + |x_2| \leq 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| \leq 4$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(2m^2 + 4m + 1) + 2|2m^2 + 4m + 1| \leq 4$$

$$\Leftrightarrow |2m^2 + 4m + 1| \leq 1 \text{ (do (1))}.$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{|x_1x_2|}}} \geq 2$ (đúng vì $|x_1x_2| = |2m^2 + 4m + 1| \leq 1$).

Vậy $\frac{1}{\sqrt{|x_1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \geq 2 \geq |x_1| + |x_2|$.

□

Câu 2. Cho x, y là hai số nguyên với $x > y > 0$.

- a) Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho 3 thì $x^3 - y^3$ chia hết cho 9.
- b) Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho $x + y$ thì $x + y$ không là số nguyên tố.
- c) Tìm tất cả những giá trị k nguyên dương sao cho $x^k \cdot y^k$ chia hết cho 9 với mọi x, y mà xy không chia hết cho 3.

Lời giải.

- a) Ta có $x^3 - y^3 = (x - y)^3 - 3xy(x - y)$ chia hết cho 3 nên $(x - y)^3$ chia hết cho 3. Mà 3 là số

nguyên tố nên $x - y$ chia hết cho 3. Suy ra $\begin{cases} (x - y)^3 : 9 \\ 3xy(x - y) : 9 \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 : 9$.

- b) Giả sử ngược lại $x + y$ là số nguyên tố. Ta có

$$x^3 - y^3 = (x - y) [(x + y)^2 - xy] = (x - y)(x + y)^2 - xy(x - y) : (x + y).$$

Suy ra $(x - y)xy : (x + y)$, mà $x + y$ nguyên tố nên $\begin{cases} (x - y) : (x + y) \\ x : (x + y) \\ y : (x + y) \end{cases}$ (vô lý vì $0 < x, y, x - y < x + y$).

$x + y$).

c) Cho $x = 2, y = 1$ suy ra xy không chia hết cho 3.

Ta có $x^k - y^k = 2^k - 1 \div 3$.

Do $2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^k - 1 \equiv (-1)^k - 1 \pmod{3}$ nên k là số chẵn.

Ta chứng minh $k = 6n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Thật vậy,

- Với $k = 6n + 2 \Rightarrow 2^k - 1 = 2^{6n+2} - 1 \equiv 3 \pmod{9}$. Suy ra $k = 6n + 2$ không thỏa mãn.

- Với $k = 6n + 4 \Rightarrow 2^k - 1 = 2^{6n+4} - 1 \equiv 6 \pmod{9}$. Suy ra $k = 6n + 4$ không thỏa mãn.

Vậy $k = 6n$.

Ta lại có $x^k \cdot y^k = x^{6n} \cdot y^{6n} = (x^6)^n \cdot (y^6)^n = (x^6 \cdot y^6)^n$. Do xy không chia hết cho 3 nên cả x, y đều không chia hết cho 3.

- **TH1.** $x \equiv y \pmod{3} \Rightarrow x^3 \cdot y^3 \div 9$. Theo câu (1) suy ra $x^3 \cdot y^3 \div 9 \Rightarrow x^k - y^k \div 9$.

- **TH2.** x, y không cùng số dư khi chia cho 3.

Không mất tính tổng quát, giả sử $\begin{cases} x = 3a + 1 \\ y = 3b + 2 \end{cases}$.

Ta có $x^3 + y^3 = (3a + 1)^3 + (3b + 2)^3 = 27a^3 + 27a^2 + 9a + 27b^3 + 27b^2 + 9b + 9 \div 9$.

Suy ra $x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \div 9 \Rightarrow x^k - y^k \div 9$.

Vậy tập tất cả các số thỏa mãn đề bài là $k = 6n$ với n là số tự nhiên.

□

Câu 3.

a) Cho ba số $a, b, c \geq -2$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 0$. Chứng minh rằng $a = b = c = 0$.

b) Trên mặt phẳng Oxy , cho ba điểm A, B, C phân biệt với $OA = OB = OC = 1$. Biết rằng $x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + 6x_A x_B x_C = 0$. Chứng minh rằng $\min\{x_A, x_B, x_C\} < -\frac{1}{3}$ (ký hiệu x_M là hoành độ của điểm M).

Lời giải.

a) Trong ba số a, b, c phải có ít nhất 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là a, b . Ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + c^2 + ab(c + 2) = 0(*).$$

$$\text{Do } (a - b)^2, c^2, ab(c + 2) \geq 0 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

b) Giả sử ngược lại $\min\{x_A, x_B, x_C\} \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow x_A, x_B, x_C \geq -\frac{1}{3}$. Trong 3 số x_A, x_B, x_C có 2 số cùng dấu, giả sử là x_A, x_B .

Ta có

$$x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 + 6x_A x_B x_C = (x_A - x_B)^2 + x_C^2 + 2x_A x_B (3x_C + 1) = 0.$$

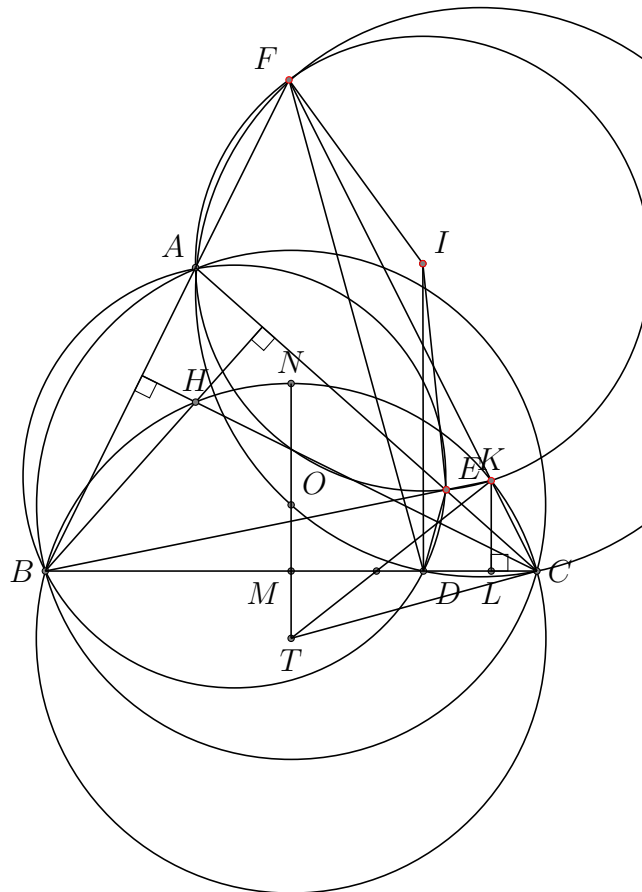
Suy ra $x_A = x_B = x_C = 0$, vậy A, B, C đều thuộc trục tung. Hơn nữa $OA = OB = OC = 1$ nên ít nhất có hai điểm trùng nhau (vô lý). Vậy ta có điều cần chứng minh.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với tâm O . Gọi D là điểm thay đổi trên cạnh BC (D khác B, C). Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và ACD lần lượt cắt AC và AB tại E và F (E, F khác A). Gọi K là giao điểm của BE và CF .

- Chứng minh rằng tứ giác $AEKF$ nội tiếp.
- Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng nếu A, O, D thẳng hàng thì HK song song với BC .
- Ký hiệu S là diện tích tam giác KBC . Chứng minh rằng khi D thay đổi trên cạnh BC ta luôn có $S \leq \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \tan \frac{\widehat{BAC}}{2}$.
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng $BF \cdot BA - CE \cdot CA = BD^2 - CD^2$ và ID vuông góc với BC .

Lời giải.



- Tứ giác $AEDB$ nội tiếp suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ADB}$, tứ giác $AFDC$ nội tiếp suy ra $\widehat{AFC} = \widehat{ADC}$. Ta có $\widehat{AEK} + \widehat{AFD} = \widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $AEKB$ nội tiếp.
- Ta có $\widehat{BKC} = \widehat{FKE} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ và $\widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$.
Suy ra $\widehat{BKC} = \widehat{BHC} \Leftrightarrow BHKC$ nội tiếp.
Suy ra $\widehat{FKH} = \widehat{HBC} = \widehat{HAC}$ và $\widehat{KCB} = \widehat{BAD}$ (do $AFDC$ nội tiếp).
Khi A, O, D thẳng hàng, ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BAO} = \widehat{HAC}$. Do đó, $\widehat{FKH} = \widehat{KCB}$ suy ra

$KH \parallel BC$.

- c) Ta có K thuộc cung BHC của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tâm T . Gọi M là trung điểm của BC và N là điểm chính giữa cung BHC và X là giao điểm của TK và BC .

Dựng $KL \perp BC$. Ta có $KL \leq KX = TK \sim TD \leq TN \sim TM = MN$.

Ta có $\widehat{BNC} = \widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$, suy ra $\widehat{NBM} = 90^\circ - \widehat{BNM} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Khi đó, $\frac{MN}{BM} = \tan \frac{\widehat{NBM}}{2} = \tan \frac{\widehat{BAC}}{2}$, suy ra $MN = \tan \frac{\widehat{BAC}}{2} \cdot \frac{BC}{2}$.

Do đó, $S_{BKC} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot BC \leq \frac{BC^2}{4} \cdot \tan \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

- d) Xét tam giác BCF và tam giác BAD có $\widehat{BCF} = \widehat{BAD}$ và góc $\widehat{B}$ chung.

Suy ra $\triangle BCF \sim \triangle BAD \Leftrightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow BF \cdot BA = BD \cdot BC$.

Chứng minh tương tự, ta có $CE \cdot CA = CB \cdot CD$.

Suy ra

$$BF \cdot BA - CE \cdot CA = BC \cdot BD - BC \cdot CD = BC(BD - CD) = (BD + CD)(BD - CD) = BD^2 - CD^2.$$

Ta có

$$\widehat{ADF} = \widehat{ACF} = \widehat{AEB} - \widehat{EKC} = \widehat{AEB} - \widehat{A} \text{ và } \widehat{ADE} = \widehat{ABE} = \widehat{AFC} - \widehat{BAC}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{EDF} = \widehat{ADF} + \widehat{ADE} = \widehat{AEB} + \widehat{AFC} - 2\widehat{A} = 180^\circ - 2\widehat{BAC} = \widehat{EIF}.$$

Do đó tứ giác $IEDF$ nội tiếp, hơn nữa $IE = IF$ nên DI là phân giác $\widehat{EDF}$.

Mặt khác $\widehat{FDB} = \widehat{BAC} = \widehat{CDE}$, suy ra DB, DI lần lượt là phân giác ngoài và phân giác trong của $\widehat{EDF}$ nên $ID \perp BC$.

□

Câu 5. Lớp 9A có 6 học sinh tham gia một kỳ thi toán và nhận được 6 điểm số khác nhau là các số nguyên từ 0 đến 20. Gọi m là trung bình cộng các điểm số của 6 học sinh trên. Ta nói rằng hai học sinh (trong 6 học sinh trên) lập thành một cặp “hoàn hảo” nếu như trung bình cộng điểm số của hai em đó lớn hơn m .

- Chứng minh rằng không thể chia 6 học sinh trên thành 3 cặp mà mỗi cặp đều “hoàn hảo”.
- Có thể chia được nhiều nhất bao nhiêu cặp “hoàn hảo”?

Lời giải.

- Giả sử ta có thể chia 6 học sinh thành 3 cặp đều hoàn hảo. Gọi số điểm của các cặp học sinh này lần lượt là $(x_1; x_2), (x_3; x_4), (x_5; x_6)$.

Ta có $\frac{x_1 + x_2}{2} > m; \frac{x_3 + x_4}{2} > m; \frac{x_5 + x_6}{2} > m$. Suy ra

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \frac{x_5 + x_6}{2} > 3m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{2} > 3 \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} \text{ (vô lý).}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

- Xét tập $A = \{0, 16, 17, 18, 19, 20\}$ với $m = 15$ có 10 cặp hoàn hảo (1).

Giả sử có nhiều hơn hoặc bằng 11 cặp hoàn hảo. Gọi tên 6 thí sinh là A, B, C, D, E, F . Với tổng 15 cặp thí sinh, ta chia thành các nhóm như sau

- Nhóm 1. $\{AB; CD; EF\}$

- Nhóm 2. $\{AC; BE; DF\}$

- Nhóm 3. $\{AD; CE; BF\}$
- Nhóm 4. $\{AE; BD; CF\}$
- Nhóm 5. $\{AF; BE; CD\}$

Do có ít nhất 11 cặp hoàn hảo mà chỉ có 5 nhóm nên theo nguyên lý Đê-rích-lê, có ít nhất 1 nhóm đủ 3 cặp thí sinh. Mà theo câu 1 điều này là vô lý (2).

Từ (1) và (2) vậy có ít nhất 10 cặp hoàn hảo.

□

———— HẾT ————

95 ĐỀ THI VÀO 10 THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ VÒNG 1

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tìm x để biểu thức $A = \sqrt{x-1}$ có nghĩa.
 b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{5^2 \cdot 2}$.
 c) Rút gọn biểu thức $C = \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} - \frac{a\sqrt{a}-1}{a-1}$ với $a \geq 0$; $a \neq 1$.

Lời giải.

- a) Biểu thức A có nghĩa khi $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
 b) Ta có $B = \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{5^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0$
 c) Với điều kiện $a \geq 0$ và $a \neq 1$, ta có $C = \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} - \frac{a\sqrt{a}-1}{a-1} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1) - (a\sqrt{a}-1)}{a-1} = \frac{a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a - 1 - a\sqrt{a} + 1}{a-1} = \frac{a - \sqrt{a}}{a-1} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$

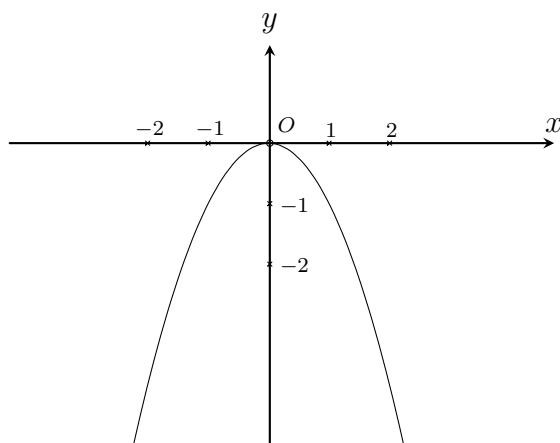
□

Câu 2.

- a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$.
 b) Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) .
 (a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.
 (b) Cho đường thẳng $y = mx + n$ (Δ). Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y = -2x + 5$ (d) và có duy nhất một điểm chung với (P) .

Lời giải.

- a) Ta có $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y \\ 3(4-2y)-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y \\ -7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.
 b)
 (a) Đồ thị (P)



- (b) Ta có $\Delta \parallel d$ nên ta có $\begin{cases} m = -2 \\ m \neq 5 \end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (P) là:

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2x + n \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + n = 0 (*)$$

Δ tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}n = 0 \Leftrightarrow n = 2 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = -2 \\ n = 2 \end{cases}$$

□

Câu 3. Cho hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 5 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ rồi đóng lại, sau đó mở vòi thứ hai chảy trong 1 giờ thì ta được $\frac{1}{4}$ bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi $x(h)$ là thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể nếu mở riêng $(x > 5)$.

$y(h)$ là thời gian vòi thứ hai chảy đầy bể nếu mở riêng $(y > 5)$.

Trong 1 h:

- Vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể.
- Vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể.
- Cả hai vòi chảy được $\frac{1}{5}$ bể.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{y} = \frac{3}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Vậy nếu mở riêng từng vòi thì thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể là $20h$, thời gian vòi thứ 2 chảy đầy bể là $\frac{20}{3}h$ □

Câu 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ (1), với x là ẩn số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0$$

Lời giải.

a) Với $m = 2$, phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 5) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - m^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow 2m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 2$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m+2 \\ P = x_1x_2 = m^2 + 5 \end{cases}$$

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(m^2 + 5) - 5(2m + 2) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 10m + 8 = 0 \text{ (a + b + c = 0)} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = 4 \text{ (thỏa)} \end{cases} \text{ . Vậy } m = 4.$$

□

Câu 5. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và D là hình chiếu vuông góc của B trên AO sao cho D nằm giữa A và O . Gọi M là trung điểm BC , N là giao

- Tứ giác $BDOM$ nội tiếp và $\widehat{MOD} + \widehat{NAE} = 180^\circ$.
- DF song song với CE , từ đó suy ra $NE.NF = NC.ND$.
- CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCE}$.
- HN vuông góc với AB .

- a) Ta có $BD \perp OD$ nên $\widehat{BDO} = 90^\circ$.
 M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$ hay $\widehat{BMO} = 90^\circ$.
 Vậy tứ giác $BDOM$ nội tiếp đường tròn (O) .
 Ta có $\widehat{MBD} + \widehat{MDO} = 180^\circ$.
 Mà $\widehat{MBD} = \widehat{NAE}$ (cùng chắn cung $\widehat{EC}$).
 Do đó $\widehat{MDO} + \widehat{NAE} = 180^\circ$.
- b) Xét tam giác BCE ta có D là trung điểm của BE (do $OD \perp BE$) và M là trung điểm của BC nên MD là đường trung bình tam giác BCE .
 Do đó $MD \parallel EC$.
 Vậy $DF \parallel CE$.
 Ta có $\triangle NDF$ đồng dạng với $\triangle NEC$ nên $\frac{ND}{NE} = \frac{NF}{NC} \Leftrightarrow NE \cdot NF = NC \cdot ND$.
- c) Ta có $\triangle OBD = \triangle OED$ (do $BD = ED$, $OB = OE$, OD cạnh chung)
 Do đó: $\widehat{BOD} = \widehat{EOD}$ nên $\widehat{AB} = \widehat{AE}$. Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ACE}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau). Vậy CA là tia phân giác của $\widehat{BCE}$
- d) Ta có $\widehat{DFN} = \widehat{NCE}$ (góc sole trong do $NF \parallel EC$)
 Mà $\widehat{NCE} = \widehat{NCM}$ (theo câu trên)
 Nên $\widehat{DFN} = \widehat{NCM}$
 Do đó $\triangle FMC$ cân tại M .
 Suy ra $MF = MC = \frac{BC}{2}$.

$\triangle BFC$ có MF là đường trung tuyến và $MF = MC = \frac{BC}{2}$ nên $\triangle BFC$ vuông tại F .

Suy ra $BF \perp AN$.

Tam giác ABN có $BF \perp AN$, $AD \perp BN$ nên H là trực tâm của $\triangle ABN$.

Vậy $NH \perp AB$.

□

Câu 6. Một cốc nước có dạng hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, chiều cao bằng 12cm và chứa một lượng nước cao 10 cm. Người ta thả từ từ 3 viên bi làm bằng thủy tinh có cùng đường kính bằng 2 cm vào cốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi h (cm) ($h > 0$) là chiều cao mực nước tăng thêm.

Tổng thể tích của ba viên bi là: $V_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1^3 = 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm}^3$.

Ta có: $V_1 = 3,14 \cdot 3^2 \cdot h = 12,56 \Leftrightarrow h = \frac{4}{9} \text{ cm}$.

Mực nước trong cốc lúc này cao $10 + \frac{4}{9} = \frac{94}{9} \text{ cm}$.

□

———— **HẾT** ————

96 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TOÁN, THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ VÒNG 2

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

a) Cho các biểu thức $P(x) = \frac{1}{x} + \frac{9-x}{x+3\sqrt{x}}$; $Q(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

Tìm số nguyên x nhỏ nhất thỏa mãn $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{1}{2}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $F = \frac{2x^4 - 21x^3 + 55x^2 - 32x - 4012}{x^2 - 10x + 20}$ khi $x = 5 - \sqrt{3}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

Lời giải.

a) Với $x > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{x} + \frac{9-x}{x+3\sqrt{x}} = \frac{1}{x} + \frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(3+\sqrt{x})} = \frac{1}{x} + \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1+3\sqrt{x}-x}{x} \\ \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{1+3\sqrt{x}-x}{x+\sqrt{x}} \\ \frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1+3\sqrt{x}-x}{x+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-5\sqrt{x}-2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(3\sqrt{x}+1) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4. \end{aligned}$$

b) Thực hiện phép chia đa thức cho đa thức, ta có:

$$F = \frac{2x^4 - 21x^3 + 55x^2 - 32x - 4012}{x^2 - 10x + 20} = 2x^2 - x + 5 + \frac{38x - 4112}{x^2 - 10x + 20}$$

Thay $x = 5 - \sqrt{3}$ vào F , ta được:

$$\begin{aligned} &2(5-\sqrt{3})^2 - (5-\sqrt{3}) + 5 + \frac{38(5-\sqrt{3}) - 4112}{(5-\sqrt{3})^2 - 10(5-\sqrt{3}) + 20} \\ &= 2(28-10\sqrt{3}) - 5 + \sqrt{3} + 5 + \frac{38(5-\sqrt{3}) - 4112}{(28-10\sqrt{3}) - 50 + 10\sqrt{3} + 20} \\ &= 56 - 19\sqrt{3} + \frac{-3922 - 38\sqrt{3}}{-2} = 56 - 19\sqrt{3} + 1961 + 19\sqrt{3} = 2017. \end{aligned}$$

Vậy khi $x = 5 - \sqrt{3}$ thì $F = 2017$.

□

Câu 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$, đường thẳng d có hệ số góc k và đi qua điểm $M(0; 1)$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của k , d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1, x_2 thỏa điều kiện $|x_1 - x_2| \geq 2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases}$.

Lời giải.

a) Đường thẳng (d) có hệ số góc k nên phương trình có dạng $(d): y = kx + b$

Vì (d) qua $M(0; 1)$ nên ta có $[1 = 0k + b \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow (d) : y = kx + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0 (*)$

Vì a, c trái dấu nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt. . Nói cách khác, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1, x_2 .

Theo định lí Viet, ta có: $S = x_1 + x_2 = k, P = x_1x_2 = -1$

Khi đó: $|x_1 - x_2| \geq 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 4 \Leftrightarrow k^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow k^2 \geq 0$ (hiển nhiên)

Vậy, với mọi giá trị của k , (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1, x_2 thỏa điều kiện $|x_1 - x_2| \geq 2$.

b) Ta có: $(2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6y^2 - 3x - 12y = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 6y^2 - 12y = 0(3)$

Lấy phương trình $(1) - (3)$, vế theo vế ta được: $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3x - 6y^2 + 12y = 9$

$\Leftrightarrow (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (y^3 - 6y^2 + 12y - 8) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^3 + (y - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 2 - y \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow x = 3 - y$. Thay $x = 3 - y$ vào

phương trình (2) ta có: $(3 - y)^2 + 2y^2 + y - 3 - 4y = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 9y + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \rightarrow x = 2 \\ y = 2 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(2; 1); (1; 2)$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)\sqrt{x^2 + 1} + m^2 - m - 2 = 0$. (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải.

a) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 1$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 1 - 2(m + 1)t + m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2(m + 1)t + m^2 - m - 3 = 0(2)$

Khi $m = 0$, phương trình (2) trở thành: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 3(n) \end{cases}$

Với $t = 3$, ta có: $\sqrt{x^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

b) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 > 1, t_2 > 1$ phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 - m - 3) > 0 \\ t_1 - 1 > 0 \\ t_2 - 1 > 0 \end{cases} (*)$$

Đưa về tổng tích và áp dụng định lý Vi-ét đối với phương trình (2), ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 4 > 0 \\ (t_1 - 1) + (t_2 - 1) > 0 \Leftrightarrow m > 4. \\ (t_1 - 1) \cdot (t_2 - 1) > 0 \end{cases}$$

Vậy $m > 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

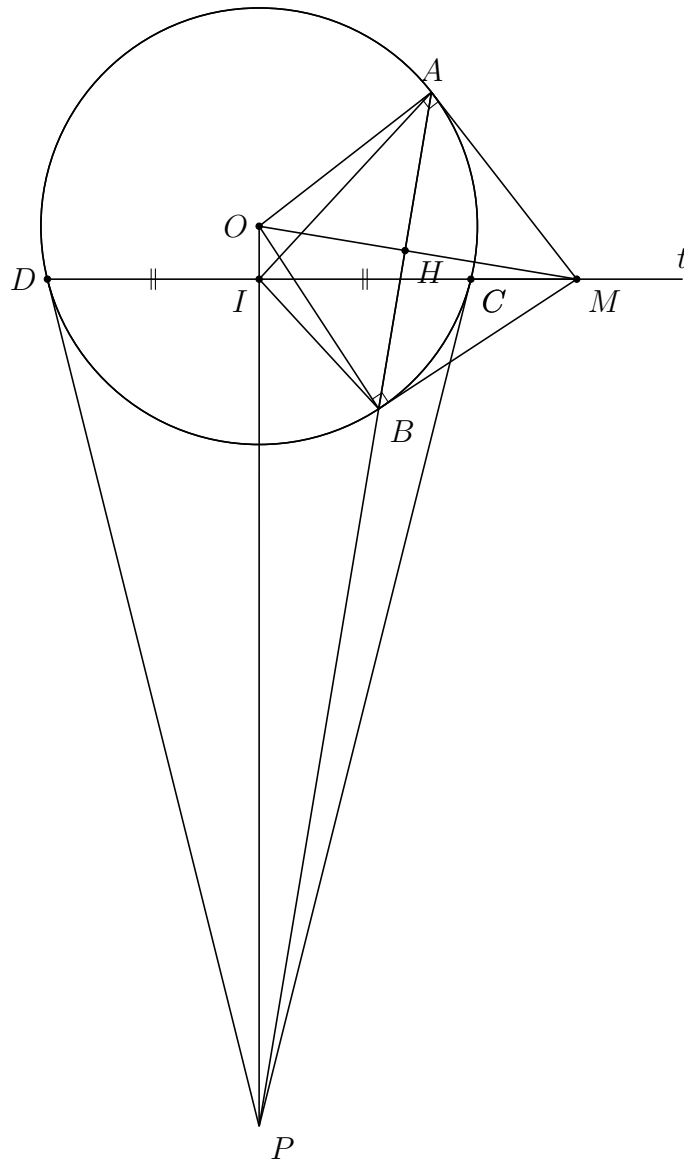
□

Câu 4. Cho đường tròn có tâm O và hai điểm C, D trên (O) sao cho ba điểm C, O, D không thẳng hàng. Gọi Ct là tia đối của tia CD , M là điểm tùy ý trên Ct , M khác C . Qua M kẻ các

tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) , (A và B là các tiếp điểm, B thuộc cung nhỏ $\widehat{CD}$). Gọi I là trung điểm của CD , H là giao điểm của đường thẳng MO và đường thẳng AB .

- Chứng minh tứ giác $MAIB$ nội tiếp.
- Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên tia Ct .
- Chứng minh $\frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}$.

Lời giải.



- Ta có: $\widehat{MAO} = 90^\circ, \widehat{MIO} = 90^\circ$ (do I là trung điểm CD), $\widehat{MBO} = 90^\circ$. Suy ra 5 điểm M, A, O, I, B cùng thuộc một đường tròn. Vậy tứ giác $MAIB$ nội tiếp
- + Gọi giao điểm của tiếp tuyến tại C và D là P . Ta có $\widehat{OCP} = \widehat{ODP} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $OCPD$ nội tiếp đường tròn đường kính OP .
+ Do $MH.MO = MA^2 = MC.MD \Rightarrow CHOD$ nội tiếp $\Rightarrow O, H, C, P, D$ cùng thuộc đường

tròn đường kính $OP \Rightarrow \widehat{OHP} = 90^\circ$ mà $\widehat{OHB} = 90^\circ$ nên 3 điểm A, B, P thẳng hàng.

+ Vậy khi M di động trên tia Ct thì AB luôn đi qua điểm P cố định.

c) Ta có: $MH.MO = MC.MD$ (câu b)

$$\Rightarrow \frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO} \Rightarrow \Delta MCH \sim \Delta MOD \Rightarrow \frac{HC}{OD} = \frac{MC}{MO}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} HC^2 = \frac{MC^2 \cdot OD^2}{OM^2} \\ HA^2 = MH \cdot OH \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{HA^2}{HC^2} = \frac{MH \cdot OH \cdot OM^2}{MC^2 \cdot OA^2} = \frac{MH \cdot OH \cdot OM^2}{MC^2 \cdot OH \cdot OM} = \frac{MH \cdot OM}{MC^2} = \frac{MC \cdot MD}{MC^2} = \frac{MD}{MC}.$$

$$\text{Vậy } \frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}.$$

□

Câu 5.

a) Cho a, b, c là các số nguyên dương thay đổi và thỏa điều kiện $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $E = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 3^n$ là một số chính phương.

Lời giải.

a) Theo bất đẳng thức cô si, ta có:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} \geq a - \frac{b+c}{4}$$

$$\frac{b^2}{a+c} + \frac{a+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{a+c} \cdot \frac{a+c}{4}} = b \Rightarrow \frac{b^2}{a+c} \geq b - \frac{a+c}{4}$$

$$\frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} = c \Rightarrow \frac{c^2}{a+b} \geq c - \frac{a+b}{4}$$

$$\text{Do đó: } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq a+b+c - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } E_{\min} = \frac{1}{2}.$$

b) Giả sử $n^2 + 3^n = m^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 3^n \Rightarrow (m-n)(m+n) = 3^n$.

Đặt $m-n = 3^k$, suy ra $m+n = 3^{n-k}$, mà $m+n > m-n \Rightarrow 3^{n-k} > 3^k \Rightarrow n > 2k \Rightarrow n-2k \geq 1$.

+ Xét $n-2k = 1$ thì $2n = (m+n) - (m-n) = 3^{n-k} - 3^k = 3^k(3^{n-2k} - 1) = 2 \cdot 3^k$

$$\Leftrightarrow n = 3^k = 2k + 1 \Leftrightarrow k = 0; 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

+ Xét $n-2k \geq 2 \Rightarrow n-k-2 \geq k$.

$$\text{Do đó: } 2n = 3^{n-k} - 3^k \geq 3^{n-k} - 3^{n-k-2} = 3^{n-k-2}(3^2 - 1) = 8 \cdot 3^{n-k-2}.$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli thì $8 \cdot 3^{n-k-2} = 8 \cdot (1+2)^{n-k-2} \geq 8 \cdot [1+2(n-k-2)] = 16n - 16k - 24$.

$$\text{Suy ra } 2n \geq 16n - 16k - 24 \Rightarrow 8k + 12 \geq 7n.$$

$$n \geq 2k + 2 \Rightarrow 8k + 12 \geq 7n \geq 14k + 14 \text{ (vô lí)}$$

Vậy $n = 1; n = 3$.

□

———— HẾT ————

97 ĐỀ THI VÀO 10, TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSPT - VÒNG 1

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức:

$$P = \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a^3 + a^2 + ab + a^2b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}\right).$$

Với $a > 0, b > 0, a \neq b, a+b \neq a^2$.

a) Chứng minh $P = a - b$.

b) Tìm a, b biết rằng $P = 1$ và $a^3 - b^3 = 7$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a^3 + a^2 + ab + a^2b}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}\right) \\ &= \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{a}{a^2} + \frac{b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a^2(a+b) + a(a+b)}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a-b}\right) \\ &= \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(1 - \sqrt{\frac{a+b}{a^2}}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a(a+1)(a+b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b}{a-b}\right) \\ &= \frac{a^3 - a - 2b - \frac{b^2}{a}}{\left(\frac{a - \sqrt{a+b}}{a}\right)(a + \sqrt{a+b})} : \left(\frac{a(a+1)}{a-b} + \frac{b}{a-b}\right) \\ &= \frac{a^4 - a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - a - b} : \frac{a^2 + a + b}{a-b} = \frac{a^4 - (a+b)^2}{a^2 - a - b} \cdot \frac{a-b}{a^2 + a + b} \\ &= \frac{(a^2 - a - b)(a^2 + a + b)}{a^2 - a - b} \cdot \frac{a-b}{a^2 + a + b} = a - b. \end{aligned}$$

b) Ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a - b = 1 \\ a^3 - b^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ 3b^2 + 3b - 6 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ \begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $(a; b) = (2; 1)$.

□

Câu 2. Giả sử $x; y$ là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$.

Hãy tính $S = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1}$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} &= \frac{2}{xy+1} \\ \Leftrightarrow (y^2+1)(xy+1) + (x^2+1)(xy+1) &= 2(x^2+1)(y^2+1) \\ \Leftrightarrow xy^3 + x^3y - 2x^2y^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow xy(x-y)^2 &= (x-y)^2 \\ \Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Mặt khác x, y là hai số thực phân biệt nên $(x-y)^2 > 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$.

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^2+1} + 1 \\ &= \frac{2x^2+2}{x^2+1} = 2. \end{aligned}$$

Vậy, $S = 2$. □

Câu 3. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2ax - 4a$, với a là tham số.

- Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) khi $a = \frac{1}{2}$.
- Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1| + |x_2| = 3$.

Lời giải.

- Với $a = -\frac{1}{2}$ ta có phương trình đường thẳng (d) là: $y = x + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4$.

Vậy khi $a = -\frac{1}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt là $A(-1; 1)$ và $B(2; 4)$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = -2ax - 4a \Leftrightarrow x^2 + 2ax + 4a = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' = a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4 \\ a < 0 \end{cases}.$$

Với $a > 4$ hoặc $a < 0$ ta có (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 .

Theo định lý Vi ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1 x_2 = 4a \end{cases}$$

Theo đề bài:

$$\begin{aligned} & |x_1| + |x_2| = 3 \\ \Leftrightarrow & (|x_1| + |x_2|)^2 = 9 \\ \Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 9 \\ \Leftrightarrow & (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 9 \\ \Leftrightarrow & 4a^2 - 8a + |8a| = 9 \quad (2) \end{aligned}$$

TH1: Với $a > 4$, phương trình (2) trở thành $4a^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \\ a = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$.

TH2: Với $a < 0$, phương trình (2) trở thành: $4a^2 - 16a - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ a = \frac{9}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy với $a = -\frac{1}{2}$ thì đường thẳng (P) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$. □

Câu 4. Anh Nam đi xe đạp từ A đến (C) . Trên quãng đường (AB) ban đầu (B) nằm giữa A và C anh Nam đi với tốc độ không đổi là a (km/h) và thời gian đi từ A tới B là 1,5 giờ. Trên quãng đường BC còn lại, anh Nam đi chậm dần đều với vận tốc tại thời điểm t (tính bằng giờ) kể từ B là $v = -8t + a$ (km/h). Quãng đường đi được từ B tới thời điểm t đó là $S = -4t^2 + at$. Tính quãng đường AB biết rằng đến C xe dừng hẳn và quãng đường BC dài 16 km.

Lời giải.

Vì tại C xe dừng hẳn nên thời gian xe đi từ B tới C thỏa mãn:

$$-8t + a = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a}{8}.$$

Do đó, quãng đường BC là $16 = -4t^2 + at = -4 \cdot \frac{a^2}{64} + \frac{a^2}{8} \Leftrightarrow a^2 = 256 \Leftrightarrow a = 16$.

Vậy quãng đường AB là $S = vt = a \cdot 1,5 = 24$ (km). □

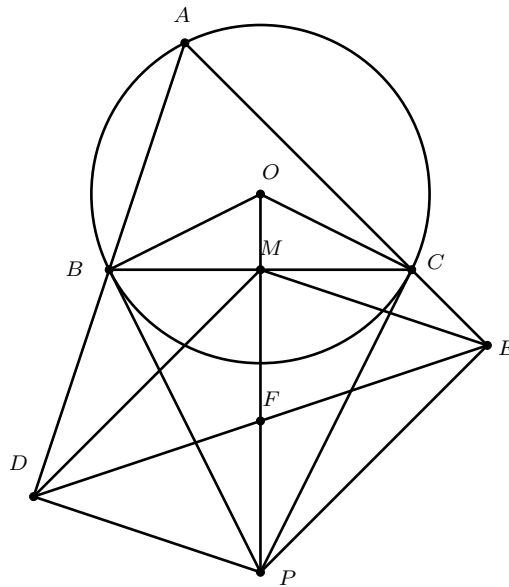
Câu 5. Cho đường tròn (O) bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt nhau tại điểm P . Gọi D, E tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các đường thẳng AB, AC và M là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh $\widehat{MEP} = \widehat{MDP}$.

b) Giả sử B, C cố định và A chạy trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

c) Khi tam giác ABC là tam giác đều. Hãy tính diện tích tam giác ADE theo R .

Lời giải.



a) Chứng minh $\widehat{MEP} = \widehat{MDP}$.

Ta có M là trung điểm của $BC \Rightarrow OM \perp BC$.

Mặt khác, $\widehat{BDP} + \widehat{BMP} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BMPD$ nội tiếp. Do vậy, $\widehat{MDP} = \widehat{MBP}$ (1).

Tương tự, tứ giác $MCEP$ nội tiếp nên $\widehat{MEP} = \widehat{MCP}$ (2).

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, dễ dàng suy ra được $\triangle BPC$ cân tại P

$\Rightarrow \widehat{MCP} = \widehat{MBP}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MEP} = \widehat{MDP}$.

b) Chứng minh DE đi qua điểm cố định.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ \\ \widehat{CBP} + \widehat{ABC} + \widehat{PBD} = 180^\circ \\ \widehat{A} = \widehat{CBP} \text{ (cùng chắn cung BC)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{PBD}.$$

Lại có $\widehat{ACB} = \widehat{MPE}$ (cùng bù với $\widehat{ECM}$)

và $\widehat{PBD} = \widehat{PMD}$ (cùng chắn cung PD) nên suy ra $\widehat{MPE} = \widehat{PMD}$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $MD \parallel EP$.

Chứng minh tương tự, ta có $ME \parallel PD$.

Vậy tứ giác $EMDP$ là hình bình hành. Do đó DE đi qua trung điểm F của MP (Hiển nhiên F cố định khi BC cố định).

c) Khi $\triangle ABC$ đều, ta được hình vẽ sau:

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_9 = 1 \\ x_2 = x_3 \dots = x_8 = 0 \end{cases}$$

□

———— HẾT ————

98 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI - VÒNG 2**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** Cho các số dương a, b, c, d . Chứng minh rằng trong 4 số

$$a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}; c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}; d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Lời giải.

Giả sử cả 4 số đều nhỏ hơn 3 thì

$$P = a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 12$$

Mặt khác

$$P = a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + b^2 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + c^2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + d^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

Do

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a + b + c + d}$$

Vậy

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{(a + b + c + d)^2}{4} + \frac{16}{a + b + c + d} + \frac{16}{a + b + c + d} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a + b + c + d)^2}{4} \cdot \frac{16}{a + b + c + d} \cdot \frac{16}{a + b + c + d}} = 12 \end{aligned}$$

Trái với điều giả sử, vậy điều giả sử sai, ta có điều phải chứng minh. □**Câu 2.** Giải phương trình

$$\sqrt{(x^2 + 2x)^2 + 4(x + 1)^2} - \sqrt{x^2 + (x + 1)^2 + (x^2 + x)^2} = 2007.$$

Lời giải.ĐKXD: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x^2 + 2x)^2 + 4(x + 1)^2} - \sqrt{x^2 + (x + 1)^2 + (x^2 + x)^2} = 2007 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{((x + 1)^2 - 1)^2 + 4(x + 1)^2} - \sqrt{1 + 2(x^2 + x) + (x^2 + x)^2} = 2007 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{(x^2 + 2x + 2)^2} - \sqrt{(x^2 + x + 1)^2} = 2007 \\ \Leftrightarrow &x^2 + 2x + 2 - x^2 - x - 1 = 2007 \\ \Leftrightarrow &x = 2006. \end{aligned}$$

□**Câu 3.**

- a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 = b^3, c^3 = d^4$ và $a = d + 98$.
- b) Tìm tất cả các số thực x sao cho tron 4 số $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2}; x - \frac{1}{x}; x + \frac{1}{x}$ có đúng một số không phải là số nguyên.

Lời giải.

- a) Giả sử p là ước nguyên tố của a , vậy dễ thấy p cũng sẽ là ước nguyên tố của b , Vậy ta có $a^2:p^3$ vậy trong biểu diễn ước nguyên tố của a thì số mũ của p phải chia hết cho 3, từ đó $a = x^3, b = y^3, x \in \mathbb{N}$. Tương tự ta có $d = y^3, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $a = d + 98 \Leftrightarrow x^3 = y^3 + 98 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 98$, ta luôn có $(x - y) \leq (x - y)^2 < x^2 + xy + y^2$ vậy ta sẽ có 2 trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ (y + 1)^2 + (y + 1)y + y^2 = 98 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3y^2 + 3y - 97 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \notin \mathbb{Z}(\text{Loại})$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y + 2)^2 + (y + 2)y + y^2 = 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 + 2y - 15 = 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ \begin{cases} y = -5 < 0(\text{Loại}) \\ y = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = 5^3 = 125; d = 3^3 = 27; b = 25; c = 81$.

- b) Nếu $x - \frac{1}{x}; x + \frac{1}{x}$ là nguyên ta có $x - \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x} = 2x \in \mathbb{Q}$ suy ra $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2}$ đều

không phải là số hữu tỷ do vậy một trong hai số $x - \frac{1}{x}; x + \frac{1}{x}$ không là số nguyên, khi đó $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - \sqrt{2} + x^2 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$

Đặt $x - \sqrt{2} = a; (a \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2} = (a + \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} = a^2 + 2 + 2\sqrt{2}(a + 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\sqrt{2}(a + 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Thử lại đúng vậy $x = \sqrt{2} - 1$.

□

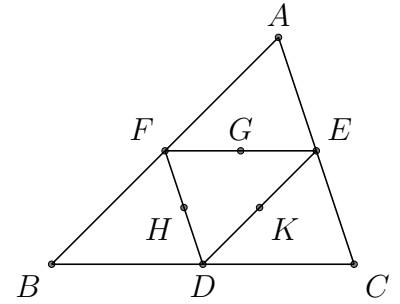
Câu 4. Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm M nằm phía ngoài đường tròn (O) . Kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C (C khác A, C khác B). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MA, MC . Đường thẳng KA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D .

- Chứng minh $KO^2 - KM^2 = R^2$.
- Chứng minh tứ giác $BCDM$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O) và N là trung điểm của KE . Đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F . Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

Câu 5.

Ta viết các số $1, 2, 3, \dots, 9$ vào vị trí của 9 điểm trong hình vẽ dưới sao cho mỗi số chỉ xuất hiện đúng một lần và tổng 3 số trên mỗi cạnh của tam giác là như nhau và bằng 18. Hai cách viết được gọi là như nhau nếu bộ số viết ở các điểm $(A; B; C; D; E; F; G; H; K)$ của mỗi cách là trùng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách viết phân biệt? Tại sao?

**Lời giải.**

Ta thấy có 2 số là 9 và 8 trong dãy $1, 2, 3, 4, \dots, 9$ tổng hai số với 1 bằng 18 ta thấy tại hai điểm A (tương tự B, C) không thể điền số 1 được vì nếu trái lại thì B, F phải điền cặp 8; 9 và tại C, E phải điền cặp 8; 9.

Tương tự thì tại D, E, F cũng không thể điền số 1 vậy số 1 phải điền tại H, G, K . Không mất tính tổng quát, giả sử 1 được điền tại G khi đó E sẽ điền 8 và F sẽ điền 9 (ta có thể giả sử như vậy). Ta gọi A điền a ; C điền c ; D điền d ; K điền k , khi đó dễ thấy rằng H điền $k + 1$; tại B sẽ điền $c + 1$. Ta có :

$$\begin{cases} a + c = 9 \\ d + k = 9 \\ d + 2c = 17 \end{cases}$$

Ta thấy d phải là lẻ.

$d = 3$ thì $c = 7 \Rightarrow B$ điền 8 (vô lí)

$d = 5$ thì $k = 4 \Rightarrow H$ sẽ điền 5 (vô lí)

$d = 7$ thì $c = 5; a = 4; k = 2$ khi đó B điền 6; H sẽ điền 3 (thỏa mãn)

Số cách điền sẽ phụ thuộc vào có 3 cách điền 1 và 2 cách điền vị trí cho 9; 8 tức là có $3.2 = 6$ (cách)

.

□

———— HẾT ————

99 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI BÌNH - VÒNG 2**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Cho a, b là hai số thực bất kì, chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình ẩn x sau vô nghiệm

$$x^2 + 2ax + 2a^2 - b^2 + 1 = 0 \quad (28)$$

$$x^2 + 2bx + 3b^2 - ab = 0. \quad (29)$$

- b) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$ và $xyz \neq 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}.$$

Lời giải.

- a) Phương trình (1) có $\Delta'_1 = -a^2 + b^2 - 1$.

Phương trình (2) có $\Delta'_2 = -2b^2 + ab$.

Xét $\Delta'_1 + \Delta'_2 = -a^2 + ab - b^2 - 1 = -\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}b^2 - 1 < 0$. Từ đó suy ra phải có ít nhất một trong hai Δ'_1, Δ'_2 âm, suy ra điều phải chứng minh.

- b) Từ giả thiết ta có $y + z = -x \Rightarrow y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$.

Nên ta có

$$\begin{aligned} P &= \sum \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} = \sum \frac{x^3}{-2xyz} = -\frac{\sum x^3}{2xyz} \\ \Rightarrow P &= -\frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz}{2xyz} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x + 1}$.

- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4xy \left(\frac{2}{x - y} - 1 \right) = 4(4 + xy) \\ \sqrt{x - y} + 3\sqrt{2y^2 - y + 1} = 2y^2 - x + 3 \end{cases}$$

Lời giải.

- a) ĐK: $x \geq -1$.

Nhận thấy $VP = 2x - 4 + \sqrt{x + 1} > 2 \Leftrightarrow x > \frac{25 - \sqrt{65}}{8} > 2 \quad (*)$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 2)^2 + 8(x + 1)} &= 2(x - 2) + \sqrt{x + 1} \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 8(\sqrt{x + 1})^2 &= 4(x - 2)^2 + 4(x - 2)\sqrt{x + 1} + (\sqrt{x + 1})^2 \\ \Leftrightarrow 3(x - 2)^2 + 4(x - 2)\sqrt{x + 1} - 7(\sqrt{x + 1})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2 - \sqrt{x + 1})(3(x - 2) + 7\sqrt{x + 1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x + 1} = 0 \text{ do } (*) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} &= x - 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} & (\text{loại}) \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$.

b) ĐK: $x - y > 0$ (**).

Xét phương trình

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4xy \left(\frac{2}{x-y} - 1 \right) &= 4(4 + xy) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 2xy - \frac{8xy}{x-y} - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y) \left((x-y)^2 - 16 \right) + 2xy(x-y-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y-4) (x^2 + y^2 + 4(x-y)) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = y + 4 &\text{ do (**).} \end{aligned}$$

Thay $x = y + 4$ vào phương trình sau ta được

$$\begin{aligned} 2y^2 - y + 1 - 3\sqrt{2y^2 - y + 1} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2y^2 - y + 1} = -1 & (\text{loại}) \\ \sqrt{2y^2 - y + 1} = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow 2y^2 - y - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ y = 3 \Rightarrow x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và $(7; 3)$.

□

Câu 3. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $x^3 - y^3 = 6xy + 3$.

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 3xy(x-y) - 6xy - 8 &= -5 \\ \Leftrightarrow (x-y-2) \left((x-y)^2 + 2(x-y) + 4 \right) + 3xy(x-y-2) &= -5 \\ \Leftrightarrow (x-y-2) \left((x-y)^2 + 2(x-y) + 4 + 3xy \right) &= -5 \quad (*) \end{aligned}$$

Do $(x-y)^2 + 2(x-y) + 4 + 3xy = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 4 = \frac{1}{2}((x+y)^2 + (x+2)^2 + (y-2)^2) \geq 0$ nên (*) tương đương với

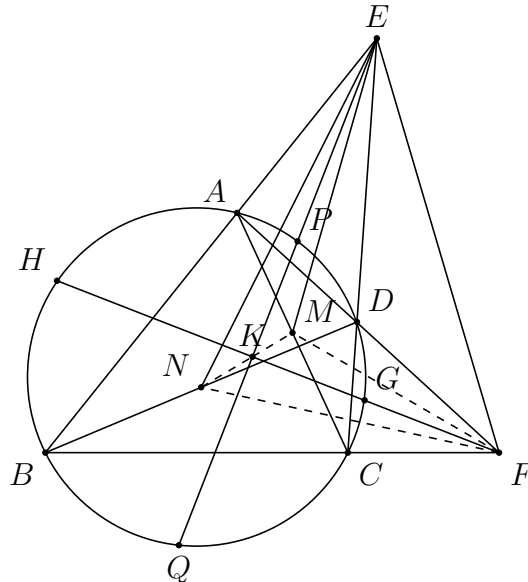
$$\begin{cases} \begin{cases} x - y - 2 = -5 \\ (x - y)^2 + 2(x - y) + 4 + 3xy = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y - 2 = -1 \\ (x - y)^2 + 2(x - y) + 4 + 3xy = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) = (-2; 1) \\ (x; y) = (-1; 2) \end{cases}.$$

□

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có hai tia BA và CD cắt nhau tại E , hai tia AD và BC cắt nhau tại F . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD . Các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BEC}$ và góc $\widehat{BFA}$ cắt nhau tại K . Chứng minh rằng

- $\widehat{DEF} + \widehat{DFE} = \widehat{ABC}$ và tam giác EKF là tam giác vuông;
- $EM.BD = EN.AC$;
- Ba điểm K, M, N thẳng hàng.

Lời giải.



a)

- Nhận thấy $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$) (1).

Mặt khác $\widehat{ADE} = \widehat{DEF} + \widehat{DFE}$ (góc ngoài của tam giác) (2).

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} + \widehat{DFE}$.

- Chứng minh EKF là tam giác vuông.

Do EK là phân giác góc $\widehat{BEC}$ nên ta có $sđ \widehat{BQ} - sđ \widehat{AP} = sđ \widehat{CQ} - sđ \widehat{DP}$ (3).

Tương tự ta có $sđ \widehat{BH} - sđ \widehat{CG} = sđ \widehat{AH} - sđ \widehat{DG}$ (4).

Từ (3)(4), suy ra

$$sđ \widehat{BQ} + sđ \widehat{BH} + sđ \widehat{DP} + sđ \widehat{DG} = sđ \widehat{AH} + sđ \widehat{AP} + sđ \widehat{CG} + sđ \widehat{CQ} = 180^\circ.$$

Vậy $\widehat{EKF} = 90^\circ$.

- Xét cặp tam giác ACE và DBE có góc $\widehat{E}$ chung và $\widehat{ACE} = \widehat{DBE}$ (cùng chắn một cung), suy ra $\triangle ACE$ đồng dạng với $\triangle DBE$. Từ đó suy ra $\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{DB} = \frac{AM}{DN} = \frac{EM}{EN}$ (5) và $EM.BD = EN.AC$.

- Từ (5) suy ra $\triangle DNE$ đồng dạng với $\triangle AME$, suy ra được EK là phân giác góc $\widehat{MEN}$. Giả sử EK cắt MN tại K_1 , suy ra $\frac{EM}{EN} = \frac{MK_1}{NK_1}$ (6).

Tương tự FK là phân giác góc $\widehat{MFN}$, giả sử FK cắt MN tại K_2 , suy ra $\frac{FM}{FN} = \frac{MK_2}{NK_2}$ (7).

Ta có thể chứng minh tương tự (5) ta được $\frac{AF}{DF} = \frac{AC}{DB} = \frac{AM}{DN} = \frac{FM}{FN}$ (8).

Từ (5)(6)(7)(8) suy ra $\frac{MK_1}{NK_1} = \frac{MK_2}{NK_2}$, suy ra $K_1 \equiv K_2 \equiv K$. Vậy K, M, N thẳng hàng.

□

Câu 5.

- a) Cho
- a, b, c
- là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}} + \frac{1}{b\sqrt{3b+2c}} + \frac{1}{c\sqrt{3c+2a}} \geq \frac{3}{\sqrt{5abc}}.$$

- b) Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong trong lớn hơn tổng của hai số còn lại. Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

Lời giải.

- a) Đặt
- $x = ab, y = bc, z = ca$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{5a}\sqrt{3a+2b}} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum \frac{bc}{\sqrt{5ab}\sqrt{2bc+3ca}} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum \frac{bc}{5ab+2bc+3ca} \geq \frac{3}{10}.$$

Viết gọn lại ta có

$$\sum \frac{y}{5x+2y+3z} \geq \frac{3}{10} \Leftrightarrow \sum \frac{y^2}{y(5x+2y+3z)} \geq \frac{3}{10}.$$

Đánh giá vế trái ta có

$$\begin{aligned} & \sum y(5x+2y+3z) \cdot \sum \frac{y^2}{y(5x+2y+3z)} \geq (x+y+z)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum \frac{y^2}{y(5x+2y+3z)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2x^2+2y^2+2z^2+8xy+8yz+8zx} \\ \Leftrightarrow & \sum \frac{y^2}{y(5x+2y+3z)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)^2 + \frac{4}{3}(x+y+z)^2} = \frac{3}{10} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

- b) Không giảm tính tổng quát, ta giả sử 5 số tự nhiên bài cho là
- $a < b < c < d < e$
- .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} b \geq a+1 \\ c \geq b+1 \\ d \geq c+1 \\ e \geq d+1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} b = a+x_1 \\ c = a+x_2 \\ d = a+x_3 \\ e = a+x_4 \end{cases} \quad \text{với } 1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Từ đó suy ra $x_3 \geq x_1 + 2$ và $x_4 \geq x_2 + 2$.

Mà theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} & a+b+c > d+e \\ \Leftrightarrow & a+a+x_1+a+x_2 > a+x_3+a+x_4 \\ \Leftrightarrow & a > x_3-x_1+x_4-x_2 \geq 4. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh $e > d > c > b > a \geq 5$.

□

HẾT

100**ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI BÌNH - VÒNG 1****✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧**

Câu 1. Cho $A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right)$ với $(x > 0, x \neq 1)$.

a) Rút gọn A .

b) Đặt $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$. Chứng minh rằng $B > 1$ với $x > 0, x \neq 1$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - 4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1+3\sqrt{x}+5}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{4\sqrt{x}} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)}{4\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

b) Với $x > 0, x \neq 1$ nên ta có

$$B = (x - \sqrt{x} + 1)A = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 1 \quad (\text{do } x \neq 1 \text{ nên } (\sqrt{x}-1)^2 > 0).$$

□

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2mx + 2m + 8$ (với m là tham số).

a) Khi $m = -4$, tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) .

b) Chứng minh rằng đường thẳng d và parabol (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 . Tìm m để $x_1 + 2x_2 = 2$.

Lời giải.

a) Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 = 2mx + 2m + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 8 = 0. (*)$$

Khi $m = -4$, phương trình $(*)$ trở thành

$$x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}.$$

Với $x = 0$ thì $y = 0$; với $x = -8$ thì $y = 64$.

Vậy khi $m = -4$ thì tọa độ giao điểm của (P) với d là $(0; 0)$ và $(-8; 64)$.

b) Để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta có $\Delta' = m^2 + 2m + 8 = (m+1)^2 + 7 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình $(*)$ luôn có hai

nghiệm phân biệt tương đương với d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét và theo bài ra ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1 x_2 = -2m - 8 & (2) \\ x_1 + 2x_2 = 2 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2m \\ x_2 = 4m - 2 \end{cases},$$

thay vào (2) ta được

$$(2 - 2m)(4m - 2) = -2m - 8 \Leftrightarrow -4m^2 + 7m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy $m \in \left\{-\frac{1}{4}; 2\right\}$ là các giá trị cần tìm.

□

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + y^2 - 2 = x^2 + 3x \\ x + y - 4\sqrt{y-1} = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $y \geq 1$.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} xy^2 + y^2 - 2 = x^2 + 3x & (1) \\ x + y - 4\sqrt{y-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow xy^2 + y^2 - (x^2 + 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2(x+1) - (x+1)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(y^2 - x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = y^2 - 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Thay $x = -1$ vào (2) ta được $y = 1$ hoặc $y = 17$.

$$\text{Thay } x = y^2 - 2 \text{ vào (2) ta được } y^2 - 2 + y - 4\sqrt{y-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Với $y = 1$ thì $x = -1$; $y = 2$ thì $x = 0$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) \in \{(-1; 1), (-1; 17), (0; 2)\}$.

□

Câu 4. Cho quãng đường AB dài 300 km. Cùng một lúc, xe ô tô thứ nhất xuất phát từ A đến B , xe ô tô thứ hai đi từ B về A . Sau khi xuất phát được 3 giờ thì hai xe gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết thời gian đi cả quãng đường AB của xe thứ nhất nhiều hơn xe thứ hai là 2 giờ 30 phút.

Lời giải.

Đổi: 2 giờ 30 phút = $\frac{5}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là x (km/h), y (km/h) với $y > x > 0$.

Sau 3 giờ, xe thứ nhất đi được quãng đường $3x$ km, xe thứ hai đi được quãng đường $3y$ km.

Ta có phương trình

$$3x + 3y = 300 \Leftrightarrow x + y = 100. (1)$$

Thời gian xe thứ nhất đi hết quãng đường AB là $\frac{300}{x}$ giờ, thời gian xe thứ hai đi hết quãng đường AB là $\frac{300}{y}$ giờ.

Ta có phương trình

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{y} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{60}{x} - \frac{60}{y} = \frac{1}{2}. (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{60}{x} - \frac{60}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 60 \\ x = 300 \\ y = -200 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện, vậy vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là 40 km/h và 60 km/h.

□

Câu 5. Cho đường tròn (O, R) có đường kính AB . Điểm C là điểm bất kỳ trên (O, R) , C không trùng với A, B . Tiếp tuyến tại C của (O, R) cắt tiếp tuyến tại A, B của (O, R) lần lượt tại P, Q . Gọi M là giao điểm của OP với AC , N là giao điểm của OQ với BC .

- Chứng minh rằng tứ giác $CMON$ là hình chữ nhật và $AP.BQ = MN^2$.
- Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ .
- Chứng minh rằng $PMNQ$ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm C để đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$ có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải.

- Ta có $OA = OC = R$ và $PA = PA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), suy ra OP là đường trung trực của AC , từ đó ta có $\widehat{OMC} = 90^\circ$.

- Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ONC} = 90^\circ$.
- Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), từ đó suy ra tứ giác $CMON$ có $\widehat{OMC} = \widehat{ONC} = \widehat{MCN} = 90^\circ$.
- Vậy tứ giác $CMON$ là hình chữ nhật.
- Vì $CMON$ là hình chữ nhật nên $\widehat{POQ} = 90^\circ$.
- Vì PQ là tiếp tuyến của (O) tại C nên $OC \perp PQ$, suy ra $\triangle OPQ$ vuông tại O và nhận OC là đường cao. Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông ta có

$$PC \cdot QC = CO^2.$$

- Mặt khác $PA = PC$, $QB = QC$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) và $MN = OC$ (do $CMON$ là hình chữ nhật).
 - Vậy $AP \cdot BQ = MN^2$.
- b) - Gọi I là trung điểm của PQ , do tam giác OPQ vuông tại O và có OI là trung tuyến nên ta có

$$OI = \frac{PQ}{2} \Rightarrow O \in \left(I; \frac{PQ}{2}\right).$$

- Vì AP , BQ là các tiếp tuyến của (O) nên $AP \perp AB$ và $BQ \perp AB$, từ đó suy ra tứ giác $APQB$ là hình thang vuông.
- Mặt khác OI là đường trung bình của hình thang $APQB$, suy ra $OI \parallel AP \Rightarrow OI \perp AB$ hay AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn $\left(I; \frac{PQ}{2}\right)$.
- Do tam giác OCN vuông tại C với đường cao CM . Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông ta có $OC^2 = OM \cdot ON$.
- Tương tự ta có $OC^2 = ON \cdot OQ$, từ đó suy ra

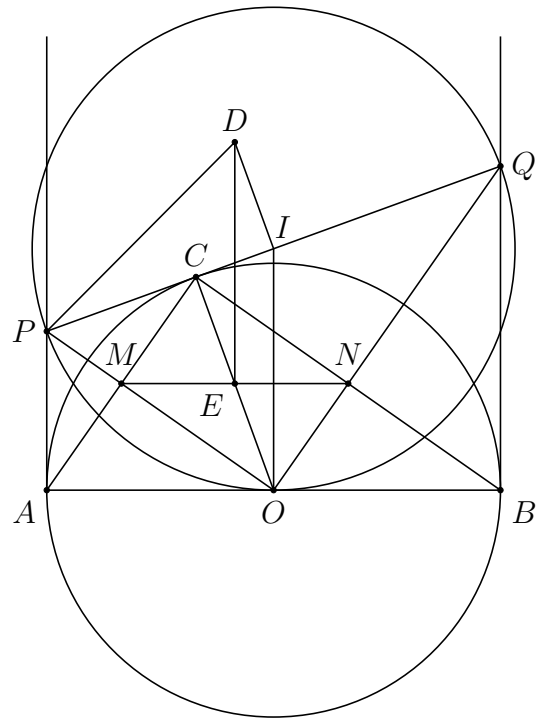
$$OM \cdot ON = ON \cdot OQ \Rightarrow \frac{OM}{OQ} = \frac{ON}{OP}.$$

- Xét tam giác $\triangle OMN$ và $\triangle OQP$ có $\widehat{POQ}$ chung và $\frac{OM}{OQ} = \frac{ON}{OP}$, suy ra $\triangle OMN$ và $\triangle OQP$ đồng dạng theo trường hợp (c-g-c), suy ra $\widehat{MNO} = \widehat{MPQ}$.
 - Vậy $PMNQ$ là tứ giác nội tiếp.
- c) - Gọi D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$, E là giao điểm của OC và MN .
- Đường tròn (D) có I là trung điểm dây PQ và E là trung điểm của dây MN , suy ra $DI \perp PQ$, $DE \perp MN \Rightarrow DI \parallel OE$, $DE \parallel OI \Rightarrow$ Tứ giác $OEDI$ là hình bình hành, suy ra $DI = OE = \frac{R}{2}$.

- Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông DIP ta có

$$DP = \sqrt{DI^2 + IP^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{PQ}{2}\right)^2} \geq \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

- Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $PQ = AB \Leftrightarrow OC \perp AB$ tương đương với C là điểm chính



giữa của nửa đường tròn (O).

- Vậy khi C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O) thì đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$ có bán kính nhỏ nhất bằng $\frac{R\sqrt{5}}{2}$.

□

Câu 6. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}.$$

Lời giải.

Ta có

$$P = \frac{1}{x\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{y\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2}\right)} + \frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}.$$

Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$ thì ta có

$$P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 = 3,$$

do đó

$$P = \frac{a}{3 - a^2} + \frac{b}{3 - b^2} + \frac{c}{3 - c^2}.$$

Ta lại có bất đẳng thức

$$\frac{x}{3 - x^2} \geq \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2 \cdot x \cdot (x + 2)}{2(3 - x^2)} \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Từ đó suy ra

$$P \geq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 = \frac{3}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

□

———— **HẾT** ————

101 ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THÁI NGUYÊN

✧✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧✧

Câu 1. Không dùng máy tính cầm tay hãy rút gọn: $A = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}(3+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}+2} = 1. \end{aligned}$$

□

Câu 2. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 \\ y(7 - x^2 - y^2 + 2xy) = 2(x^2 + 1) \end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 \\ y(7 - x^2 - y^2 + 2xy) = 2(x^2 + 1) \end{cases} \quad (1) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y \\ y(7 - x^2 - y^2 + 2xy) = 2(-y^2 + xy - 4y) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y \\ y[15 - (x - y)^2 - 2(x - y)] = 0. \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Do $y = 0$ không thỏa mãn hệ đã cho nên từ (2), ta có:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y \\ 15 - (x - y)^2 - 2(x - y) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x - y = -5 \\ x - y = 3 \\ x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -5 \\ x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y. \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ x + 1 = -y^2 + xy - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ (y - 5)^2 + 1 = -y^2 + (y - 5)y - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ y^2 - y + 26 = 0. \end{cases} \quad (\text{hệ vô nghiệm})$$

Ta có:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ (y + 3)^2 + 1 = -y^2 + (y + 3)y - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 + 7y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(1; -2); (-2; -5)$. □

Câu 3. Cho số tự nhiên $A = \underbrace{\overline{777\dots 7}}_{n \text{ chữ số } 7} - 18 + 2n$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Chứng minh rằng A chia hết cho 9.

Lời giải.

Với số tự nhiên $a \in \mathbb{N}^*$, ta đặt $S(a)$ là tổng các chữ số của a . Khi đó ta luôn có $a - S(a)$ chia hết cho 9. Ta có:

$$A = \underbrace{\overline{777\dots 7}}_{n \text{ chữ số } 7} - 18 + 2n = 7 \cdot \underbrace{\overline{111\dots 1}}_{n \text{ chữ số } 1} - 18 + 2n = 7 \cdot (\underbrace{\overline{111\dots 1}}_{n \text{ chữ số } 1} - n) + 9(n - 2).$$

Tổng các chữ số của $\underbrace{\overline{111\dots 1}}_{n \text{ chữ số } 1}$ là n nên ta có $\underbrace{\overline{111\dots 1}}_{n \text{ chữ số } 1} - n$ chia hết cho 9.

Vì vậy $7(\underbrace{\overline{111\dots 1}}_{n \text{ chữ số } 1} - n)$ chia hết cho 9.

Hiển nhiên $9(n - 2)$ chia hết cho 9.

Do đó $A \vdots 9$. □

Câu 4. Xét các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq \sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc) \Rightarrow 3 \geq 3(ab + bc + ac) \Rightarrow ab + bc + ac \leq 1.$$

Do đó ta có:

$$ab + bc + ac \leq 1 \Rightarrow a^2 + ab + bc + ac \leq a^2 + 1 \Rightarrow (a + b)(a + c) \leq a^2 + 1.$$

Tương tự ta có:

$$(a + b)(b + c) \leq b^2 + 1, (a + c)(b + c) \leq c^2 + 1.$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \\ \Rightarrow P &\leq \sqrt{\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{b^2}{(a+b)(b+c)}} + \sqrt{\frac{c^2}{(a+c)(b+c)}}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right) \\ \sqrt{\frac{b^2}{(a+b)(b+c)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} \right) \\ \sqrt{\frac{c^2}{(a+c)(b+c)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} \right). \end{aligned}$$

Do đó:

$$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} \right) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} a = b = c > 0 \\ a + b + c = \sqrt{3} \\ \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+c} \\ \frac{a}{b} = \frac{a}{b+c} \\ \frac{a+c}{c} = \frac{b+c}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy P có giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$. □

Câu 5. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất.

Ví dụ: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 2, a_6 = 2, a_7 = 3$. Tính giá trị của tổng

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2017}} + \frac{1}{a_{2018}}.$$

Lời giải.

Gọi k là số nguyên dương gần $\sqrt{n}$ nhất. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2} &\Leftrightarrow k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow k^2 - k + 1 &\leq n < k^2 + k + 1. \end{aligned}$$

Từ đó ta sẽ có $2k$ số $a_n = k$. Vậy:

$$S = \underbrace{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right)}_{2 \text{ số hạng}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right)}_{4 \text{ số hạng}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{44} + \dots + \frac{1}{44} \right)}_{88 \text{ số hạng}} + \underbrace{\left(\frac{1}{45} + \dots + \frac{1}{45} \right)}_{38 \text{ số hạng}}$$

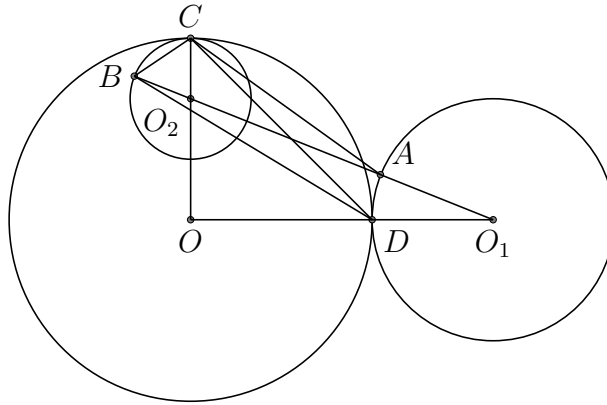
(từ $a_{1981} = a_{1982} = \dots = a_{2018} = 45$)

$$S = 2.44 + 38 \cdot \frac{1}{45} = \frac{3998}{45}.$$

□

Câu 6. Cho hai đường tròn tâm O_1 và O_2 nằm ngoài nhau. Đoạn thẳng O_1O_2 cắt đường tròn (O_1) tại điểm A . Phần kéo dài của đoạn thẳng O_1O_2 cắt (O_2) tại B . Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc ngoài với đường tròn (O_1) tại điểm D và tiếp xúc trong với đường tròn (O_2) tại C (điểm O không nằm trên O_1O_2). Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



Đặt $\widehat{COD} = \alpha$; $\widehat{AO_1D} = \beta$. Do $\triangle O_2BC$ cân tại O_2 nên:

$$\text{Ta có } \widehat{CBA} = \widehat{CBO_2} = 90^\circ - \frac{\widehat{CO_2B}}{2} \Rightarrow \widehat{CO_2B} = 180^\circ - 2\widehat{CBA}. \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{CO_2B} = \widehat{OO_2O_1} = 180^\circ - (\alpha + \beta). \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta có } \widehat{CBA} = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (1)$$

Ta có:

$$\widehat{CDA} = 180^\circ - (\widehat{ADO_1} + \widehat{CDO}) = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (2)$$

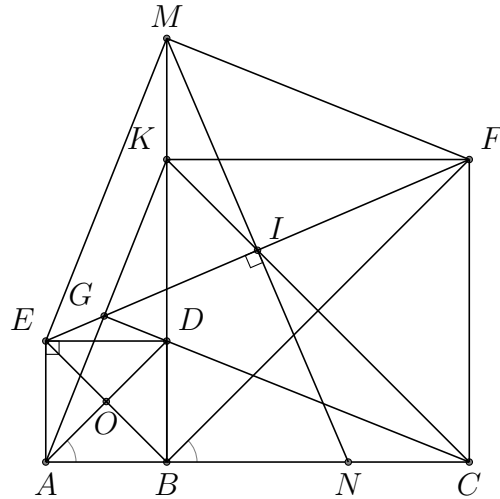
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{CBA} = \widehat{CDA} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Do đó các điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. $\square$

Câu 7. Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng theo thứ tự đó sao cho $AB < BC$. Trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AC dựng các hình vuông $ABDE$ và $BCFK$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF . Đường thẳng qua I vuông góc với EF cắt các đường thẳng BD và AB lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AEIN$ và tứ giác $EMID$ nội tiếp đường tròn.
- Ba điểm A, I, D thẳng hàng và các điểm B, N, F, M, E nằm trên cùng một đường tròn.
- Ba đường thẳng AK, EF, CD đồng quy.

Lời giải.



a. Ta có:

$\widehat{EAN} = \widehat{EIN} = 90^\circ$ nên tứ giác $AEIN$ nội tiếp đường tròn đường kính EN .

$\widehat{EDM} = \widehat{EIM} = 90^\circ$ nên tứ giác $EMID$ nội tiếp đường tròn đường kính EM .

b. Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{FBC} = 45^\circ$ nên $AD \parallel BF$. (1)

Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng BE và AD . Khi đó O là trung điểm của BE và AD . Mà I là trung điểm của EF nên OI là đường trung bình của tam giác EBF ứng với cạnh BF . Do đó $OI \parallel BF$. (2)

Từ (1) và (2) ta có A, I, D cùng nằm trên đường thẳng qua O và song song với BF . Vậy A, I, D thẳng hàng. Ta có tam giác NEF cân tại N và $\widehat{IEN} = \widehat{IAN} = 45^\circ$ nên tam giác NEF vuông cân tại N . Tam giác MEF cân tại M và $\widehat{MEI} = \widehat{MDI} = 45^\circ$ nên tam giác MEF vuông cân tại M . Vì vậy tứ giác $MENF$ là hình vuông. Suy ra bốn điểm M, E, N, F nằm trên đường tròn đường kính MN . Mặt khác tam giác MBN vuông tại B nên B cũng nằm trên đường tròn đường kính MN . Vậy 5 điểm B, N, F, M, E cùng nằm trên đường tròn đường kính MN .

c. Chứng minh tương tự ta có ba điểm C, I, K thẳng hàng.

Gọi G là giao điểm của AK và CD .

Do D là trực tâm tam giác AKC nên $\widehat{AGC} = 90^\circ$. (3)

Tứ giác $AEGD$ nội tiếp nên $\widehat{EGA} = \widehat{EDA} = 45^\circ$. (4)

Tứ giác $CGKF$ nội tiếp nên $\widehat{CGF} = \widehat{CKF} = 45^\circ$. (5)

Từ (3), (4), (5) ta có $\widehat{EGA} + \widehat{AGC} + \widehat{CGF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EGF} = 180^\circ$.

Do đó G nằm trên đường thẳng EF .

Vậy ba đường thẳng AK, CD, EF đồng quy.

□

———— HẾT ————

102**ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN THPT, TPHCM****◇◇◇◇ NỘI DUNG ĐỀ ◇◇◇◇****Câu 1.**

- a) Cho các số thực a, b, c sao cho $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 29$ và $abc = 11$. Tính $a^5 + b^5 + c^5$.
- b) Cho biểu thức $A = (m + n)^2 + 3m + n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là số chính phương thì $n^3 + 1$ chia hết cho m .

Lời giải.

- a) Ta có $a + b + c = 3$, $ab + bc + ca = -10$, $abc = 11$. Do đó, a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 - 10x - 11 = 0$. Tuy nhiên, phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm thực $x \approx 5,2$ nên không tồn tại a, b, c .
- b) Ta có $(m + n)^2 < (m + n)^2 + 3m + n < (m + n + 2)^2$. Từ đó, nếu A là số chính phương thì $A = (m + n + 1)^2$, suy ra $m = n + 1$. Do đó, $m \mid n^3 + 1$

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $2(x + 2)\sqrt{3x - 1} = 3x^2 - 7x - 3$.

- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} - \frac{10}{x} = -1 \\ 20y^2 - xy - y = 1. \end{cases}$$

Lời giải.

- a) Phương trình đã cho tương đương với $(\sqrt{3x - 1} + x + 2)^2 = 4x^2$. Giải phương trình ta được $x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$.

- b) Ta có $20y^2 - xy - y = 1 \Leftrightarrow 20y - x - 1 = \frac{1}{y}$. Thay vào phương trình $x + \frac{1}{y} - \frac{10}{x} = -1$

ta nhận được phương trình $xy = \frac{1}{2}$. Vậy hệ trở thành $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ 20y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases}$. Giải hệ ta được

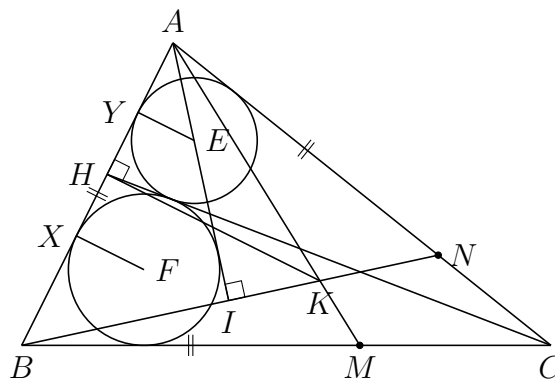
ng nghiệm $\left(-2; -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{3}; \frac{3}{10}\right)$.

□

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AN = AB = BM$. Các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K . Gọi H là hình chiếu của K trên AB . Chứng minh rằng

- a) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH .
- b) Các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

Lời giải.



- a) Tam giác ABN cân tại A nên tia phân giác AI của góc A vuông góc với BN . Tam giác ABK có KH và AI là hai đường cao nên đồng quy tại điểm P . Do đó, BP cũng vuông góc với AM mà $\triangle ABM$ cân tại B nên BP chính là phân giác góc B . Suy ra, P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và $P \in KH$.

b)

□

Câu 4. Cho x, y là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{xy}$.

Lời giải.

Viết lại $P = \frac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{xy} - 2$.

Áp dụng AM-GM cho ba số $\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}$, $\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}$ và $\frac{(x+y)^2}{xy}$ ta được $P \geq 10$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y$. □

Câu 5. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC}$ tù. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC lần lượt tại L, H, J .

- a) Các tia BO, CO cắt LH lần lượt tại M, N . Chứng minh 4 điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.
- b) Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với AJ , cắt AJ và đường trung trực của cạnh BC lần lượt tại D và F . Chứng minh 4 điểm B, D, F, C cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

a)

b)

c)

□

Câu 6. Trên một đường tròn có 9 điểm phân biệt, các điểm này được nối với nhau bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc màu đỏ. Biết rằng mỗi tam giác tạo bởi 3 trong 9 điểm chứa ít nhất một cạnh màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm sao cho 6 đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

Lời giải.

Trường hợp 1: Có một điểm nào đó, kí hiệu x_1 được nối với ít nhất 4 đỉnh x_2, x_3, x_4, x_5 các cạnh màu xanh. Lúc đó, 4 đỉnh x_2, x_3, x_4, x_5 phải được nối với nhau màu đỏ (vì giả thiết mỗi tam giác có ít nhất 1 cạnh màu đỏ).

Trường hợp 2: Mỗi điểm có không quá 3 điểm khác nối với nó bởi cạnh màu xanh. Lúc này, có ít nhất một điểm, kí hiệu x_1 chung cạnh màu xanh với nhiều nhất 2 điểm (vì nếu tất cả các điểm có chung 3 cạnh xanh với 3 điểm khác thì số cạnh là $9 \cdot 3 : 2$ không nguyên). Do đó, điểm x_1 được nối với ít nhất 6 điểm còn lại bằng màu đỏ. Rõ ràng, trong 6 điểm này, có ít nhất 3 điểm được nối với nhau cạnh màu đỏ, kết hợp với điểm x_1 ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

———— HẾT ————

103

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TIỀN GIANG

✧✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧✧

Câu 1.

- a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}-2}$.
- b) Giải phương trình $x^2 - \sqrt{x^3+x} = 6x-1$.
- c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \\ x - 3y + xy = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

a) $A = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 - \sqrt{3}}}{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3 - 2}} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)-2} = -1$.

- b) Điều kiện xác định: $x \geq 3 + 2\sqrt{2}$ hoặc $0 \leq x \leq 3 - 2\sqrt{2}$.

$$x^2 - \sqrt{x^3+x} = 6x-1 \Leftrightarrow x^2+1 - \sqrt{x(x^2+1)} - 6x = 0$$

Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{x^2+1}$ ($a \geq 0$, $b \geq 1$). Khi đó phương trình trở thành:

$$b^2 - ab - 6a^2 = 0 \Leftrightarrow (b-3a)(b+2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \text{ (TM)} \\ b = -2a \text{ (Loại)} \end{cases}$$

Với $b = 3a \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$ (TM).

Kết luận: tập nghiệm của phương trình là $\left\{ \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2} \right\}$.

c) $\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 8xy + 24 = 0 \\ x - 3y + xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3y)^2 + 14xy + 24 = 0 \\ (x-3y) + xy = 0 \end{cases}$.

Đặt $a = x - 3y$, $b = xy$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a^2 + 14b + 24 = 0 & (1) \\ a + b = 0 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow b = -a$. Thay vào phương trình (1) ta được $a^2 - 14a + 24 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ hoặc $a = 12$.

• Với $a = 2 \Rightarrow b = -2$. Ta có $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ 3y^2 + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ (Vô nghiệm).

• Với $a = 12 \Rightarrow b = -12$. Ta có $\begin{cases} x - 3y = 12 \\ xy = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 12 \\ y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(6; -2)$.

□

Câu 2.

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+1)x - m^2$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $(x_1 - m)^2 + x_2 = 3m$.
- b) Cho phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ (với m là tham số). Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m . Tìm tất cả các giá trị của m sao cho biểu thức $A = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 4)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (*).

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (*) nên $x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - m)^2 = 2x_1$.

Theo đề bài $(x_1 - m)^2 + x_2 = 3m \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 3m$. Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = m^2 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 + x_2 = 2m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 2 \\ x_2 = m + 4 \end{cases}$.

Do vậy $(m-2)(m+4) = m^2 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$ (TM).

b) Vì phương trình có $ac = -2 < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{-2}{x_2}$.

Ta có $A = \left(\frac{4}{x_2^2} - 1\right)(x_2^2 - 4) = \frac{(4 - x_2^2)^2}{-x_2^2} = -x_2^2 - \frac{16}{x_2^2} + 8 \leq -2\sqrt{x_2^2 \cdot \frac{16}{x_2^2}} + 8 = 0$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $x_2 = \pm 2$.

- Với $x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow m = -1$.
- Với $x_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow m = 1$.

Vậy $\max A = 0$ khi $m = \pm 1$.

□

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + p + 6$ là một số chính phương.

Lời giải.

Vì $p^2 + p + 6$ là số chính phương nên $p^2 + p + 6 = k^2$ (k nguyên dương).

Ta có $p^2 + p + 6 = k^2 \Rightarrow 4p^2 + 4p + 24 = 4k^2 \Rightarrow (2k)^2 - (2p+1)^2 = 23 \Rightarrow (2k+2p+1)(2k-2p-1) = 23$.

Vì $2k + 2p + 1 > 2k - 2p - 1$ nên $\begin{cases} 2k + 2p + 1 = 23 \\ 2k - 2p - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 6 \\ p = 5 \end{cases}$.

Vậy $p = 5$ thì $p^2 + p + 6$ là số chính phương.

□

Câu 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A, B ($R < R'$). Kẻ tiếp tuyến chung CD của (O) và (O') với C, D là các tiếp điểm (C nằm trên (O) và D nằm trên (O')). Qua B kẻ cát tuyến song song với CD cắt (O) tại E , cắt (O') tại F . Gọi G, H theo thứ tự là giao điểm của DA, CA với EF và I là giao điểm của EC với FD .

a) Chứng minh $\triangle BCD = \triangle ICD$.

b) Gọi K là giao điểm của AB và CD . Chứng minh K là trung điểm của CD .

c) Chứng minh BI là đường trung trực của đoạn thẳng GH .

Lời giải.

104**ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC HÀ NỘI - CHUYÊN TIN****◇◇◇◇ NỘI DUNG ĐỀ ◇◇◇◇****Câu 1.**

a) Giải phương trình $\sqrt{5x - x^2} + 2x^2 - 10x + 6 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Lời giải.a) Điều kiện: $0 \leq x \leq 5$. Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{x(5-x)} + 2x(x-5) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(5-x)} - 2x(5-x) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(5-x) - \sqrt{x(5-x)} - 6 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x(5-x)} \geq 0$

Khi đó ta có phương trình:

$$2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x(5-x)} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa)} \\ x = 4 \text{ (thỏa)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1; 4\}$ b) Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \quad (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 4 \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = 4 \quad (3)$$

Đặt $\begin{cases} x + y = a \\ \sqrt{xy} = b \end{cases}$. Từ (1), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b^2 = 3 \\ a + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b^2 = 3 \\ a = 4 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 1 = 0 \\ a = 4 - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ \sqrt{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Khi đó x, y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$.Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

□

Câu 2.a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$ và $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 13$.b) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a + b + c$.**Lời giải.**

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x^2 + 2y^2 - z^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y - 2 \quad (1) \\ 3x^2 + 2y^2 - z^2 = 13 \quad (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$3x^2 + 2y^2 - (x + y - 2)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x + 2)^2 = 21 - 4y$$

Vì x, y, z là số nguyên dương nên $(x - y)^2 \geq 0$ và $(x + 2)^2 \geq (1 + 2)^2 = 9$

$$\text{Suy ra } VT \geq 9 \Rightarrow 21 - 4y \geq 9 \Rightarrow 3 \geq y \geq 1$$

Với $y = 3$ ta có: $2x^2 + 9 - 6x + 4x + 12 - 17 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 4 = 0$ (vô nghiệm)

Với $y = 2$ ta có: $2x^2 + 4 - 4x + 4x + 8 - 17 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5 = 0$ (loại)

$$\text{Với } y = 1 \text{ ta có: } 2x^2 + 1 - 2x + 4x + 4 - 17 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 1$$

Vậy $x = 2; y = 1; z = 1$ thỏa yêu cầu đề bài.

b) Đặt $t = a + b + c$

$$\Rightarrow t^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 2c^2 + 2(ab + bc + ca) \Rightarrow t:2$$

$$\text{Mặt khác: } a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (t - a - b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = t^2 + b^2 + c^2 - 2ta - 2tb + 2ab$$

$$\Leftrightarrow 0 = t^2 - 2ta - 2tb + 2ab$$

$$\Leftrightarrow ab = \frac{-t^2 + 2ta + 2tb}{2} = t \left(\frac{-t + 2a + 2b}{2} \right) = (a + b + c) \left(\frac{-t + 2a + 2b}{2} \right)$$

Vậy ab chia hết cho $a + b + c$.

□

Câu 3. Cho các số thực dương a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(2b + c + a)^2} + \frac{1}{(2c + a + b)^2}$$

Lời giải.

Ta áp dụng BDT sau: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y} \Leftrightarrow \frac{1}{x + y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2a + b + c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2a + b + c} \right)^2 \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c} \right)^2 \leq \frac{2}{16} \left(\frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(a + c)^2} \right) \\ \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4ab} + \frac{1}{4ac} \right) \leq \frac{1}{8 \cdot 4 \cdot 2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \leq \frac{1}{64} \left(\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

$$\text{Tương tự, suy ra: } P \leq \frac{1}{64} \left(\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{4}{c^2} \right) = \frac{1}{64} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{3}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

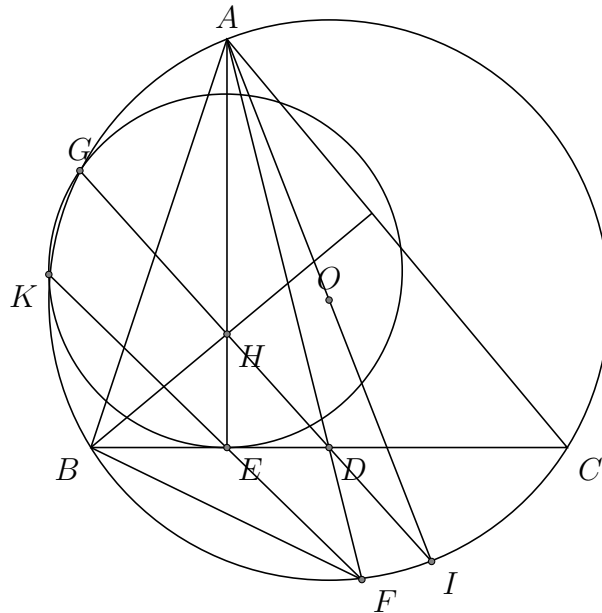
□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi D là trung điểm của cạnh BC , E là hình chiếu của A trên cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F .

a) Chứng minh $BC^2 = 4 \cdot DA \cdot DF$

- b) Tia DH cắt đường tròn (O) tại điểm G . Chứng minh bốn điểm A, G, E, D cùng thuộc một đường tròn.
- c) Đường thẳng FE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K . Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác GKE .

Lời giải.



- a) Xét $\triangle ADC \sim \triangle BDF (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DC}{DF}$
 $\Rightarrow AD \cdot DF = BD \cdot DC = \frac{BC^2}{4}$
 $\Rightarrow BC^2 = 4DA \cdot DF$
- b) Gọi I là điểm đối xứng với A qua $O \Rightarrow AI$ là đường kính của (O) .
 $\angle ABI = \angle ACI = 90^\circ$
 $\Rightarrow IB \parallel CH$ (cùng $\perp AB$) và $IC \parallel BH$ (cùng $\perp AC$)
 $\Rightarrow IBHC$ là hình bình hành $\Rightarrow HI$ đi qua trung điểm D của BC
 $\Rightarrow G, H, D, I$ thẳng hàng $\Rightarrow \angle DGA = 90^\circ$
 Ta có: $\angle DGA = \angle DEA = 90^\circ \Rightarrow AGED$ là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow A, G, E, D$ cùng nằm trên một đường tròn.
- c) Vì $AGED$ là tứ giác nội tiếp nên
 $\angle EGD = \angle EAD = 90^\circ - \angle EDA = 90^\circ - (\angle DEF + \angle DFE)$

$$\Rightarrow \angle KEB = \angle DEF = 90^\circ - (\angle EGD + \angle DFE) \quad (1)$$

Vì $AGKF$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle DFE = 180^\circ - \angle AGK = 90^\circ - \angle EGD - \angle EGK \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \angle KEB = 90^\circ - (90^\circ - \angle EGK) = \angle EGK$$

$$\Rightarrow \angle KEB = \angle EGK$$

Gọi Et là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle GKE$ (Et và G nằm khác phía đối với EK)

$$\Rightarrow \angle KEB = \angle KEt$$

$$\Rightarrow \angle KEt = \angle KEB \Rightarrow Et \equiv EB$$

Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle GKE$ (đpcm).

□

Câu 5. Ta viết lên bảng 99 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \dots, 99$. Ta thực hiện các thao tác sau: Xóa ba số a, b, c bất kì trên bảng rồi lại viết lên bảng số $(abc + ab + bc + ca + a + b + c)$. Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Tìm số còn lại đó.

Lời giải.

$$\text{Ta có } abc + ab + bc + ca + a + b + c = (a+1)(b+1)(c+1) - 1$$

Tại mỗi thao tác thứ nhất ta chọn xóa 3 số a, b, c và thay bằng $(a+1)(b+1)(c+1) - 1$, ta thấy thao tác này không làm thay đổi tích $S = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_i+1)$ với $a_1, a_2, \dots, a_i$ là tất cả các số còn lại trên bảng.

$$\text{Vì vậy số cuối cùng còn lại bằng: } (1+1)(2+1)(3+1)\dots(99+1) - 1 = 100! - 1$$

□

———— HẾT ————

utchuyen/9DT17-ChuyenTranHungDao-BinhThuan-V2

105

ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG

✧✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧✧

Câu 1.

1) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right) \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Tìm các giá trị của x để $Q = -1$.

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 2017m^2 - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thoả mãn $|x_1| - |x_2| = 2018$.

Lời giải.

1)

a) Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có

$$Q = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

b) Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có

$$Q = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = -\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

2) Dễ thấy phương trình đã cho có $ac = 1 \cdot (-2017m^2 - 1) < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < x_2$. Từ đó ta có $x_1 = m-1-\sqrt{\Delta'}$ và $x_2 = m-1+\sqrt{\Delta'}$.

Suy ra

$$|x_1| - |x_2| = 2018 \Leftrightarrow -m+1+\sqrt{\Delta'} - m+1-\sqrt{\Delta'} = 2018 \Leftrightarrow m = -1008.$$

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \sqrt{12-x}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Điều kiện của phương trình là $7 \leq x \leq 12$. Với điều kiện đó, phương trình tương đương

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{12-x} + \sqrt{x-7}$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 12-x+2\sqrt{12-x}\sqrt{x-7}+x-7$$

$$\Leftrightarrow x-4 = 2\sqrt{12-x}\sqrt{x-7}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = -4x^2 + 76x - 336$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 84x + 352 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{44}{5} \\ x = 8 \end{cases}$$

Thử lại, ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{44}{5}; 8 \right\}$.

b) Dễ thấy $x \neq 0$ và $y \neq 0$. Khi đó, hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \frac{x}{y} = \frac{10}{y^2} \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6 = \frac{10}{y^2} \end{cases}$$

Trừ hai phương trình theo vế ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 6 = 0$ hay $\frac{x}{y} = 2$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y^2 = 1$ hay $y = \pm 1$. Từ đó $x = \pm 2$.

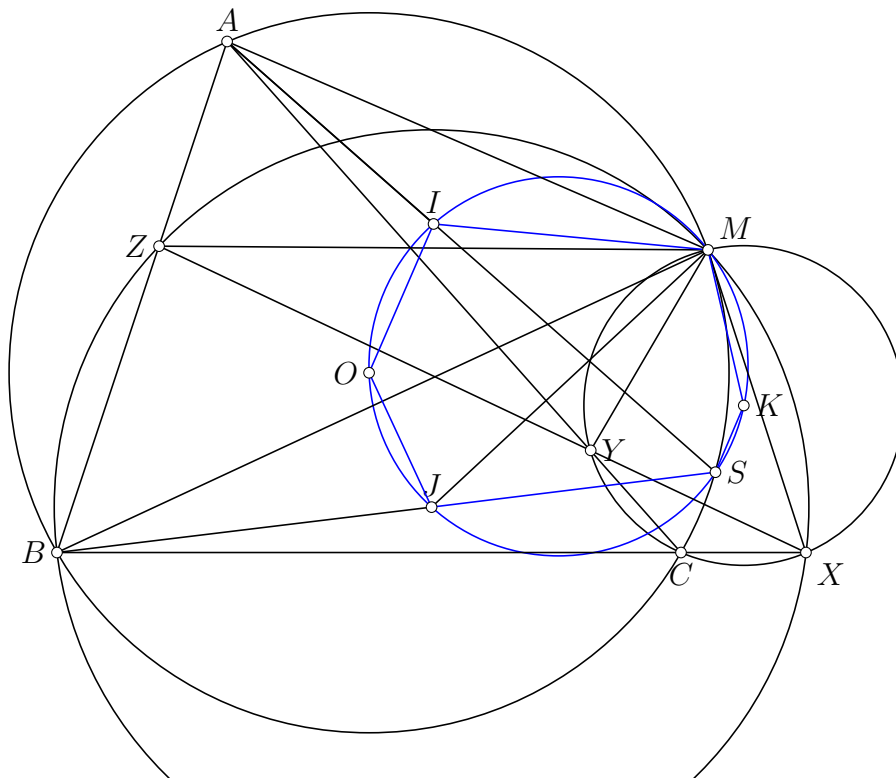
Vậy các nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(2; 1)$ và $(-2; -1)$.

□

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , Y trên cạnh CA , Z trên cạnh AB sao cho $\widehat{AZY} > 90^\circ$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ , S là giao điểm khác A của AI và đường tròn (O) .

- Chứng minh rằng $\widehat{SAC} = \widehat{AZY} - 90^\circ$.
- Gọi X là giao điểm của YZ và BC , M là giao điểm khác Y của các đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ và CXY . Chứng minh rằng M nằm trên đường tròn (O) .
- Gọi J, K là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác BZX và CXY , T là giao điểm của AI và BJ . Chứng minh rằng sáu điểm T, O, M, I, J, K cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



$$\text{a) Ta có } \widehat{AZY} = \frac{360^\circ - \widehat{AIY}}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{AIY}}{2} \Rightarrow \widehat{AZY} - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\widehat{AIY}}{2} = \widehat{IAY} = \widehat{SAC}.$$

- b) Do $\widehat{AMC} = \widehat{AMY} + \widehat{YMC} = \widehat{BZY} + \widehat{YXC} = 180^\circ - \widehat{ABC}$ nên M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay đường tròn (O) .
- c) Ta có $\widehat{ZMX} = \widehat{ZMY} + \widehat{XMY} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{XBZ}$ hay M thuộc đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác BZX .

Ta chứng minh $T \equiv S$. Thật vậy, ta có $\widehat{SBX} = \widehat{SAC} = \widehat{AZX} - 90^\circ = 90^\circ - \widehat{BZX} = 90^\circ - \frac{\widehat{BJX}}{2} = \widehat{JBX}$. Do tam giác BZX nhọn nên J nằm trong tam giác BZX , suy ra J nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A . Do tam giác $AZY > 90^\circ$ nên I nằm trong góc AZY và ngoài tam giác AZY , suy ra tia AC nằm giữa tia AB và AS , do đó S nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A . Vậy J và S nằm cùng nửa mặt phẳng bờ BX , do đó B, J, S thẳng hàng. Suy ra $T \equiv S$.

Dễ thấy OI, OJ là đường trung trực của MA, MB tương ứng nên $\widehat{IOJ} = 180^\circ - \widehat{AMB} = \widehat{ISJ}$ hay tứ giác $IOJS$ nội tiếp một đường tròn $(\mathfrak{C})$.

Tương tự IK và JK lần lượt là đường trung trực của MY và MX nên $\widehat{IKJ} = \widehat{XMY} = \widehat{ACB} = \widehat{ASB} = \widehat{ISJ}$ hay K thuộc $(\mathfrak{C})$.

Dễ thấy $\widehat{JMB} = \widehat{JBM} = \widehat{IAM} = \widehat{IMA}$, từ đó $\widehat{IMJ} = \widehat{IMB} + \widehat{JMB} = \widehat{IMB} + \widehat{IMA} = \widehat{AMB} = \widehat{ISJ}$ hay M thuộc đường tròn $(\mathfrak{C})$.

Vậy cả sáu điểm T, O, M, I, J, K cùng thuộc đường tròn $(\mathfrak{C})$.

□

Câu 4. Cho các số dương a, b, c , chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \geq 1.$$

Lời giải.

Ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{c+2a}{9a} + \frac{1}{3} &\geq \frac{a}{b} \\ \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{a+2b}{9b} + \frac{1}{3} &\geq \frac{b}{c} \\ \frac{c^4}{a^3(b+2c)} + \frac{b+2c}{9c} + \frac{1}{3} &\geq \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Lấy tổng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \geq \frac{8}{9} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - \frac{5}{3} \geq \frac{8}{9} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} - \frac{5}{3} = 1.$$

□

Câu 5.

- a) Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z sao cho $x^{16} + y^{16} + 2017 = z^{16}$.
- b) A và B chơi một trò chơi, A chơi trước. Ban đầu có n viên sỏi. Trong mỗi lượt chơi của mình, người chơi sẽ lấy ra 4, 5, hoặc 7 viên sỏi. Quá trình đó tiếp tục như vậy. Ai đến lượt chơi của mình mà không thể lấy thêm sỏi là thua cuộc. Biết cả hai đều là người chơi thông minh, chứng minh rằng nếu n có dạng $11k + l$ với $k, l \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq 3$ thì B thắng cuộc.

Lời giải.

a) Giả sử tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn bài toán.

- Trường hợp 1: z là số chẵn.

Khi đó x, y khác tính chẵn lẻ. Ta có thể coi x lẻ, y chẵn. Suy ra

$$x^{16} + 2017 \equiv z^{16} - y^{16} \equiv 0 \pmod{2^{16}} \Rightarrow x^{16} + 2017 \equiv 0 \pmod{64}.$$

Vì x lẻ nên $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$, do đó $x^{16} \equiv 1 \pmod{64}$. Suy ra $x^{16} + 2017 \equiv 34 \pmod{64}$.

Ta gặp mâu thuẫn.

- Trường hợp 2: z là số lẻ.

Khi đó x, y cùng tính chẵn lẻ. Nếu x, y cùng lẻ thì

$$1 \equiv z^{16} \equiv x^{16} + y^{16} + 2017 \equiv 2019 \pmod{64}.$$

hay $64 \mid 2018$. Vô lí.

Do đó x, y cùng chẵn. Suy ra

$$1 \equiv z^{16} \equiv x^{16} + y^{16} + 2017 \equiv 2017 \pmod{64}.$$

hay $64 \mid 2016$. Vô lí.

Vậy không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn bài toán.

b) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo k .

Nếu $k = 0$ thì hiển nhiên A thua.

Nếu $k = 1$ thì ta có chiến thuật chơi của B như sau. Trường hợp $0 \leq l \leq 1$, nếu A lấy 4, 5 hoặc 7 viên sỏi thì B tương ứng lấy 7, 5 và 4 viên sỏi. Trường hợp $2 \leq l \leq 3$, nếu A lấy 4, 5 hoặc 7 viên sỏi thì B tương ứng lấy ra 7, 7 hoặc 4 viên sỏi. Giả sử với mọi $m \leq k$, $m \in \mathbb{N}$ thì B luôn có chiến thuật chơi để thắng A . Ta chứng minh với $m = k + 1$ thì B cũng thắng.

Thật vậy, khi đó số viên sỏi là $11(k + 1) + l = 11k + l + 11$. Do giả thiết quy nạp nên B có chiến thuật chơi sao cho với $11k + l$ thì B thắng. Do đó chiến thuật chơi đó sẽ làm cho số sỏi còn dư lại của $11k + l$ viên là p với $0 \leq p \leq 3$. Ta quay lại trường hợp $k = 1$. Do đó với $n = 11(k + 1) + l$ thì B thắng.

Vậy theo nguyên lí quy nạp B luôn thắng.

□

———— HẾT ————

106

ĐỀ THI VÀO 10, SỞ GIÁO DỤC VĨNH LONG

✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧

Câu 1.

- a) Cho biểu thức $K = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x-10}{x+2\sqrt{x}-3}$. Rút gọn biểu thức K và tìm các giá trị của x để $K > 0$.
- b) Rút gọn giá trị biểu thức $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}} - \sqrt{7-\sqrt{3}}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } K &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2x-10)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x-1+x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6-2x+10}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ ta có: $K > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

- b) Ta có: $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}} = \sqrt{\sqrt{7-\sqrt{3}}^2 + 2\sqrt{(7-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} + \sqrt{\sqrt{3}-1}^2}$
 $= \sqrt{(\sqrt{7-\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1})^2}$
 $= |\sqrt{7-\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1}|$
 $= \sqrt{7-\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1}$. Vậy: $\sqrt{6+2\sqrt{8\sqrt{3}-10}} - \sqrt{7-\sqrt{3}} = \sqrt{7-\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1} - \sqrt{7-\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{3}-1}$.

□

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - 2x + 3 - m = 0$ (1) (m là tham số)

- a) Tìm m để phương trình có nghiệm.
- b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
 $A = -x_1^2 x_2^2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 4$.

Lời giải.

- a) Vì $a = 1 \neq 0$ Ta có: $\Delta = (-2)^2 - 4.1.(3-m) = m-2$

Để phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

- b) Theo định lí Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2; x_1.x_2 = 3-m$.

Khi đó: $A = -x_1^2 x_2^2 - 3((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) + 4 = 1 - m^2$.

Do $m \geq 2 \Rightarrow m^2 \geq 4 \Rightarrow -m^2 \leq -4 \Leftrightarrow 1 - m^2 \leq -3$.

Suy ra $A \leq -3$. Giá trị lớn nhất của A là -3 khi $m = 2$.

□

Câu 3.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$

- b) Giải phương trình $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$.

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x \cdot y \end{cases}$

Điều kiện $S^2 \geq 4P$.

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} S + 2P = 2 \\ S(S^2 - 3P) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{2-S}{2} \\ S\left(S^2 - \frac{6-3S}{2}\right) = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0 \Leftrightarrow (S - 2)(2S^2 + 7S + 8) = 0 \Leftrightarrow S = 2 \Rightarrow P = 0$.

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X = 0, X = 2$.

Kết luận: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

b) Điều kiện: $x \geq -2$.

Ta có: $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$

$\Leftrightarrow -2(x+2) + 2(x^2 - 2x + 4) - 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = 0$. (1)

Vì $x^2 - 2x + 4 > 0$ nên chia hai vế phương trình (1) cho $x^2 - 2x + 4$ ta được

$-2\left(\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}\right) - 3\sqrt{\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}} + 2 = 0$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}} \geq 0$ ta có $-2t^2 - 3t + 2 = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$ do $t \geq 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+2}{x^2 - 2x + 4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 4(x+2)$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{13} (n) \\ x = 3 - \sqrt{13} (n) \end{cases}$

□

Câu 4.

a) Tìm tất cả số nguyên x sao cho $2x^2 + x - 2$ chia hết cho $x^2 + 1$.

b) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{21}$.

Lời giải.

a) Ta có: $\frac{2x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = 2 + \frac{x - 4}{x^2 + 1}$

Xét $x = 4 \Rightarrow 2x^2 + x - 2$ chia hết cho $x^2 + 1$

Xét $x \neq 4$ để $(x - 4) : (x^2 + 1) \Rightarrow |x - 4| \geq x^2 + 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq x^2 + 1 \\ x - 4 \leq -x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 5 \leq 0 (1) \\ x^2 + x - 3 \leq 0 (2) \end{cases}$

Ta nhận thấy (1) vô nghiệm còn (2) kết hợp với điều kiện x là số nguyên suy ra $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$

Thử lại ta nhận giá trị $x = 0$.

Vậy $x \in \{0; 4\}$ thì $2x^2 + x - 6$ chia hết cho $x^2 + 1$

b) Điều kiện: $x, y \geq 0$

Ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{21} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{21} - \sqrt{x} \Rightarrow y = 21 + x - 2\sqrt{21x} \Rightarrow \sqrt{21x} \in \mathbb{N}$

Kết luận phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (0; 21)$ hoặc $(21; 0)$

1

c) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC . Đường thẳng đi qua N song song với AC cắt AP, AD lần lượt tại I, G . Chứng minh rằng $NI = NG$.

[illegible]

Từ (1); (2); (3) suy ra $\frac{NI}{AM} = \frac{NG}{AM} \Rightarrow NI = NG$.

□

Câu 6.a) Với a, b là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}.$$

b) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq 1.$$

Lời giải.a) Với a, b dương nên ta có: $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{(a+b)ab} \geq \frac{4ab}{(a+b)ab} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$ Dấu " = " xảy ra khi $a = b$ b) **Cách 1:**Áp dụng bất đẳng thức trên ta có: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq \frac{4}{xy+xz} \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq \frac{4}{x(y+z)}$.Mà $x + y + z = 4$ nên $y + z = 4 - x > 0$.

$$\text{suy ra } \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq \frac{4}{x(4-x)} \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq \frac{4}{-x^2 + 4x - 4 + 4}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq \frac{4}{-(x-2)^2 + 4} \quad (1).$$

Vì $y + z = 4 - x$ nên $x(4 - x) > 0$. Suy ra $4 \geq -(x-2)^2 + 4 > 0$.

$$\text{Do đó } \frac{4}{-(x-2)^2 + 4} \geq 1 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq 1.$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi } \begin{cases} x = 2 \\ xy = xz \\ x + y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = z = 1 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện } x, y, z > 0).$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } x(4-x) \leq \left(\frac{x+4-x}{2}\right)^2 \Rightarrow x(4-x) \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(4-x)} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4}{x(4-x)} \geq 1.$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi } \begin{cases} x = 2 \\ xy = xz \\ x + y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = z = 1 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện } x, y, z > 0).$$

□

————— HẾT —————

107**ĐỀ THI VÀO 10, CHUYÊN VINH PHÚC VÒNG 2****✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧**

Câu 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, trong đó thì m là tham số, x là ẩn số.

- a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.
 b) Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$. Chứng minh rằng $|x_1 + x_2 + x_1x_2| \leq \frac{9}{8}$.

Lời giải.

- a) Xét phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$ (1)

$$\Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$.

- b) Với $0 \leq m \leq 1$; Theo định lí Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } |x_1 + x_2 + x_1x_2| = |2m - 2 + 2m^2 - 3m + 1| = |2m^2 - m - 1| = |2(m - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{8}|.$$

$$\text{Với } 0 \leq m \leq 1 \text{ thì } 0 \leq 2(m - \frac{1}{4})^2 \leq \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{-9}{8} \leq 2(m - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{8} \leq \frac{9}{16} \Rightarrow |x_1 + x_2 + x_1x_2| \leq \frac{9}{8} \text{ (đpcm).}$$

□

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = m \end{cases}$, trong đó m là tham số và x, y là các ẩn số.

- a) Giải hệ phương trình với $m = 7$.
 b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Lời giải.

- a) Với $m = 7$ thì hệ là $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = 7 \end{cases} \quad (I)$

$$\text{Với } y = 0 \text{ thì hệ là } \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 4x^2 = 7 \end{cases} \text{ (vô lí). Vậy } y \neq 0.$$

$$\text{Khi đó } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = 7(2x^2 - xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ -10x^2 + 11xy - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ (x-y)(10x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ \begin{cases} x = y \\ 10x = y \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - x^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 10x \\ 2x^2 - 10x^2 = 1 \end{cases} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}.$$

- b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Như câu a, dễ thấy rằng $x = 0$ thì phương trình thứ nhất vô lí.

Với $x \neq 0$ ta rút y theo x từ phương trình thứ nhất rồi thế vào phương trình thứ hai ta có

$$c4x^2 + 4x \frac{2x^2 - 1}{x} - \left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right)^2 = m \Leftrightarrow 8x^4 - mx^2 - 1 = 0.$$

Đặt $t = x^2$ ta có phương trình $8t^2 - mt - 1 = 0(2)$.

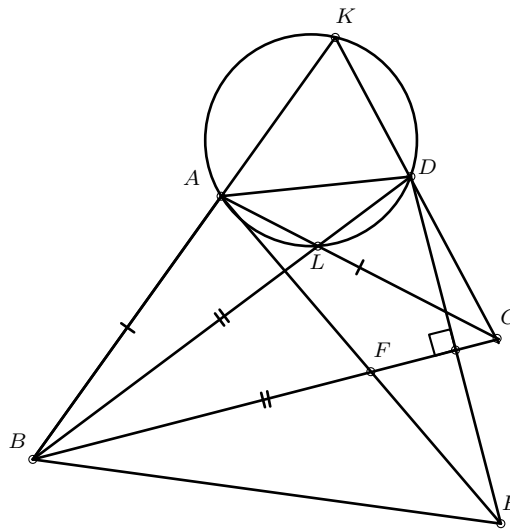
Yêu cầu bài toán trở thành phương trình (2) có nghiệm dương. Thấy rằng $a.c < 0$ nên điều này luôn đúng. Vậy với mọi số thực m thì hệ phương trình có nghiệm.

□

Câu 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ với AD, BC là hai cạnh đáy; $BC > AD, BC = BD = 1, AB = AC, CD < 1, \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$, gọi E là điểm đối xứng với D qua đường thẳng BC .

- Chứng minh rằng 4 điểm A, C, E, B cùng nằm trên một đường tròn và $\widehat{BEC} = 2\widehat{AEC}$.
- Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại điểm K , đường thẳng BC cắt đường thẳng AE tại điểm F . Chứng minh rằng $FA = FD$ và đường thẳng FD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK .
- Tính độ dài cạnh CD .

Lời giải.



- Do E đối xứng với D qua BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$.
 Có $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$, từ đó A, C, E, B cùng nằm trên một đường tròn.
 Có tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, kết hợp với tứ giác $ACEB$ nội tiếp ta được $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}, \widehat{ACB} = \widehat{BEA}$.
 Từ đó suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{BEA} \Rightarrow \widehat{BEC} = 2\widehat{AEC}$.
- Có $DE \perp BC, AD \perp BC \Rightarrow \triangle ADE$ vuông tại D và $FD = FE = FA$.
 Mặt khác $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDK} \Rightarrow$ tứ giác $AKDL$ nội tiếp.
 Có $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ (do $AD \parallel BC$), tứ giác $ACDB$ nội tiếp suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{CBE}$, do BC là trung trực của BE nên $\widehat{DBC} = \widehat{CBE}$. Do đó $\widehat{ADB} = \widehat{CAE}$ suy ra FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK , kết hợp với $FA = FD \Rightarrow FD$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK .

c) Do EF là phân giác của $\widehat{BEC}$, suy ra $\frac{FC}{FB} = \frac{CE}{EB} = CE$ (vì $BE = BD = 1$)

Ta có $\triangle AFC$ đồng dạng với $\triangle BFE$ nên ta có $\frac{AC}{AF} = \frac{BE}{BF}$

Áp dụng định lí Ptolemy có: $AE \cdot BC = AB \cdot CE + AC \cdot BE \Rightarrow 2AF = AC(1 + CE)$

$$\Rightarrow \frac{2}{1 + CE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{BC}{BF} = \frac{BF + FC}{BF} = 1 + \frac{FC}{BF} = 1 + CE.$$

$$\Rightarrow (1 + CE)^2 = 2 \Rightarrow 1 + EC = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow CD = CE = \sqrt{2} - 1.$$

□

Câu 4. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz(1)$. Mỗi bộ số $(x; y; z)$ trong đó x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn (1) được gọi là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

- Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương có dạng $(x; y; y)$ của phương trình (1).
- Chứng minh rằng tồn tại nghiệm nguyên dương $(a; b; c)$ của phương trình (1) và thỏa mãn điều kiện $\min\{a; b; c\} > 2017$. Trong đó kí hiệu $\min\{a; b; c\}$ là số nhỏ nhất trong các số $a; b; c$.

Lời giải.

- Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương là $(x; y; y)$. Khi đó ta có $x^2 + 2y^2 = 3xy^2$ từ đó x chia hết cho y hay $x = ty$ từ đó thay vào phương trình ta có $t^2 + 2 = 3ty$ từ đó 2 chia hết cho t tức là $t \in \{1; 2\}$.

Với $t = 1$ thì $y = 1; x = 1$

Với $t = 2$ thì $y = 1; x = 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương có dạng $(x; y; y)$ đó là $(1; 1; 1); (2; 1; 1)$.

- Dễ thấy $(1; 2; 5)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

Gọi nghiệm đầu tiên đó có dạng là $(a; b; c)$ ta sẽ xây dựng nên nghiệm mà giá trị $\min\{a; b; c\}$ là cao hơn. Thật vậy ta tìm nghiệm ở dạng $(a + d; b; c)$ tức là d thỏa mãn:

$$(a + d)^2 + b^2 + c^2 = 3(a + d)bc \Rightarrow d = 3bc - 2a \in \mathbb{N}^*.$$

Ta chọn được d khi đó ta sẽ có nghiệm $(a'; b; c)$ mà $\min\{a'; b; c\} > \min\{a; b; c\}$. Lặp lại quá trình này không quá 2017 lần ta có sẽ tìm được một nghiệm của phương trình thỏa mãn $\min\{a; b; c\} > 2017$.

□

Câu 5. Cho số tự nhiên $n > 1$ và $n + 2$ số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+2}$ thỏa mãn điều kiện $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{n+2} \leq 3n$. Chứng minh rằng tồn tại hai số $a_i, a_j (1 \leq j < i \leq n + 2)$ sao cho $a < a_i - a_j < 2n$.

Lời giải.

Với mỗi k đặt $b_i = a_i + k \Rightarrow a_i - a_j = b_i - b_j (2)$. Do đó ta có thể chọn k sao cho $b_{n+2} = 3n$ và chuyển về xét dãy số $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{n+2} = 3n$. Khi đó ta chỉ cần chứng minh sự tồn tại hai số $b_i, b_j (1 \leq j < i \leq n + 2)$ sao cho $n < b_i - b_j < 2n$.

Xét 2 trường hợp:

- Nếu tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ sao cho $n < b_j < 2n$ thì ta có $n < b_{n+2} - b_j < 2n$.
- Nếu với mọi $j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, ta có $b_j \notin [n + 1; 2n - 1]$ thì các số $b_1, b_2, \dots, b_{n+1} \in \{1, 2, \dots, 3n - 1\} \setminus \{n + 1, \dots, 2n - 1\}$. Các số thuộc tập $\{1, 2, \dots, 3n - 1\} \setminus \{n + 1, \dots, 2n - 1\}$ chia thành các cặp số: $(1; 2n), (2; 2n + 1), \dots, (n; 3n - 1)$. Do đó trong $n + 1$ số $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$

phải tồn tại 2 số b_i, b_j thuộc cùng một cặp, hay là $n < b_i - b_j = 2n - 1 < 2n$. Theo (2) từ cặp số b_i, b_j thỏa mãn $n < b_i - b_j = 2n - 1 < 2n$ thì tồn tại cặp số a_i, a_j thỏa mãn $n < a_i - a_j = 2n - 1 < 2n$.

□

———— HẾT ————

108**ĐỀ THI VÀO 10, TRƯỜNG THPT NĂNG KHIẾU****✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧****Câu 1.** Biết a, b là các số dương $a \neq b$ và

$$\left(\frac{(a+2b)^2 - (2a+b)^2}{a+b} \right) : \left(\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a-b} - 3ab \right) = 3$$

Tính $S = \frac{1+2ab}{a^2+b^2}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(a+2b)^2 - (2a+b)^2}{a+b} \right) : \left(\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a-b} - 3ab \right) \\ &= \left(\frac{(3a+3b)(b-a)}{a+b} \right) : \left(\frac{a^3 - b^3}{a-b} - 3ab \right) \\ &= (3(b-a)) : \left(\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a-b} \right) \\ &= (3(b-a)) : \frac{(a-b)^3}{a-b} \\ &= \frac{3}{b-a} \end{aligned}$$

Từ giả thiết ta suy ra được $b-a=1 \Rightarrow b=a+1$ Thay vào S ta được:

$$S = \frac{1+2a(a+1)}{a^2+(a+1)^2} = \frac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1$$

□

Câu 2.a) Giải phương trình: $(x^2 - 6x + 5)(\sqrt{x-2} - x + 4) = 0$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x+2y} - 3) = 0 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6 \end{cases}$$

Lời giải.a) Điều kiện xác định $x \geq 2$

$$\bullet x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 5 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{x-2} - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x-2 = x^2 - 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

Kết luận, tập nghiệm của phương trình là $S = \{5; 6\}$

b) Giải hệ phương trình:

Điều kiện xác định: $x \geq 0$ và $y \geq -\frac{x}{2}$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+2y} - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

TH₁: $x = 0$

$$\Rightarrow -y^2 = 6 \text{ (loại)}$$

$$\begin{aligned}
TH_2: x + 2y = 9 &\Rightarrow x = 9 - 2y \\
&\Rightarrow (9 - 2y)^2 - 6(9 - 2y)y - y^2 = 6 \\
&\Rightarrow 15y^2 - 90y + 75 = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} y = 5 \Rightarrow x = -1 \text{ (loại)} \\ y = 1 \Rightarrow x = 7 \text{ (nhận)} \end{cases} \\
\text{Vậy tập nghiệm của hệ là: } (x; y) &= (7; 1)
\end{aligned}$$

□

Câu 3. Cho phương trình $(x + m)^2 - 5(m + x) + 6 = 0$ (1).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi số thực m .

$$\text{Tính } S = (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 + 5(x_1 + x_2 + 2m).$$

b) Biết $x_1 < x_2$. Tìm m sao cho $x_2 < 1$ và $x_1^2 + 2x_2 = 2(m - 1)$

Lời giải.

a) Đặt $t = x + m$ (1) trở thành:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow x = 3 - m \\ t = 2 \Rightarrow x = 2 - m \end{cases}$$

Vì $3 - m \neq 2 - m$ với mọi m nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Khi đó, } S = t_1^2 + t_2^2 + 5(t_1 + t_2) = 2^2 + 3^2 + 5(2 + 3) = 38$$

b) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 = 2 - m, x_2 = 3 - m$

$$x_2 < 1 \Rightarrow 3 - m < 1 \Rightarrow m > 2$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 2(m - 1) \Leftrightarrow (3 - m)^2 + 2(2 - m) = 2m - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m = 6$$

□

Câu 4.

a) Nam kể với Bình rằng ông của Nam có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ được chia thành bốn phần: hai phần (gồm các hình vuông $AMIQ$ và $INCP$ với M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA) để trồng rau sạch, các phần còn lại để trồng hoa. Tổng diện tích phần để trồng rau sạch là $1200m^2$ và tổng diện tích phần để trồng hoa là $1300m^2$. Bình nói: "Chắc chắn bạn bị nhầm rồi!". Nam: "Bạn nhanh thật. Mình đã nói nhầm phần diện tích. Chính xác là phần trồng rau sạch có diện tích $1300m^2$ và phần trồng hoa có diện tích $1200m^2$. Hãy tính cạnh hình vuông $AMIQ$ (biết $AM < MB$) và giải thích tại sao Bình lại biết Nam bị nhầm.

b) Lớp 9T có 30 bạn, mỗi bạn dự định mỗi tháng đóng góp 70000 đồng và sau 3 tháng sẽ đủ tiền mua tặng mỗi em ở "Mái ấm tình thương X" ba gói quà (giá tiền mỗi gói quà đều như nhau). Khi các bạn đủ số tiền dự trù thì "Mái ấm tình thương X" đã nhận chăm sóc thêm 9 em gái và giá tiền của mỗi gói quà lại tăng thêm 5% nên chỉ có thể tặng mỗi em hai gói quà. Hỏi "Mái ấm tình thương X" có bao nhiêu em được nhận quà?

Lời giải.

a) Đặt $AM = x$ (m), $CP = y$ (m).

$$\text{Từ giả thiết ta được } x^2 + y^2 = 1300 \text{ và } 2xy = 1200.$$

Áp dụng định lý Vi-ét đảo ta được
$$\begin{cases} x = 20, y = 30 \\ x = 30, y = 20 \end{cases}$$

Vì $MA < MB$ nên $MA = 20m$,

b) Gọi x là số thành viên ban đầu của "Mái ấm tình thương X ".

Tổng số tiền lớp 9T dự định đóng góp là: $30.3.70000 = 6300000$ (đồng)

Từ giả thiết ta có phương trình: $\frac{6300000}{3x}(1 + 0,05) = \frac{6300000}{2(x+9)} \Leftrightarrow x = 21$

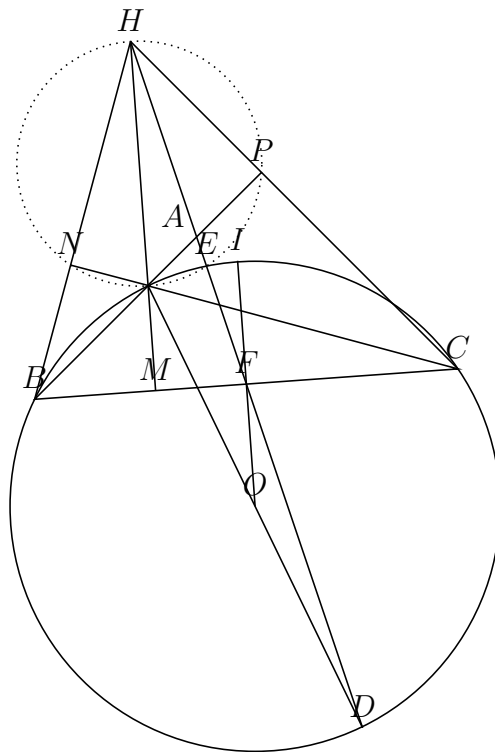
Vậy số em của "Mái ấm tình thương X " được nhận quà là: $21 + 9 = 30$ em.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) tâm O , bán kính R , $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$, H là trực tâm. AH, BH, CH lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P

- Tính AC theo R . Tính số đo góc $\widehat{HPN}$ và tỉ số $\frac{MP}{MN}$.
- Dựng đường kính AD ; HD cắt (T) tại E ($E \neq D$) và cắt BC tại F . Chứng minh các điểm A, H, N, P, E cùng thuộc một đường tròn và F là trung điểm HD .
- Chứng minh $AD \perp NP$. Tia OF cắt (T) tại I , chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và AI đi qua trung điểm MP .

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 90^\circ$, nên $\triangle AOC$ vuông cân tại O .

Do đó: $AC = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2}$.

Ta có: $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 15^\circ$

Tứ giác $BCNP$ nội tiếp đường tròn đường kính BC , suy ra:

$$\widehat{HPN} = 90^\circ - \widehat{PNB} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

Ta có: $\widehat{NPA} = \widehat{ACB} = \widehat{APM}$, nên $\widehat{NPM} = 2\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Tương tự, $\widehat{MNP} = 2\widehat{CBA} = 90^\circ$.

$$\text{Do đó: } \frac{MN}{MP} = \sin \widehat{NPM} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

b) Ta có AD là đường kính nên $\widehat{AED} = 90^\circ$

Do đó các điểm A, N, H, P, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Mặt khác $AC \perp BD$ và $AC \perp CD$ nên $BH \parallel CD$.

Tương tự, $CH \parallel BD$, nên $BHCD$ là hình bình hành.

Suy ra F là trung điểm HD .

c) Ta có $\widehat{CNP} = \widehat{CBP} = 45^\circ = \widehat{NCO}$, nên $NP \parallel CO$.

Mà $CO \perp AD$, nên $NP \perp AD$.

Từ câu b) suy ra F là trung điểm cạnh BC , nên OF là trung trực của BC .

Mà I thuộc OF , suy ra $\widehat{BIO} = \frac{1}{2}\widehat{BIC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Do đó tam giác BIO đều, suy ra $IB = IO = R$. Tương tự $IC = R$.

Hơn nữa, ta được F là trung điểm IO , do đó $OHID$ là hình bình hành.

Suy ra $IH = OD = R$.

Vậy $IH = IB = IC$, nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

Ta có $\triangle ABM$ vuông cân tại M , nên $MA = MB$, mà $OA = OB$, suy ra $OM \perp AB$.

Do đó $OM \parallel HP$.

Mà $MH \parallel OP$, nên $MHPO$ là hình bình hành, suy ra $MH = OP$.

Do $AH = OI$, nên $AM = IP$, suy ra $AMIP$ là hình bình hành.

Do đó AI đi qua trung điểm của MP .

□

———— HẾT ————

PHẦN



ĐỀ THI HSG LỚP 9

1 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - QUẬN BA ĐÌNH - TP HÀ NỘI NĂM 2017**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - 2\sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}.$

b) $B = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}$ với $a \neq 0; b \neq 0; |a| > |b|.$

Lời giải.

a) Ta có

$$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - 2\sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{5})^3} = 2\sqrt{5} - 3 - 2(1 + \sqrt{5}) = -5.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2} \\
 &= \frac{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a - \sqrt{a^2 - b^2})} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^4 - a^2b^2}} \\
 &= \frac{4a\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - (a^2 - b^2)} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^4 - a^2b^2}} \\
 &= \frac{4a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \cdot \frac{b^2}{|a|\sqrt{a^2 - b^2}} \\
 &= \frac{4a}{|a|}.
 \end{aligned}$$

□

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{3} - x} = x\sqrt{\sqrt{3} + x}.$

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 3.$

Chứng minh rằng $\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} > \frac{2018}{2013}.$

Lời giải.a) ĐK: $0 \leq x \leq \sqrt{3}.$

Đặt $t = x\sqrt{3}$ hay $x = \frac{t}{\sqrt{3}}.$

Với $t \geq 0$, phương trình trên tương đương với

$$\sqrt{\sqrt{3} - \frac{t}{\sqrt{3}}} = \frac{t}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{3} + \frac{t}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \sqrt{3 - t} = \frac{t}{\sqrt{3}} \sqrt{3 + t} \Leftrightarrow t^2(3 + t) = 3(3 - t)$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)^3 = 10 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{10} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy $x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}}.$

b) Ta có $\frac{a}{1 + b^2} = \frac{a(1 + b^2) - ab^2}{1 + b^2} = a - \frac{ab^2}{1 + b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$ (Áp dụng BDT Cô-si)

Tương tự ta có: $\frac{b}{1 + c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1 + a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$

Mặt khác

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$$

Nên

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

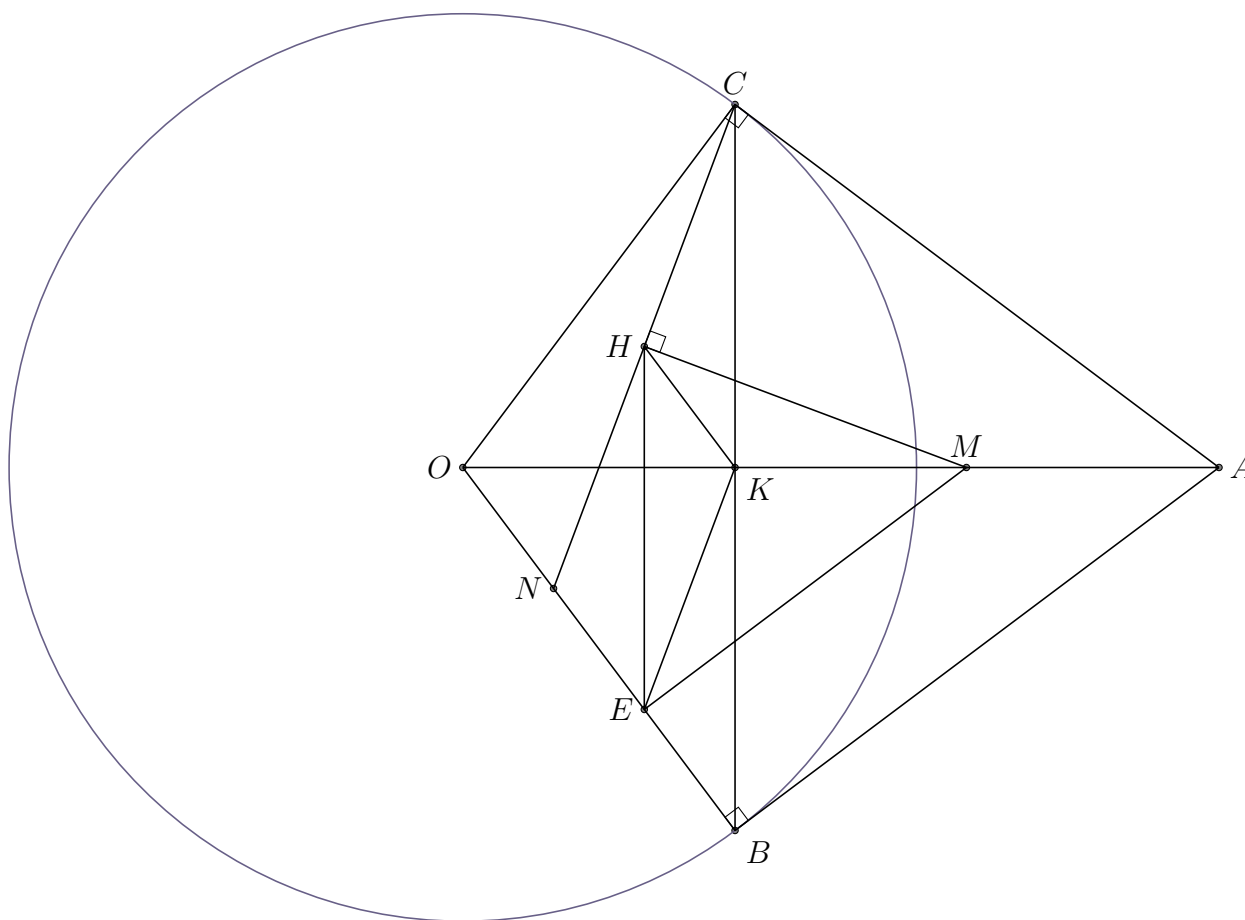
$$\Leftrightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > \frac{2018}{2013}$$

(đpcm).

□

Câu 3. Từ điểm A ở ngoài đường tròn tâm O , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) , (B, C là các tiếp điểm). Trên đoạn OB lấy điểm N sao cho $BN = 2ON$. Đường trung trực của đoạn thẳng CN cắt OA tại M , tính tỉ số $\frac{AM}{AO}$.

Lời giải.



Gọi I, E, K là trung điểm NC, NB, BC . Suy ra K là giao điểm của BC và OA .

Ta có EI là đường trung bình trong $\triangle NBC \Rightarrow EI \parallel BC \Rightarrow OM \perp EI$.

Ta lại có EK là đường trung bình trong $\triangle NBC \Rightarrow EK \parallel NC \Rightarrow EK \perp IM$.

Từ đó K là trực tâm $\triangle IME$.

Mặt khác IK cũng là đường trung bình trong $\triangle NBC \Rightarrow IK \parallel NB \Rightarrow EM \perp NB$.

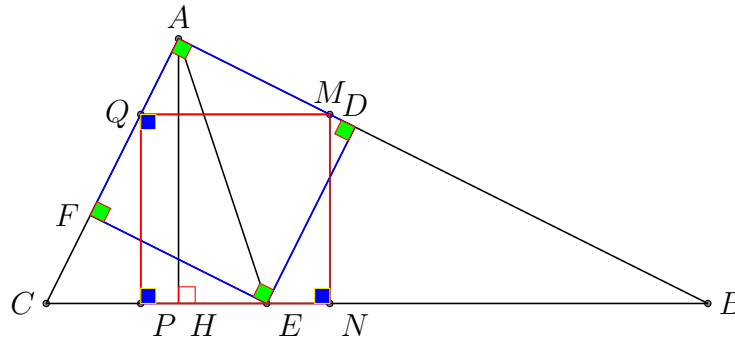
Hơn nữa $NB \perp AB \Rightarrow EM \parallel AB$

Áp dụng định lý Ta-lét ta có $\frac{AM}{AO} = \frac{OE}{OB} = \frac{2}{3}$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Các tứ giác $MNPQ$ và $ADEF$ là các hình vuông sao cho: M thuộc cạnh AB ; N, P thuộc cạnh BC ; Q thuộc cạnh AC ; D, E, F tương ứng thuộc các cạnh AB, BC, AC . So sánh diện tích các hình vuông $MNPQ, ADEF$.

Lời giải.



Gọi r, R là cạnh các hình vuông $ADEF, MNPQ$ và đặt $AB = c, AC = b, BC = a$.
Kẻ đường cao $AH = h$ của tam giác ABC .

Ta có

$$S_{ACB} = S_{AEB} + S_{AEC} = \frac{1}{2}ED \cdot AB + \frac{1}{2}EF \cdot AC = \frac{1}{2}r(AB + AC) = \frac{1}{2}r(b + c)$$

$$\text{Mà } S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}ah$$

$$\text{Từ đó suy ra } r = \frac{ah}{b + c}.$$

Do $MN \parallel AH$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{MN}{AH} = \frac{BM}{BA}$.

Và $MQ \parallel BC$ nên theo định lý Ta-lét ta có $\frac{MQ}{BC} = \frac{AM}{AB}$.

$$\text{Nên } \frac{MN}{AH} + \frac{MQ}{BC} = \frac{BM}{BA} + \frac{AM}{AB} \Leftrightarrow \frac{R}{h} + \frac{R}{a} = 1 \Leftrightarrow R = \frac{ah}{a + h}.$$

$$\text{Mặt khác } (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = b^2 + c^2 + 2bc + h^2 = (b + c)^2 + h^2 > (b + c)^2.$$

$$\text{Do đó } r^2 = \frac{a^2h^2}{(b + c)^2} > R^2 = \frac{a^2h^2}{(a + h)^2} \Leftrightarrow S_{ADEF} > S_{MNPQ}.$$

□

Câu 5.

- Tìm tất cả các số nguyên x để $\sqrt{x + 19}; \sqrt{2x + 10}; \sqrt{3x + 13}; \sqrt{4x + 37}$ đều là số nguyên.
- Trong buổi gặp có 294 người tham gia, những người quen nhau bắt tay nhau. Biết rằng nếu A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu cái bắt tay.

Lời giải.

- Đặt $\sqrt{x + 19} = a; \sqrt{4x + 37} = b, (a, b \in \mathbb{Z}^+)$

Ta có

$$4a^2 - b^2 = 39 \Leftrightarrow (2a - b)(2a + b) = 39$$

Do $2a > b$ và $a, b \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có 2 trường hợp

$$\bullet \begin{cases} 2a - b = 1 \\ 2a + b = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 19 \end{cases} \Leftrightarrow x = 81, \text{ thử lại thấy sai nên loại.}$$

$$\bullet \begin{cases} 2a - b = 3 \\ 2a + b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3, \text{ thử lại thấy đúng nên nhận.}$$

Vậy $x = -3$.

- b) Do A bắt tay B thì một trong hai người A và B bắt tay không quá 6 lần nên những tham dự hội nghị có số cái bắt tay hoặc hơn 6 hoặc không quá 6.

Giả sử X là tập hợp những người bắt tay hơn 6 lần, Y là tập hợp những người bắt tay không quá 6 lần. $|X| = m, |Y| = n$

Ta có $X \cap Y = \emptyset$ và $m + n = 294$.

Nhận xét: những người trong cùng tập hợp thì không bắt tay với nhau.

Tổng số cái bắt tay $S \leq n \times \min\{6; 294 - n\}$.

Ta có các khả năng sau đây

- $\min = 1 \Rightarrow n = 293 \Rightarrow S = 293$
- $\min = 2 \Rightarrow n = 292 \Rightarrow S = 584$
- $\min = 3 \Rightarrow n = 291 \Rightarrow S = 873$
- $\min = 4 \Rightarrow n = 290 \Rightarrow S = 1160$
- $\min = 5 \Rightarrow n = 289 \Rightarrow S = 1445$
- $\min = 6 \Rightarrow 294 - n \geq 6 \Rightarrow n \leq 288 \Rightarrow S \leq 288 \times 6 = 1728$

Do đó $S \leq 1728$. Vậy có nhiều nhất 1728 cái bắt tay.

□

———— HẾT ————

2 ĐỀ THI TOÁN 9 HSG, TP. ĐÀ NẴNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M > 4$.

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

a) Do $a > 0, a \neq 1$ nên: $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$
 và $\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$
 $\Rightarrow M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$

b) Ta có $0 < N = \frac{6}{M} < \frac{3}{2}$ do đó N chỉ có thể nhận được một giá trị nguyên là 1

$$\text{Mà } N = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a-4\sqrt{a}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2=3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}=2+\sqrt{3} \text{ hay } \sqrt{a}=2-\sqrt{3} \text{ (phù hợp)}$$

$$\text{Vậy, } N \text{ nguyên} \Leftrightarrow a=(2\pm\sqrt{3})^2$$

□

Câu 2.

a) Cho các hàm số bậc nhất: $y = 0,5x + 3$, $y = 6 - x$ và $y = mx$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng (d_1) , (d_2) và (Δ_m) . Với những giá trị nào của tham số m thì đường thẳng (Δ_m) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại hai điểm A và B sao cho điểm A có hoành độ âm còn điểm B có hoành độ dương?

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1;2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N ; từ đó, suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$.

Lời giải.

a) Điều kiện để (Δ_m) là đồ thị hàm số bậc nhất là $m \neq 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (Δ_m) là:

$$0,5x + 3 = mx \Leftrightarrow (m - 0,5)x = 3$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm âm là $m - 0,5 < 0$ hay $m < 0,5$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_2) và (Δ_m) là:

$$6 - x = mx \Leftrightarrow (m + 1)x = 6$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm dương là $m + 1 > 0$ hay $m > -1$

Vậy điều kiện cần tìm là: $-1 < m < 0,5; m \neq 0$

b) Đặt $m = x_M$ và $n = y_N \Rightarrow m.n \neq 0$ và $m \neq 1$

(*)

Nên đường thẳng qua ba điểm M, I, N có dạng: $y = ax + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = am + b \\ 2 = a + b \\ n = b \end{cases} \Rightarrow \text{hệ thức liên hệ giữa } m \text{ và } n \text{ là } 2m + n = mn$$

Chia hai vế cho $m.n \neq 0$ ta được: $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$ (**)

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{mn} = 5\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5};$$

dấu “=” xảy ra khi $\frac{2}{m} = \frac{1}{n}$; kết hợp (**): $m = 5, n = 2, 5$ (thỏa (*))

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{1}{5}$

□

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 17x + 2y = 2011|xy| \\ x - 2y = 3xy \end{cases}$$

b) Tìm tất cả các giá trị của x, y, z sao cho:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-z} + \sqrt{z-x} = \frac{1}{2}(y+3).$$

Lời giải.

a) Nếu $xy > 0$ thì khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{17}{y} + \frac{2}{x} = 2011 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1007}{9} \\ \frac{1}{x} = \frac{9}{490} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{490} \\ y = \frac{9}{1007} \end{cases} \text{ (phù hợp)}$$

Nếu $xy < 0$ thì khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{17}{y} + \frac{2}{x} = -2011 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{-1004}{9} \\ \frac{1}{x} = -\frac{1031}{18} \end{cases} \Rightarrow xy > 0 \text{ (loại)}$$

Nếu $xy = 0$ thì khi đó hệ đã cho tương đương với $x = y = 0$ (nhận).

Vậy hệ có đúng 2 nghiệm là $(0; 0)$ và $\left(\frac{9}{490}; \frac{9}{1007}\right)$

b) Điều kiện $x \geq 0; y - z \geq 0; z - x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq z \geq x \geq 0$

$$\text{Theo BĐT Cauchy: } \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}; \sqrt{y-z} \leq \frac{y-z+1}{2}; \sqrt{z-x} \leq \frac{z-x+1}{2}$$

$$\Rightarrow VP = \sqrt{x} + \sqrt{y-z} + \sqrt{z-x} \leq \frac{1}{2}(y+3) = VT$$

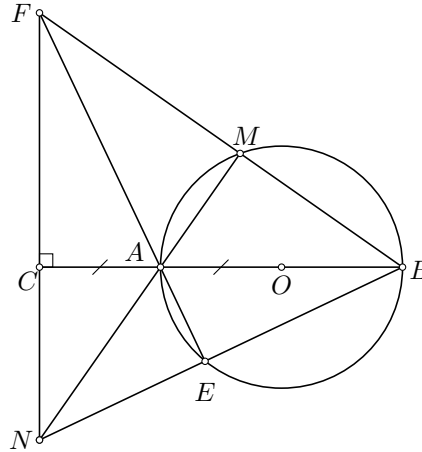
$$\text{Do đó } \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y-z} = 1 \\ \sqrt{z-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \text{ thỏa điều kiện} \\ z = 2 \end{cases}$$

□

Câu 4. Cho đường tròn (C) với tâm O và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (C) sao cho M không trùng với các điểm A và B . Lấy C là điểm đối xứng của O qua A . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N . Đường thẳng BN cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là E . Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F .

- Chứng minh rằng các điểm A, E, F thẳng hàng.
- Chứng minh rằng tích $AM \cdot AN$ không đổi.
- Chứng minh rằng A là trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất

Lời giải.



- $MN \perp BF$ và $BC \perp NF$.
 $\Rightarrow A$ là trực tâm của tam giác BNF .
 $\Rightarrow FA \perp NB$.
 Lại có $AE \perp NB$.
 Nên A, E, F thẳng hàng.
- $\widehat{CAN} = \widehat{MAB}$, nên hai tam giác ACN và AMB đồng dạng.
 Suy ra: $\frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AM}$
 Hay $AM \cdot AN = AB \cdot AC = 2R^2$ không đổi (với R là bán kính đường tròn (C)).
- Ta có $BA = \frac{2}{3}BC$ nên A là trọng tâm tam giác $BNF \Leftrightarrow C$ là trung điểm NF . (1)
 Mặt khác: $\widehat{CAN} = \widehat{CFM}$, nên hai tam giác CNA và CBF đồng dạng.
 $\Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{AC}{CF} \Rightarrow CN \cdot CF = BC \cdot AC = 3R^2$.
 Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $NF = CN + CF \geq 2\sqrt{CN \cdot CF} = 2R\sqrt{3}$ không đổi.
 Nên: NF ngắn nhất $\Leftrightarrow CN = CF \Leftrightarrow C$ là trung điểm NF . (2)
 Từ (1) và (2) cho ta: A là trọng tâm tam giác $BNF \Leftrightarrow NF$ ngắn nhất.

□

Câu 5. Tìm ba chữ số tận cùng của tích của mười hai số nguyên dương đầu tiên.

Lời giải.

Đặt: $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$
 $\Rightarrow \frac{S}{100} = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12$ là một số nguyên. (1)
 $\Rightarrow$ Hai chữ số tận cùng của S là 00.

Mặt khác, trong suốt quá trình nhân liên tiếp các thừa số ở vế phải của (1), nếu chỉ để ý đến chữ số tận cùng, ta thấy $\frac{S}{100}$ có chữ số tận cùng là 6 (vì $3 \cdot 4 = 12$; $2 \cdot 6 = 12$; $2 \cdot 7 = 14$; $4 \cdot 8 = 32$; $2 \cdot 9 = 18$; $8 \cdot 11 = 88$; $8 \cdot 12 = 96$).

Vậy ba chữ số tận cùng của S là 600.

□

———— **HẾT** ————

3 ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9, LÂM ĐỒNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Rút gọn $A = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}} - \sqrt{127 + 48\sqrt{7}}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{64 - 2.8.3\sqrt{7} + 63} + \sqrt{64 + 2.8.3\sqrt{7} + 63} \\ &= \sqrt{(8 - 3\sqrt{7})^2} + \sqrt{(8 + 3\sqrt{7})^2} \\ &= |8 - 3\sqrt{7}| + |8 + 3\sqrt{7}| \\ &= 8 - 3\sqrt{7} + 8 + 3\sqrt{7} = 16 \end{aligned}$$

Vậy $A = 16$. □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = (3m^2 - 7m + 5)x - 2011$ (*). Chứng minh hàm số (*) luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3m^2 - 7m + 5 &= 3\left(m^2 - \frac{7}{3}m\right) + 5 = 3\left(m^2 - 2.\frac{7}{6}m + \frac{49}{36} - \frac{49}{36}\right) + 5 \\ &= 3\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{12} + 5 \\ &= 3\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} > 0 \text{ với mọi } m \end{aligned}$$

Do đó hàm số (*) luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m . □

Câu 3. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $3x + y - 1 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 3x^2 + y^2$.

Lời giải.

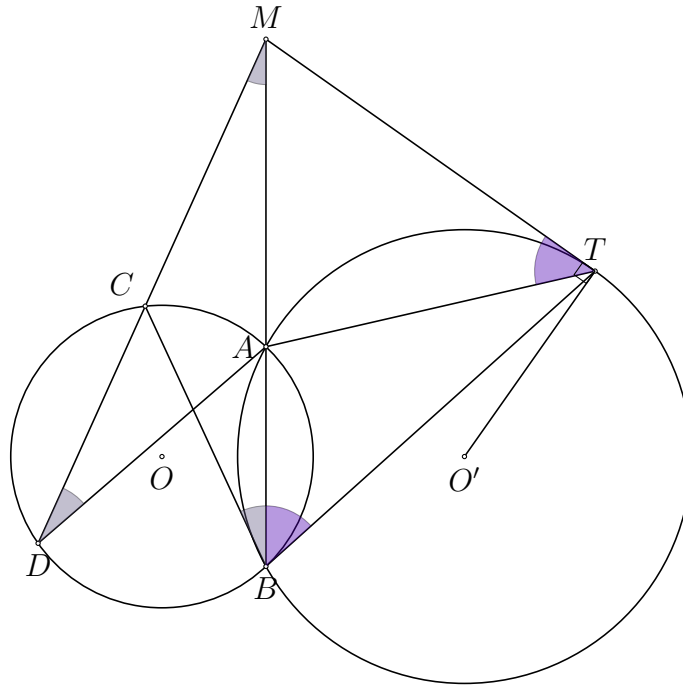
Ta có $3x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 3x$. Do đó

$$\begin{aligned} B &= 3x^2 + (1 - 3x)^2 = 12x^2 - 6x + 1 = 12\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{48}\right] \\ &= 12\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vậy GTNN của B là $\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{4}$. □

Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Trên đường thẳng AB lấy điểm M sao cho A nằm giữa M và B . Từ M kẻ cát tuyến MCD với đường tròn (O) và tiếp tuyến MT với đường tròn (O') (T là tiếp điểm). Chứng minh $MC \cdot MD = MT^2$.

Lời giải.



Xét $\triangle MCB$ và $\triangle MAD$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DMB} \text{ chung} \\ \widehat{MDA} = \widehat{MBC} (= \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AC}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MCB \sim \triangle MAD \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MD} \text{ hay } MC.MD = MA.MB \quad (1)$$

Xét $\triangle MTA$ và $\triangle MBT$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BMT} \text{ chung} \\ \widehat{MTA} = \widehat{MBT} (= \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AT}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MTA \sim \triangle MBT \Rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \text{ hay } MT^2 = MA.MB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MC.MD = MT^2$ (đpcm) □

Câu 5. Chứng minh tổng $C = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2011}$ chia hết cho 15.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2011} \\ &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots + (2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010} + 2^{2011}) \\ &= (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^4(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{2008}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &= 15(1 + 2^4 + \dots + 2^{2008}) : 15 \end{aligned}$$

Vậy C chia hết cho 15. □

Câu 6. Phân tích đa thức $x^3 - x^2 - 14x + 24$ thành nhân tử.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 14x + 24 &= x^3 + 4x^2 - 5x^2 - 20x + 6x + 24 \\ &= x^2(x + 4) - 5x(x + 4) + 6(x + 4) \\ &= (x + 4)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x + 4)(x - 3)(x - 2) \end{aligned}$$

□

Câu 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ z^2 = 2xy - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - x - y)^2 = 2xy - 4 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Câu 8. Chứng minh $D = n(n+1)(n+2)(n+3)$ không phải là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} D &= n(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) \\ &\Rightarrow (n^2 + 3n)^2 < D < (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 \\ &\Rightarrow (n^2 + 3n)^2 < D < (n^2 + 3n + 1)^2 \end{aligned}$$

Do đó D không phải là số chính phương vì $(n^2 + 3n)^2$ và $(n^2 + 3n + 1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp. □

Câu 9. Cho hai số dương a và b . Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a} + b \text{ (Vĩ } (a+b)ab > 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

□

Câu 10. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2x^2 - xy - y^2 - 8 = 0$.

Lời giải.

Ta có

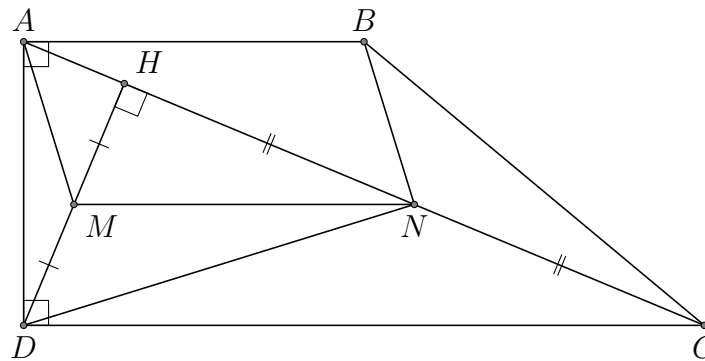
$$\begin{aligned} 2x^2 - xy - y^2 - 8 = 0 &\Leftrightarrow (2x+y)(x-y) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm tự nhiên của hệ là $(3; 2)$ và $(2; 0)$. □

Câu 11. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), có $DC = 2AB$. Kẻ DH vuông góc với AC ($H \in AC$), gọi N là trung điểm của CH .

Chứng minh BN vuông góc với DN .

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của DH .

MN là đường trung bình của $\triangle HDC \Rightarrow MN \parallel CD, MN = \frac{1}{2}CD$

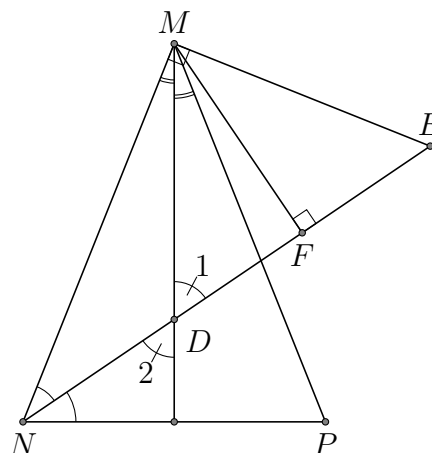
Do đó $MN \parallel AB, MN = AB \Rightarrow$ tứ giác $ABNM$ là hình bình hành.

Xét $\triangle ADN$ có $MN \parallel AB \Rightarrow MN \perp AD$ và $DH \perp AN$

nên M là trực tâm của $\triangle ADN \Rightarrow AM \perp DN \Rightarrow BN \perp DN$ (vì $ABNM$ là HBH). $\square$

Câu 12. Cho tam giác MPN cân tại M ($\widehat{M} < 90^\circ$). Gọi D là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác MPN . Biết $DM = 2\sqrt{5}\text{cm}$, $DN = 3\text{cm}$. Tính độ dài MN .

Lời giải.



Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt ND tại E . Kẻ $MF \perp DN$.

Ta có $\widehat{E} + \widehat{MND} = 90^\circ$ (1)

$\widehat{DNP} + \widehat{D_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DNP} + \widehat{D_1} = 90^\circ$ (2)

Do $\widehat{MND} = \widehat{DNP}$ nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{D_1} \Rightarrow \triangle MDE$ cân tại M .

$\Rightarrow MD = ME = 2\sqrt{5}(\text{cm})$ và $EF = DF$.

$\triangle MNE$ vuông tại M . Ta có

$ME^2 = EF \cdot EN = EF \cdot (2EF + DN)$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 = EF \cdot (2EF + 3)$

$\Leftrightarrow 2EF^2 + 3EF - 20 = 0 \Leftrightarrow (EF + 4)(2EF - 5) = 0 \Rightarrow EF = 2,5 (\text{vì } EF > 0).$

Dễ dàng tính được $MN = 2\sqrt{11}(\text{cm})$.



———— HẾT ————

4 ĐỀ THI HSG LỚP 9, NGHỆ AN, BẢNG A

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ và $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.
- b) Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}, n > 1$). Chứng minh rằng A không là số chính phương

Lời giải.

- a) Với số nguyên x , ta có

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1) : 6.$$

Do đó

$$S - P = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_n^3 - a_n) : 6.$$

Suy ra $S : 6 \Leftrightarrow P : 6$.

- b) Ta có $A = n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2)$.

- Với $n = 2$, ta có $n^4 - n^2 + 2n + 2 = 18$ không là số chính phương nên A không là số chính phương.
- Với $n \geq 3$, ta có $n^2 - 2n - 2 > 0$ nên

$$(n^2 - 1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1 < n^4 - n^2 + 2n + 2 < (n^2)^2,$$

do đó $n^4 - n^2 + 2n + 2$ không là số chính phương.

Từ đó ta có A không là số chính phương với mọi $n \geq 2$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình: $10\sqrt{x^3 + 1} = 3x^2 + 6$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}.$$

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x \geq -1$.

Ta có $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, $x^2 + 2 = (x^2 - x + 1) + (x+1)$.

Đặt $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{x^2 - x + 1}$ ta có phương trình

$$10ab = 3a^2 + 3b^2 \Leftrightarrow (3a - b)(a - 3b) = 0 \Leftrightarrow a = 3b, b = 3a.$$

- $a = 3b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$. Phương trình vô nghiệm.
- $b = 3a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{33}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5 \pm \sqrt{33}$.

- b) Từ phương trình $x + \frac{1}{y} = 3$ ta có $x = \frac{3y-1}{y}$, thay vào phương trình thứ ba ta được
- $$z = 3 - \frac{1}{x} = 3 - \frac{y}{3y-1} = \frac{8y-3}{3y-1}.$$

Thay z và phương trình thứ hai ta có

$$y + \frac{3y-1}{8y-3} = 3 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ là $x = y = z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

□

Câu 3.

- a) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

- b) Cho các số thực dương thỏa mãn $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải.

- a) Với $a, b, c, d > 0$ ta có

$$\frac{1}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+y+z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ \frac{1}{x+2y+z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ \frac{1}{x+y+2z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right). \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

- b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2011 số gồm 2 số x^{2011} và 2009 số 1 ta có

$$2x^{2011} + 2009 = x^{2011} + x^{2011} + 1 + \dots + 1 \geq 2011 \sqrt[2011]{x^{2 \cdot 2011}} = 2011 \cdot x^2.$$

Tương tự:

$$2y^{2011} + 2009 \geq 2011 \cdot y^2, \quad 2z^{2011} + 2009 \geq 2011 \cdot z^2.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có

$$2011(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2(x^{2011} + y^{2011} + z^{2011}) + 3 \cdot 2009 = 3 \cdot 2011.$$

Suy ra $M \leq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy $\max M = 3$.

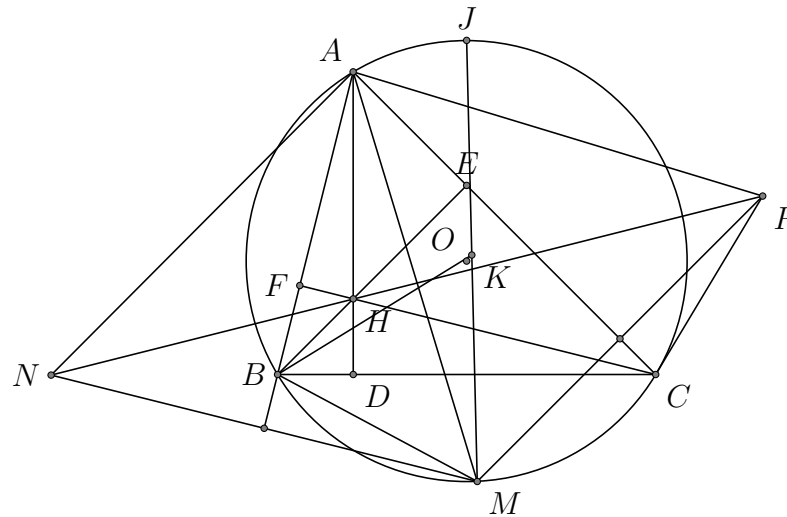
□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm nằm trên cung BC không chứa A (M không trùng với B và C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB và AC .

- a) Chứng minh rằng ba điểm N, H, P thẳng hàng.

- b) Khi $\widehat{BOC} = 120^\circ$, xác định vị trí của điểm M để $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



- a) Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C . Ta có tứ giác $CDHE$ nội tiếp và M, N đối xứng nhau qua AB , nên

$$\widehat{AHE} = \widehat{ACB} = \widehat{AMB} = \widehat{ANB}.$$

Suy ra tứ giác $ANBH$ nội tiếp, nên

$$\widehat{NHB} = \widehat{NAB} = \widehat{BAM}.$$

Tương tự $\widehat{PHC} = \widehat{CAM}$. Từ đó, suy ra

$$\widehat{NHB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHP} = \widehat{BAM} + \widehat{BHC} + \widehat{MAC} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ.$$

Suy ra N, H, P thẳng hàng.

- b) Gọi J là điểm chính giữa cung lớn BC , trên đoạn MJ lấy K sao cho $MB = MK$. Ta có $\widehat{BIC} = 120^\circ$ và $\triangle JKB = \triangle CM$, nên $JK = CM$. Do đó $BM + CM = MK + KJ = JM$. Khi đó

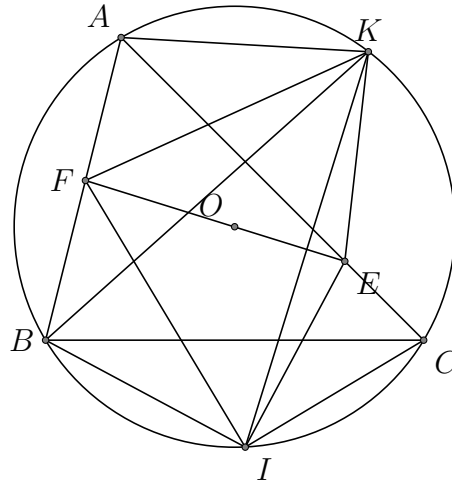
$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{4}{MB + MC} = \frac{4}{JM} \geq \frac{4}{2R}.$$

Đẳng thức xảy ra khi M là điểm chính giữa cung BC .

□

Câu 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F . Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



- Nếu $\widehat{BAC} = 90^\circ$ thì $\widehat{BIC} = 90^\circ$, khi đó EF là đường kính nên EF đi qua O .
- Xét $\widehat{BAC} < 90^\circ$, khi đó $\widehat{BIC} > 90^\circ$. Gọi K là điểm đối xứng với I qua EF , ta có $\widehat{EIF} = \widehat{EAF}$ (cùng bù với $\widehat{BIC}$), $\widehat{EKF} = \widehat{EIF}$, suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$ nên tứ giác $AEKF$ nội tiếp, hay $K \in (O)$. Mà EF là đường trung trực đoạn IK nên EF đi qua O .
- $\widehat{BAC} > 90^\circ$ thì $\widehat{BIC} < 90^\circ$. Chứng minh tương tự ta cũng có EF đi qua O .

Vậy EF luôn đi qua điểm cố định O . □

————— **HẾT** —————

5 ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9, QUẢNG BÌNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$ với $4 < x \leq 8$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
b) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

Lời giải.

- a) Với $4 < x \leq 8$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x-4+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4-4}\sqrt{x-4+4}}{\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}\right)^2}} = \frac{|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|}{\left|1-\frac{4}{x}\right|} \\ &= \frac{\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}}{\frac{x-4}{x}} = \frac{4x}{x-4}. \end{aligned}$$

- b) Ta có: $A = 4 + \frac{16}{x-4}$ với $4 < x \leq 8$.

Do đó với x nguyên, A nguyên khi và chỉ khi $x-4$ là ước của 16.

$$\text{Kết hợp với điều kiện đã cho ta có: } \begin{cases} x-4=1 \\ x-4=2 \\ x-4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=6 \\ x=8 \end{cases}.$$

□

Câu 2. Số đo hai cạnh góc vuông của một tam giác là nghiệm của phương trình bậc hai

$$(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$$

Xác định m để số đo đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác đã cho là $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2 là số đo hai cạnh góc vuông của tam giác đã cho, vì chúng là nghiệm của phương trình bậc hai $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$ nên ta có điều kiện:

$$\begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \frac{m}{m-2} > 0 \\ \frac{m-1}{m-2} > 0 \end{cases}. \quad (*)$$

Từ giả thiết bài toán ta có:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{5}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2 - 4m + 4}{m^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 3m^2 - 16m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = 4; m = \frac{4}{3}.$$

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $m = 4$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy: $m = 4$ là giá trị cần tìm. $\square$

Câu 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc (O) và (O') tại C và D . Qua A kẻ đường thẳng song song CD cắt (O) và (O') lần lượt tại M và N . Các đường thẳng BC, BD lần lượt cắt MN tại P và Q . Các đường thẳng CM, DN cắt nhau tại E . Chứng minh rằng:

- Các đường thẳng AE và CD vuông góc nhau.
- Tam giác EPQ cân.

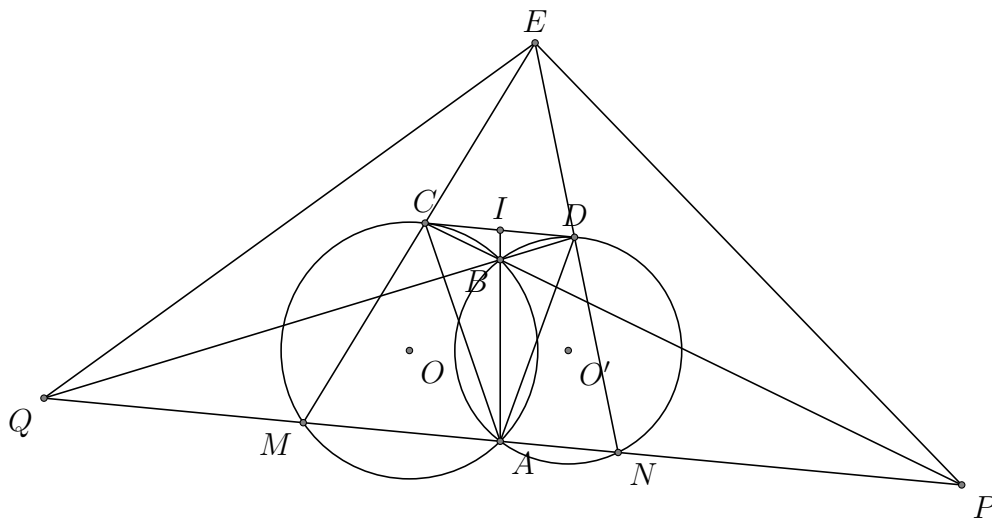
Lời giải.

- Ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{CMA}$ (đồng vị), $\widehat{CDA} = \widehat{CMA}$ (cùng chắn cung $\widehat{CA}$).

Nên $\widehat{ECD} = \widehat{CDA}$. Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{EDC} = \widehat{CDA}$.

Suy ra: $\triangle CDE = \triangle CDA(g.c.g) \Rightarrow CE = CA \Rightarrow \triangle CEA$ cân tại C .

Theo chứng minh trên thì CD là đường phân giác của $\widehat{ECA}$. Nên: $CD \perp AE$.



- Gọi I là giao điểm của CD và AB . Ta có: $\widehat{IAD} = \widehat{IDB}$ (cùng chắn cung $\widehat{BD}$)

$$\Rightarrow \triangle IAD \sim \triangle IDB(g.g) \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{ID}{IB} \Rightarrow ID^2 = IA \cdot IB.$$

Chứng minh tương tự ta có: $IC^2 = IA \cdot IB$. Suy ra: $IC^2 = ID^2 \Rightarrow IC = ID$.

$$\text{Ta có: } CD \parallel PQ \Rightarrow \frac{CI}{AP} = \frac{BI}{BA} = \frac{DI}{AQ}.$$

Vì: $CI = DI \Rightarrow AP = AQ$ hay A là trung điểm PQ .

Mặt khác: $CD \perp AE, CD \parallel PQ$ nên: $PQ \perp AE$. Vậy tam giác EPQ có AE vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên nó là tam giác cân. $\square$

Câu 4. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3 \Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{z^2 x^2}{y^2} \geq 3$$

Mặt khác: $\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \geq 2y^2$; $\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geq 2z^2$; $\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \geq 2x^2$.

Suy ra: $\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geq x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Vậy $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. □

Câu 5. Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn: $a^5 + b^5 = 4(c^5 + d^5)$. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ chia hết cho 5.

Lời giải.

Ta chứng minh $(n^5 - n) : 5$.

Ta có:

$$\begin{aligned}(n^5 - n) &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1) \\ &= [(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)] : 5\end{aligned}$$

Suy ra:

$$a^5 - a + b^5 - b + c^5 - c + d^5 - d = [5(c^5 + d^5) - (a + b + c + d)] : 5$$

$$\Rightarrow (a + b + c + d) : 5$$

□

———— HẾT ————

6 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI, AN GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Khử căn ở mẫu số biểu thức sau:

$$A = \frac{59}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}.$$

b) Tính tổng sau:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2013}}.$$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{59}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{8 + 2\sqrt{15} - 7} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(1 - 2\sqrt{15})}{(1 + 2\sqrt{15})(1 - 2\sqrt{15})} \\ &= \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(1 - 2\sqrt{15})}{1 - 60} \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1). \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2}}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Áp dụng tính chất trên cho từng số hạng của tổng trên ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2013}} = \frac{\sqrt{2013}}{2} - \frac{\sqrt{2011}}{2}.$$

$$\text{Cộng theo từng vế ta được: } S = \frac{\sqrt{2013} - \sqrt{3}}{2}.$$

□

Câu 2. Cho đa thức: $Q(x) = x^4 + 3x^2 + 1$.

a) Phân tích đa thức $Q(x)$ thành nhân tử.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 = x^4 + 3x^2 + 1$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\
 &= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \\
 &= \left(x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
 &= \left(x^2 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \left(x^2 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

b) Phương trình $y^2 = x^4 + 3x^2 + 1$.

- Nếu $x = 0$ thì $y^2 = 1$ hay $y = \pm 1$.
- Với $x \neq 0$, do x là số nguyên nên ta có:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2x^2 + 1 &< x^4 + 3x^2 + 1 < x^4 + 4x^2 + 4 \\
 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 &< y^2 < (x^2 + 2)^2 \\
 \Leftrightarrow x^2 + 1 &< |y| < x^2 + 2.
 \end{aligned}$$

Do $x^2 + 1$ và $x^2 + 2$ là hai số nguyên liên tiếp nên không tồn tại số nguyên nào nằm giữa hai số nguyên liên tiếp này. Vậy trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(0; 1)$ và $(0; -1)$.

□

Câu 3.

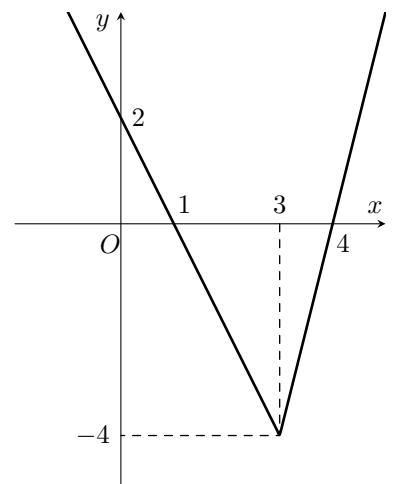
- Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = |3x - 9| + x - 7$.
- Giải phương trình $3\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2 + 9}} + \sqrt{x^2} - 7 = 0$.

Lời giải.

$$a) \ y = f(x) = |3x - 9| + x - 7 = \begin{cases} 4x - 16 & \text{khi } x \geq 3 \\ -2x + 2 & \text{khi } x < 3. \end{cases}$$

- Với $x \geq 3$ đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 4x - 16$ qua hai điểm $(3; -4)$ và $(4; 0)$.
- Với $x < 3$ đồ thị hàm số là đường thẳng $y = -2x + 2$ qua hai điểm $(0; 2)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số như hình vẽ:



b) Giải phương trình $3\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2} + 9} + \sqrt{x^2} - 7 = 0$.

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2} + 9} + \sqrt{x^2} - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt{|x|^2 - 6|x| + 9} + |x| - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt{(|x| - 3)^2} + |x| - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3||x| - 3| + |x| - 7 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = |x|$ (với $t \geq 0$) ta được phương trình:

$$\begin{aligned} & 3|t - 3| + t - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & |3t - 9| + t - 7 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Dựa vào đồ thị ở câu trên, ta thấy phương trình (*) có hai nghiệm là $t = 1$ và $t = 4$ (đều thỏa mãn $t \geq 0$).

- Với $t = 1$ ta được $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- Với $t = 4$ ta được $|x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-4; -1; 1; 4\}$.

□

Câu 4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + my = 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm, tìm nghiệm đó.
- Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x + 2y + 1)^2 + (3x + my - 1)^2.$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 & (1) \\ 3x + my = 1 & (2). \end{cases}$$

- Từ phương trình (1) suy ra $x = -1 - 2y$, thế vào phương trình (2) ta được:

$$3(-1 - 2y) + my = 1 \Leftrightarrow (m - 6)y = 4 \quad (3)$$

- Nếu $m = 6$ thì phương trình (3) vô nghiệm. Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu $m \neq 6$ thì phương trình (3) có nghiệm $y = \frac{4}{m - 6}$. Khi đó $x = \frac{-m - 2}{m - 6}$. Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(\frac{-m - 2}{m - 6}; \frac{4}{m - 6}\right)$.

- $P = (x + 2y + 1)^2 + (3x + my - 1)^2$.

- Với $m = 6$, ta được: $P = (x + 2y + 1)^2 + (3x + 6y - 1)^2 = (x + 2y + 1)^2 + (3x + 6y + 3 - 4)^2$.
Đặt $t = x + 2y + 1$, khi đó

$$\begin{aligned} P &= t^2 + (3t - 4)^2 \\ &= 10t^2 - 24t + 16 \\ &= 10\left(t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{6}{5} + \frac{36}{25} + \frac{4}{25}\right) \\ &= 10\left(t - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{8}{5} \geq \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x + 2y + 1 = \frac{6}{5}$.

- Với $m \neq 6$, ta được:

$$P = (x + 2y + 1)^2 + (3x + my - 1)^2 \geq 0.$$

Dấu “=” xảy ra khi x và y là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + my = 1. \end{cases}$$

Vậy:

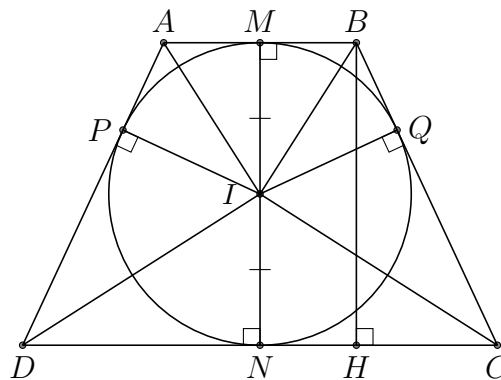
- $m = 6$ thì giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{8}{5}$.
- $m \neq 6$ thì giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.

□

Câu 5. Cho hình thang cân $ABCD$ cạnh bên là AD và BC ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính $R = 2$.

- Chứng minh rằng hai tam giác IAD và IBC vuông.
- Cho $AB = 2x$ ($0 < x < 2$). Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo x .

Lời giải.



- Hình thang ngoại tiếp đường tròn tâm I nên tâm I của đường tròn nằm trên MN với M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Gọi P, Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với cạnh AD và BC của hình thang.

Khi đó: $BM = BQ; CN = CQ$ (hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm ở ngoài đường tròn).

Suy ra $\triangle IBM = \triangle IBQ$, suy ra IB là phân giác của $\widehat{MIQ}$.

Và $\triangle ICQ = \triangle ICN$, suy ra IC là phân giác của $\widehat{NIQ}$.

Vậy $\widehat{BIC} = 90^\circ$ (hai phân giác của hai góc kề bù).

Hay tam giác IBC vuông tại I .

Tương tự ta được tam giác IAD vuông tại I .

- Theo chứng minh trên ta có $BM = BQ; CN = CQ$.

Suy ra $BC = BM + CN$.

Do M là trung điểm của AB nên $MB = x$.

Từ B kẻ BH vuông góc CD , tam giác BHC vuông tại H ta được:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2$$

$$\Leftrightarrow (2x + HC)^2 = 4^2 + HC^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4xHC + HC^2 = 4^2 + HC^2$$

$$\Leftrightarrow 4xHC = 4^2 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow HC = \frac{4 - x^2}{x}.$$

Do đó diện tích của hình thang $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot MN = \frac{1}{2} \left[2x + 2x + \frac{2(4 - x^2)}{x} \right] \cdot 4 = 4 \left(2x + \frac{4 - x^2}{x} \right).$$

□

———— HẾT ————

7 HSG TOÁN 9, HUYỆN BÌNH GIANG, TỈNH HẢI DƯƠNG

✦✦✦ NỘI DUNG ĐỀ ✦✦✦

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Rút gọn A .
- Chứng tỏ rằng $A < \frac{1}{3}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \\ A &= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ A &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

b) Xét $\frac{1}{3} - A = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x+\sqrt{x}+1}$.

Với mọi $x \geq 0, x \neq 1$ ta có $(\sqrt{x}-1)^2 > 0$ và $x+\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên suy ra $\frac{1}{3} - A > 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{3}$.

□

Câu 2.

- Giải phương trình $x - \sqrt{x-15} = 17$.
- Tìm x, y sao cho $5x - 2\sqrt{x}(2+y) + y^2 + 1 = 0$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định $x \geq 15$.

$$x - \sqrt{x-15} = 17 \Leftrightarrow x - 15 - \sqrt{x-15} - 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-15} \ (t \geq 0) \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ suy ra } \sqrt{x-15} = 2 \Leftrightarrow x - 15 = 4 \Leftrightarrow x = 19.$$

b) Điều kiện xác định $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} 5x - 2\sqrt{x}(2+y) + y^2 + 10 &\Leftrightarrow 4x - 4\sqrt{x} + 1 + x - 2y\sqrt{x} + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{x}-y)^2 = 0. (1) \end{aligned}$$

Vì $(2\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{x}-y)^2 \geq 0$ với mọi $x \geq 0, y$ nên để (1) xảy ra thì

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}-1=0 \\ \sqrt{x}-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

□

Câu 3.

- Tìm số nguyên x , sao cho $x^2 + x - p = 0$ với p là số nguyên tố.
- Tìm m để hàm số bậc nhất $y = \frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3}x - 2011$ là hàm số nghịch biến.

Lời giải.

- a) Theo bài ta có $p = x^2 + x = x(x + 1)$. Mà $x, x + 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên suy ra p là số chẵn.

Mặt khác p là số nguyên tố nên $p = 2$.

Suy ra $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$.

- b) Để hàm số $y = \frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3}x - 2011$ nghịch biến thì $\frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3} < 0$. (1)

Ta có $m^2 - 2\sqrt{2}m + 3 = (\sqrt{2} - m)^2 + 1 \geq 0$ với mọi m nên (1) tương đương với

$$m^2 - 2013m + 2012 < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 2012) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m - 2012 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2012.$$

□

Câu 4. 1) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$, hai đường cao BE và CF của tam giác cắt nhau tại H . Kẻ đường kính AK của đường tròn $(O; R)$, gọi I là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh $AH = 2IO$.

- b) Biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$, tính độ dài dây BC theo R .

2) Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$), $BC = a$. Gọi bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là r . Chứng minh rằng $\frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

Lời giải.

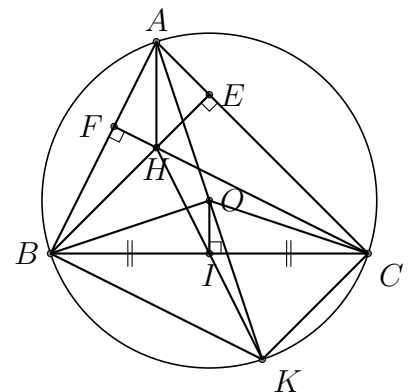
1)

- a) Vì B, C thuộc đường tròn đường kính AK nên $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$.

Suy ra $KB \perp AB, KC \perp AC$.

Mà $CH \perp AB, BH \perp AC$ (gt) nên suy ra $BK \parallel CH, CK \parallel BH$.

Suy ra $BHCK$ là hình bình hành. Mà I là trung điểm BC nên suy ra I là trung điểm HK .



Từ đó ta có OI là đường trung bình của $\triangle KAH$ nên $OI = \frac{1}{2}AH$ hay $AH = 2OI$.

- b) Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.

$\triangle BOC$ cân tại O và có OI là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác và đường cao. Suy ra $\widehat{BOI} = \widehat{COI} = 60^\circ$ và $OI \perp BC$.

Xét tam giác COI vuông tại I , ta có $IC = OC \cdot \sin \widehat{COI} = R \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.

Suy ra $BC = 2IC = R\sqrt{3}$.

$$2) \frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Leftrightarrow 2r \leq a\sqrt{2}-a \Leftrightarrow 2r+a \leq a\sqrt{2}. \quad (1)$$

$$AB+AC = AE+EB+AF+FC = OF+BD+OE+CD = 2r+a.$$

Ta cần chứng minh $AB+AC \leq BC\sqrt{2}$. (2)

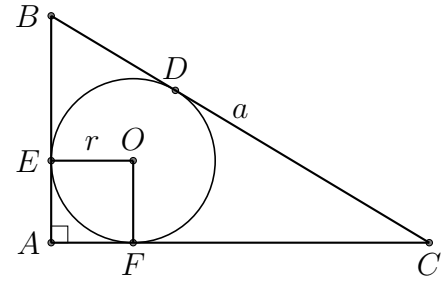
$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow AB^2 + 2AB \cdot AC + AC^2 \leq 2BC^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + 2AB \cdot AC + AC^2 \leq 2AB^2 + 2AC^2$$

$$\Leftrightarrow (AB-AC)^2 \geq 0. \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy ta có $\frac{r}{a} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A.

□



Câu 5. Cho $x+3y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = x^2 + y^2$.

Lời giải.

Do $x+3y \geq 1$ nên đặt $x+3y = 1+a$, với $a \geq 0$. Suy ra $x = 1+a-3y$, thay vào biểu thức C ta có

$$C = 10y^2 - 6ay - 6y^2 + a^2 + 2a + 1$$

$$= 10 \left[y - \frac{3}{10}(a+1) \right]^2 + \frac{1}{10}(a^2 + 2a) + \frac{1}{10} \geq \frac{1}{10}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} y - \frac{3}{10}(a+1) = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{1}{10}$ khi $x = \frac{1}{10}$ và $y = \frac{3}{10}$.

□

———— HẾT ————

8 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI, TP. ĐÀ NẴNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1} + \frac{\sqrt{n+1}+3}{\sqrt{n+1}-3} - \frac{n-\sqrt{n+1}+7}{n-2\sqrt{n+1}-2}$ với $n \in \mathbb{N}, n \neq 8$

- a) Rút gọn biểu thức $Q = \frac{P}{n+3\sqrt{n+1}+1}$ với $n \in \mathbb{N}, n \neq 8$.
 b) Tìm tất cả các giá trị của n ($n \in \mathbb{N}, n \neq 8$) sao cho P là một số nguyên tố.

Lời giải.

a) Quy đồng $P = \frac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}-3) + (\sqrt{n+1}+3)(\sqrt{n+1}+1) - (n-\sqrt{n+1}+7)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-3)}$.

Do đó $P = \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+1)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-3)} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-3}$.

Suy ra $Q = \frac{P}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+3)} = \frac{1}{n-8}$.

b) $P = 1 + \frac{3}{\sqrt{n+1}-3}$. Để P là số nguyên thì $\sqrt{n+1}-3$ là ước của 3.

Suy ra $\sqrt{n+1}-3 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 3; 15; 35\}$. Thử lại ta thấy $n = 35$ thì $P = 2$ là số nguyên tố.

□

Câu 2.

a) Tìm x biết $2\sqrt{x+4} - 4\sqrt{2x-6} = x-7$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+6 = 4\sqrt{y-4} \\ y+10 = 6\sqrt{z-9} \\ z-16 = 2\sqrt{x-1} \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Điều kiện $-4 \leq x \leq 3$

Phương trình đã cho tương đương với $(\sqrt{x+4}+1)^2 = (\sqrt{2x-6}+2)^2$.

Do đó ta có $\begin{cases} \sqrt{x+4}+1 = \sqrt{2x-6}+2 \\ \sqrt{x+4}+1 = -\sqrt{2x-6}-2 \text{ (vô lý)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$.

b) Điều kiện $x \geq 1, y \geq 4, z \geq 9$.

Cộng theo vế ta có $x+y+z-2\sqrt{x-1}-4\sqrt{y-4}-6\sqrt{z-9}=0$.

Phương trình trên tương đương với $(\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-4}-2)^2 + (\sqrt{z-9}-3)^2 = 0$.

Do đó $\begin{cases} \sqrt{x-1}-1=0 \\ \sqrt{y-4}-2=0 \\ \sqrt{z-9}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \\ z=18 \end{cases}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

□

Câu 3.

- a) Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị đi qua điểm $M(1; 4)$. Biết rằng đồ thị của hàm số đã cho cắt trục Ox tại điểm P có hoành độ dương và cắt trục Oy tại điểm Q có tung độ dương. Tìm a và b sao cho $OP + OQ$ nhỏ nhất (với O là gốc tọa độ).

- b) Tìm số tự nhiên có 2 chữ số. Biết rằng nếu lấy tổng của 2 chữ số ấy cộng với 3 lần tích của 2 chữ số ấy thì bằng 17.

Lời giải.

- a) Giả sử P có tọa độ $(p; 0)$ và Q có tọa độ $(0; q)$. Khi đó ta có
$$\begin{cases} 0 = ap + b \\ q = a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = q \\ a = -\frac{q}{p} \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số đã cho đi qua $M(1; 4)$ nên $4 = -\frac{q}{p} \cdot 1 + q \Rightarrow 1 = \frac{1}{p} + \frac{4}{q} \geq \frac{(1+2)^2}{p+q}$.

Do đó $OP + OQ = p + q \geq 9$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{p} = \frac{4}{q} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 8 \end{cases}.$

Vậy $\begin{cases} a = -4 \\ b = 8 \end{cases}$

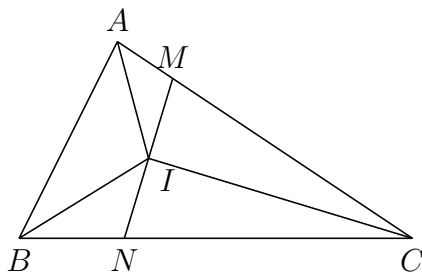
- b) Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ ($0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, a, b \in \mathbb{N}$).

Khi đó ta có phương trình $a + b + 3ab = 17 \Rightarrow a = \frac{17-b}{1+3b}$. Thử các giá trị của b từ 0 đến 9 ta nhận được các số tự nhiên sau: 14 và 41.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , qua I vẽ đường thẳng vuông góc với đường thẳng CI , đường thẳng này cắt các cạnh AC, BC lần lượt tại M, N .

- a) Chứng minh rằng hai tam giác IAM và BAI đồng dạng.
b) Chứng minh rằng $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AI}{BI}\right)^2$.



Lời giải.

- a) Ta có

$$\widehat{AIC} = 180^\circ - \widehat{IAC} - \widehat{ICA} = 180^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{BCA}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{BCA}}{2} = \frac{180^\circ + \widehat{ABC}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{AIC} - 90^\circ = \frac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{ABI}$. Từ đó suy ra $\triangle IAM \sim \triangle BAI$ ($g - g$).

- b) Tương tự ta cũng có $\triangle BIN \sim \triangle BAI$.

Từ đó suy ra $\frac{IN}{BN} = \frac{AI}{BI}$ (1).

Ngoài ra từ câu a) ta có $\frac{AM}{IM} = \frac{AI}{BI}$ (2).

Mặt khác $\triangle CMN$ có CI là đường phân giác cũng là đường cao nên cân tại C .

Suy ra CI cũng là trung tuyến. Do đó $IM = IN$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta có điều cần chứng minh. □

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc tù. Vẽ các đường cao CD và BE của tam giác ABC (D nằm trên đường thẳng AB , E nằm trên đường thẳng AC). Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc của B và C lên DE . Biết rằng S_1 là diện tích tam giác ADE , S_2 là diện tích tam giác BEM và S_3 là diện tích tam giác CDN . Tính diện tích tam giác ABC theo S_1, S_2, S_3 .

Lời giải.

Ta có tứ giác $BCDE$ nội tiếp nên $\widehat{BDM} = \widehat{BCE}$ và $\widehat{CDN} = \widehat{CBE}$.

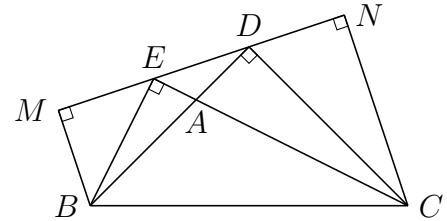
Suy ra $\triangle BDM \sim \triangle BCE$ và $\triangle DCN \sim \triangle BCE$.

Do đó $\frac{S_3}{S_{EBC}} = \frac{CD^2}{BC^2}$ và $\frac{S_{BDM}}{S_{EBC}} = \frac{BD^2}{BC^2}$.

Như vậy ta có $\frac{S_3 + S_{BDM}}{S_{EBC}} = 1 \Rightarrow S_3 + S_{BDM} = S_{EBC}$

Do đó $S_3 + S_1 + S_2 + S_{BAE} = S_{ABC} + S_{BAE}$.

Nên $S_{ABC} = S_1 + S_2 + S_3$. □



———— HẾT ————

9 ĐỀ THI HSG TOÁN 9 TỈNH HẢI DƯƠNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$.

- Rút gọn A .
- Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải.

- Điều kiện $x > 4$.

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4} - 2|}{\frac{x-4}{2x}}$$

$$\text{Nếu } x > 8 \text{ thì } A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}.$$

$$\text{Nếu } 4 < x \leq 8 \text{ thì } A = \frac{4x}{x-4}.$$

- Với $A = \frac{4x}{x-4}4 + \frac{16}{x-4}$. $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 16 : (x-4)$. Do $x \in \mathbb{Z}$, $4 < x \leq 8$ nên $x \in \{5, 6, 8\}$.

$$\text{Với } A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} \in \mathbb{Z} \text{ thì do } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } \sqrt{x-4} = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \frac{2(a^2+4)}{a} = 2a + \frac{8}{a} \Rightarrow 8 : a.$$

Lại có $x > 8 \Rightarrow a > 2$, do đó $a = 4$ hoặc $a = 8$. Từ đó suy ra $x = 20$ hoặc $x = 68$.

Vậy $x \in \{5, 6, 8, 20, 68\}$.

□

Câu 2. Giải các phương trình

- $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+2x-3}$.
- $(4x+2)\sqrt{x+8} = 3x^2+7x+8$.

Lời giải.

- Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x-1} - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3} \text{ hoặc } \sqrt{x-1} = 1 \end{aligned}$$

Giải từng trường hợp ta được nghiệm là $x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

- Điều kiện $x \geq -8$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x+8} - x - 2)(\sqrt{x+8} - 3x) = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x+8} = x + 2 \text{ hoặc } \sqrt{x+8} = 3x \end{aligned}$$

- Trường hợp 1 $\sqrt{x+8} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- Trường hợp 2 $\sqrt{x+8} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

□

Câu 3.

- a) Cho $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2013}$. Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$.
 b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$.

Lời giải.

- a) Ta có $a^3 = 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a \Leftrightarrow a^3 + 12a - 31 = 1 \Rightarrow f(a) = 1^{2013} = 1$.
 b) Ta có

$$\begin{aligned} y^2 + 2xy - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + 3x + 2 \\ \Leftrightarrow (x + y)^2 &= (x + 1)(x + 2)(1) \end{aligned}$$

Với x, y nguyên thì vế trái của (1) là số chính phương, vế phải của (1) là tích hai số nguyên liên tiếp nên $(x + y)^2 = (x + 1)(x + 2) = 0$. Suy ra $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-2; 2)$.

□

Câu 4.

- a) Cho a, b, c là ba số hữu tỉ thỏa mãn $abc = 1$ và $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số a, b, c là bình phương của một số hữu tỉ.
 b) Cho a, b, c là ba số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải.

- a) Vì $abc = 1$ nên

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} &= \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \\ \Leftrightarrow a^3c^2 + b^3a^2 + c^3a^2 &= a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \\ \Leftrightarrow (a^2b^2c^2 - a^3c^2) - (b^3a^2 - a^3b^2) - (c^3b^2 - c^3a) - (b^3c - abc) &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - a)((a^2c^2 - ba^2) - (c^3 - bc)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - a)(c^2 - b)(a^2 - c) &= 0 \end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh.

- b) Vì a, b dương và $1 + b^2 \geq 2b$ với mọi b nên $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b}$.

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}$; $\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$. Mà $a + b + c = 3$ nên cộng các bất đẳng thức trên với nhau ta được

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \quad (1)$$

Mặt khác cũng do $a + b + c = 3$ suy ra $(a + b + c)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9$. Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ nên $ab + bc + ca \leq 3$. (2) Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

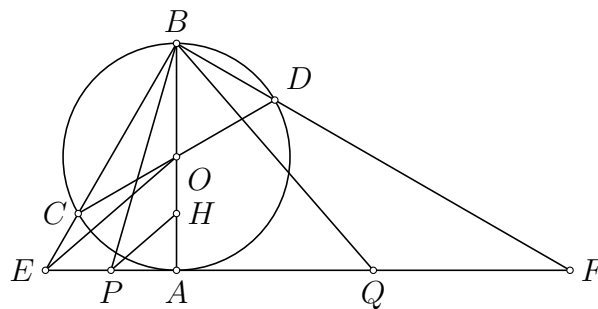
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

□

Câu 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD sao cho tiếp tuyến tại A của $(O; R)$ cắt các đường thẳng BC, BD tại hai điểm tương ứng là E, F . Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE, AF .

- Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BPQ là trung điểm của đoạn thẳng OA .
- Hai đường kính AB, CD thỏa mãn điều kiện gì thì tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất.
- Chứng minh rằng $CE \cdot DF \cdot EF = CD^3$ và $\frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$.
- Biết rằng tam giác BEF có một hình vuông $BMKN$ nội tiếp, $K \in EF$, $M \in BE$, $N \in BF$ sao cho tỉ số giữa cạnh của hình vuông với bán kính đường tròn nội tiếp tam giác BEF là $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của tam giác BEF .

Lời giải.



□

Lời giải.

- BA là đường cao của tam giác $\triangle BPQ \Rightarrow H \in BA$.
Ta có $AB^2 = AE \cdot AF \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{AB}{AQ}$.
Lại có $\triangle AEO$ đồng dạng với $\triangle ABQ \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ABQ}$.
Mặt khác $\widehat{ABQ} = \widehat{APH} \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{APH}$ nên $PH \parallel EO$.
Trong tam giác AEO có P là trung điểm của AE , kết hợp với (1), (2) suy ra H là trung điểm của OA .
- Ta có $S_{BPQ} = \frac{AB \cdot PQ}{2} = R \cdot PQ = R(AP + AQ) = \frac{R(AE + AF)}{2} \geq R\sqrt{AE \cdot AF} = 2R^2$.
Suy ra $S_{BPQ} = 2R^2 \Leftrightarrow AE = AF \Leftrightarrow \triangle BEF$ vuông cân tại $B \Leftrightarrow \triangle BCD$ vuông cân tại $B \Leftrightarrow AB \perp CD$.
Vậy tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất khi $AB \perp CD$.
- Ta có $AC \perp BE$; $AD \perp BF$ do đó $CD^4 = AB^4 = (AE \cdot AF)^2 = AE^2 \cdot AF^2 = (EC \cdot EB)(FD \cdot FB) = (EC \cdot FD)(EB \cdot FB) = (EC \cdot FD)(AB \cdot EF) = CE \cdot DF \cdot CD \cdot EF \Rightarrow CD^3 = CE \cdot DF \cdot EF$.
Ta cũng có $\frac{BE^2}{BF^2} = \frac{EA \cdot EF}{FA \cdot FE} = \frac{EA}{FA}$.
 $\Rightarrow \frac{BE^4}{BF^4} = \frac{EA^2}{FA^2} = \frac{EC \cdot EB}{FD \cdot FB} \Rightarrow \frac{BE^3}{BF^3} = \frac{CE}{DF}$.
- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EBF . Do tứ giác $BMKN$ là hình vuông nên BK là phân giác của $\widehat{EBF}$, do đó $I \in BK$. Kẻ $IJ \perp BE$, $IS \perp BF$, ($J \in BE$, $S \in BF$).
Ta thấy $IS \parallel KN \Rightarrow \frac{BK}{BI} = \frac{KN}{IS} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Mà } \frac{BK}{BI} = \frac{BI + IK}{BI} = 1 + \frac{IK}{IB} \Rightarrow \frac{IK}{IB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } FI \text{ là phân giác của góc } \widehat{BFE} \text{ nên } \frac{FK}{FB} = \frac{IK}{IB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow FB^2 = 2FK^2.$$

$$\text{Tương tự ta có } EB^2 = 2EK^2 \Rightarrow EF^2 = EB^2 + FB^2 = 2(EK^2 + FK^2) \Rightarrow (EK + KF)^2 = 2(EK^2 + FK^2) \Rightarrow (EK - FK)^2 = 0 \Rightarrow EK = FK.$$

$$\text{Suy ra tam giác } EBF \text{ vuông cân tại } B \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BFE} = 45^\circ.$$

□

———— HẾT ————

10 ĐỀ THI CHỌN HSG TOÁN 9, TỈNH HÀ TĨNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Tính giá trị của biểu thức $M = (x - y)^3 + 3(x - y)(xy + 1)$ biết

$$x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}; y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}.$$

- b) Giải phương trình

$$\frac{2x}{x^2 - x + 1} - \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{3}.$$

Lời giải.

- a) Áp dụng biến đổi $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$, ta có:

$$x^3 = 4\sqrt{2} - 3x \Rightarrow x^3 + 3x = 4\sqrt{2}$$

$$y^3 = 24\sqrt{2} - 3y \Rightarrow y^3 + 3y = 24\sqrt{2}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên ta được: $x^3 - y^3 + 3(x - y) = -20\sqrt{2}$. Suy ra $M = -20\sqrt{2}$

- b) Ta thấy $x^2 + x + 1; x^2 - x + 1$ luôn dương và $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Do đó với $t = x + \frac{1}{x}$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{2}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 3t - 14 = 0 (t \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

□

Câu 2.

- a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$
- b) Tìm các số tự nhiên a, b, c phân biệt sao cho biểu thức sau nhận giá trị nguyên

$$P = \frac{(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1)}{abc}.$$

Lời giải.

- a) Nhân cả hai vế phương trình thứ nhất của hệ với 3 ta được

$$9 = 12x - 3x^2 - 3y^2.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^3 + y^3 = 3(x^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y) = 0$$

- *) Với $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 + 1 = 0, (L)$$

*) Với $x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y = 0$, trừ theo từng vế với phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$xy - x - 3y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Do đó hệ có hai nghiệm $(3; 0)$ và $(2; 1)$.

b) Ta có $P = abc - (a + b + c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc}$.

Do a, b, c là các số tự nhiên nên P là số nguyên khi và chỉ khi $M = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc}$ là số nguyên.

Do a, b, c có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát ta giả thiết $a < b < c$, suy ra $a \geq 1; b \geq 2; c \geq 3$; suy ra

$$0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2.$$

$$\Rightarrow 0 < M < 2 \Rightarrow M = 1, (M \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} = 1$$

$$\Rightarrow a + b + c = (a-1)(b-1)(c-1) + 2(*)$$

Nếu $(a-1)(b-1) \geq 4$ thì với $a < b < c$ ta có $3c > a + b + c \Rightarrow 3c > (a-1)(b-1)(c-1) + 2 \Rightarrow 3c > 4(c-1) + 2 \Rightarrow 3c > 4c - 2 \Rightarrow c < 2$ (Trái với ĐK $c \geq 3$)

Do đó $a + b + c \geq 6$ nên từ (*) suy ra $a - 1 > 0$, suy ra $b - 1 > 1$, suy ra $(a-1)(b-a)$ chỉ có thể nhận giá trị là 2 hoặc 3. Từ đó ta tìm được bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn là $(2; 3; 5)$.

Vậy các bộ số tự nhiên phân biệt thỏa mãn bài toán gồm các hoán vị của $(2; 3; 5)$. Khi đó $P = 21$.

□

Câu 3. Tam giác ABC có chu vi bằng 1; các cạnh a, b, c thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}.$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

Với a, b, c dương và $a + b + c = 1$ ta có

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{3}{2}$$

Áp dụng BDT Nesbit ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hay tam giác ABC đều.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi D là trung điểm của cạnh BC . Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn AD (M không trùng với A). Gọi N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB, AC và H là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng PD .

- a) Chứng minh AH vuông góc với BH .
 b) Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung tuyến của AB tại I . Chứng minh ba điểm H, N, I thẳng hàng.

Lời giải.

a)

Từ giả thiết ta có AD là trung trực của BC và là phân giác của $\widehat{BAC}$. Từ đó ta cũng có $MNAP$ là hình vuông. Mặt khác do

$$\widehat{NAP} + \widehat{NHP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Nên tứ giác $ANHP$ nội tiếp đường tròn đường kính NP .

Suy ra $\widehat{AHP} = \widehat{ANP} = 45^\circ$ (cùng chắn cung $\widehat{AP}$)

Suy ra $\widehat{AHP} = \widehat{ABD} = 45^\circ \Rightarrow ABDH$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AHB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ hay $AH \perp BH$.

- b) Theo phần a) thì M, N, A, P, H cùng thuộc đường tròn đường kính AM và đường kính NP .

Suy ra $\widehat{AHM} = 90^\circ = \widehat{AHB} \Rightarrow H, M, B$ thẳng hàng.

Suy ra $\widehat{BHN} = \widehat{MHN} = \widehat{MAN} = 45^\circ$ (1) (cùng chắn $\widehat{MN}$)

Vì $BI \parallel AD$ nên $BI \perp BC \Rightarrow \widehat{ABI} = 45^\circ$.

Cùng với giả thiết ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại I suy ra $\widehat{BAI} = 45^\circ$

Ta có $\widehat{AIB} + \widehat{AHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $AIBH$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BHI} = \widehat{BAI} = 45^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BHI} = \widehat{BHN}$. Mặt khác do cách dựng ta có N và I cùng nằm về một phía của BH suy ra H, N, I thẳng hàng.

□

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}.$$

Lời giải.

Ta nhận thấy

$$\begin{aligned} F &= \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}. \\ \Leftrightarrow F &= \frac{y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{z^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{x^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}. \\ \Leftrightarrow F &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4 + z^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4 + x^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} \right) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2}$ ta có

$$F \geq \frac{1}{4} \left(\frac{(x^4 + y^4)^2}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{(y^4 + z^4)^2}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{(z^4 + x^4)^2}{(z^2 + x^2)(z + x)} \right)$$

$$\Leftrightarrow F \geq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \frac{y^2 + z^2}{y + z} \frac{z^2 + x^2}{z + x} \right) \geq \frac{1}{8} \left(\frac{(x + y)^2}{x + y} + \frac{(y + z)^2}{y + z} + \frac{(z + x)^2}{z + x} \right)$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{1}{4}(x + y + z) = \frac{1}{4}.$$

Vậy F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

□

———— HẾT ————

11 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI, TỈNH QUẢNG NINH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Minh] Chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{2} = a \Leftrightarrow 2 = a^3$.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\sqrt[3]{a-1} = \frac{1-a+a^2}{\sqrt[3]{9}}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{9(a-1)} = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow (a^2 - a + 1)^3 = 9(a-1)$.

Ta có

$$\begin{aligned}(a^2 - a + 1)^3 &= (a^2 - a + 1)^2(a^2 - a + 1) = (a^4 + a^2 + 1 - 2a^3 - 2a + 2a^2)(a^2 - a + 1) \\&= (2a + 3a^2 + 1 - 4 - 2a)(a^2 - a + 1) = 3(a^2 - 1)(a^2 - a + 1) \\&= 3(a-1)(a+1)(a^2 - a + 1) = 3(a-1)(a^3 + 1) \\&= 9(a-1) \text{ (đpcm).}\end{aligned}$$

□

Câu 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(2013y - 2012) = 1 \\ x(y^2 + 2012) = 2013. \end{cases}$$

Lời giải.

Để thấy $x \neq 0$ nên hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 2013y - 2012 = \frac{1}{x^2} \\ y^2 + 2012 = \frac{2013}{x}. \end{cases}$$

Đặt $\frac{1}{x} = t$, hệ trở thành
$$\begin{cases} t^2 - 2013y + 2012 = 0 \\ y^2 - 2013t + 2012 = 0. \end{cases}$$

Trừ vế với vế của phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta được

$$t^2 - y^2 - 2013y + 2013t = 0 \Leftrightarrow (t - y)(t + y + 2013) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ y = -t - 2013. \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $y = t$.

$$\text{Ta có phương trình } t^2 - 2013t + 2012 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2012. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$ và $(x; y) = \left(\frac{1}{2012}; 2012\right)$.

- Trường hợp 2: $y = -t - 2013$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có phương trình } t^2 - 2013(-t - 2013) + 2012 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2013t + 4054181 &= 0 \text{ (vô nghiệm do } \Delta < 0\text{).}\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$ và $\left(\frac{1}{2012}; 2012\right)$. □

Câu 3. Cho hàm số bậc nhất $y = mx + m - 1$ (*) (với m là tham số).

- Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số (*) tạo với trục tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2.
- Chứng minh rằng đồ thị của hàm số (*) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .

Lời giải.

a) Vì $(*)$ là hàm số bậc nhất nên $m \neq 0$.

Đồ thị của $(*)$ cắt trục tung tại điểm $A(0; m - 1)$ và cắt trục hoành tại điểm $B\left(\frac{1-m}{m}; 0\right)$.

OAB tạo thành tam giác khi và chỉ khi $m \neq 1$.

Khi đó ta có

$$S_{ABC} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \cdot OB = 2 \Leftrightarrow OA \cdot OB = 4$$

$$\Leftrightarrow |m - 1| \cdot \left| \frac{1-m}{m} \right| = 4 \Leftrightarrow (m - 1)^2 = 4|m| \quad (1).$$

• Trường hợp 1: $m > 0$.

$$(1) \text{ trở thành } m^2 - 2m + 1 = 4m \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 - 2\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ m = 3 + 2\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

• Trường hợp 2: $m < 0$.

$$(1) \text{ trở thành } m^2 - 2m + 1 = -4m \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy với $m \in \{-1; 3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\}$ thì đồ thị của hàm số $(*)$ tạo với các trục tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2.

b) $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc đồ thị của hàm số $(*)$ khi và chỉ khi

$$y_0 = mx_0 + m - 1 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1. \end{cases}$$

Vậy đồ thị của hàm số $(*)$ luôn đi qua điểm cố định $M(-1; -1)$ với mọi giá trị của m .

□

Câu 4. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$.

Lời giải.

Với $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ta có $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy$.

Mà $x > 0, y > 0$ nên $x + y > 0$.

$$\text{Suy ra } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)xy.$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + xyz \geq (x + y)xy + xyz = xy(x + y + z) > 0.$$

Chứng minh tương tự ta có

$$y^3 + z^3 + 1 \geq yz(x + y + z) > 0$$

$$z^3 + x^3 + 1 \geq zx(x + y + z) > 0$$

$$\text{Vậy ta có } A \leq \frac{1}{xy(x + y + z)} + \frac{1}{yz(x + y + z)} + \frac{1}{zx(x + y + z)} = \frac{x + y + z}{xyz(x + y + z)} = \frac{1}{xyz} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

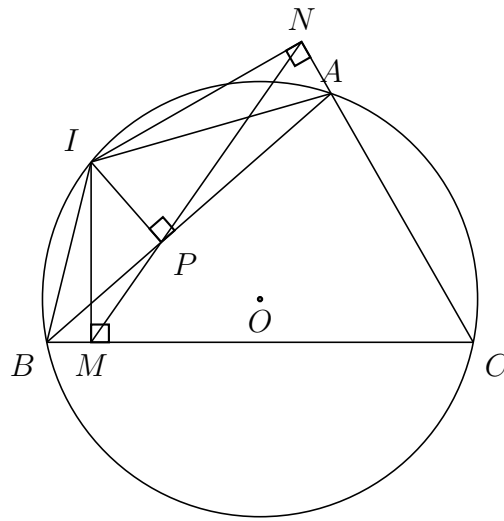
Vậy giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x = y = z = 1$.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi I là một điểm trên cung nhỏ AB (I không trùng với A và B). Gọi M, N, P theo thứ tự là hình chiếu của điểm I trên các đường thẳng BC, AC, AB .

- a) Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.
b) Xác định vị trí của điểm I để đoạn thẳng MN có độ dài lớn nhất.

Lời giải.



- a) Xét tứ giác $IPAN$ có $\widehat{IPA} + \widehat{INA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $IPAN$ là tứ giác nội tiếp.
 $\Rightarrow \widehat{IPN} = \widehat{IAN}$ (cùng chắn cung IN).
 Xét tứ giác $IPMB$ có $\widehat{IPB} = \widehat{IMB} = 90^\circ$.
 $\Rightarrow$ Tứ giác $IPMB$ là tứ giác nội tiếp.
 $\Rightarrow \widehat{IBM} + \widehat{IPM} = 180^\circ$.
 Mà $\widehat{IBM} + \widehat{IAC} = 180^\circ$ (do tứ giác $IACB$ là tứ giác nội tiếp).
 $\Rightarrow \widehat{IPM} = \widehat{IAC}$.
 $\Rightarrow \widehat{IPM} + \widehat{IPN} = \widehat{IAC} + \widehat{IAN} = 180^\circ$.
 Vậy M, N, P là ba điểm thẳng hàng.
- b) Vì tứ giác $IPMB$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IBP} = \widehat{IMP}$ (cùng chắn cung IP).
 Lại có tứ giác $IPAN$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{IAP} = \widehat{INP}$ (cùng chắn cung IP).
 Xét $\triangle IBA$ và $\triangle IMN$ có

$$\begin{cases} \widehat{IBA} = \widehat{IMN} \\ \widehat{IAB} = \widehat{INM} \end{cases} \Rightarrow \triangle IBA \sim \triangle IMN \text{ (g.g.)}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IB}.$$
 Mà tam giác IBM vuông tại M nên $IM \leq IB$ hay $\frac{IM}{IB} \leq 1$.
 Vậy $MN \leq AB$.
 Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} M \equiv B \\ N \equiv A \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{IAC} = \widehat{IBC} = 90^\circ$
 $\Leftrightarrow CI$ là đường kính của (O) .
 Vậy MN lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi I là điểm đối xứng với C qua O .

□

Câu 6. Giải phương trình sau $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} + x = 28$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $-12 \leq x \leq 4$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + 3 = u \\ \sqrt{(4-x)(12+x)} = v \end{cases} \quad (v \geq 0).$$

Phương trình đã cho trở thành $uv = 28 - x$ (1).

$$\text{Ta có } u^2 + v^2 - 1 = x^2 + 6x + 9 + 48 - 8x - x^2 - 1 = 56 - 2x = 2(28 - x) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $u^2 + v^2 - 1 = 2uv \Leftrightarrow (u - v)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ u - v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u - 1 \\ v = u + 1. \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $v = u - 1$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4-x)(12+x)} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48 - 8x - x^2 = x^2 + 4x + 4 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 12x - 44 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{31} \text{ (thỏa mãn)}.$$

- Trường hợp 2: $v = u + 1$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4-x)(12+x)} = x + 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48 - 8x - x^2 = x^2 + 8x + 16 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 16x - 32 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 + 4\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-3 + \sqrt{31}; -4 + 4\sqrt{2}\}$. □

————— **HẾT** —————

12 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI, KIÊN GIANG

———— HẾT ————

Câu 1.

- Tìm m để hàm số $y = (m^2 - 2m)x + m^2 - 1$ nghịch biến và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 5x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2xy - z - 1$.
- Cho $x + y = -5$ và $x^2 + y^2 = 11$. Tính $x^3 + y^3$.

Lời giải.

- Hàm số $y = (m^2 - 2m)x + m^2 - 1$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$m^2 - 2m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \quad (1).$$

$$\begin{cases} m < 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 $\Leftrightarrow m^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta thấy $m \in \emptyset$.

- $M = 5x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2xy - z - 1 = (x - y)^2 + (2x - 1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = -5(11 - xy)$.

Mà $x + y = -5 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 25 \Rightarrow xy = 7 \Rightarrow x^3 + y^3 = -20$.

□

Câu 2.

- Rút gọn $A = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9 - x^2}}{3x - x^2 + (x + 2)\sqrt{9 - x^2}} : 2\sqrt{1 + \frac{2x}{3 - x}}$.

- Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$. Tính giá trị của biểu thức $Q = (a^{27} + b^{27})(b^{41} + c^{41})(c^{2013} + a^{2013})$.

Lời giải.

- Điều kiện xác định $-3 < x < 3$.

$$A = \frac{(x + 3)(x + 2) + x\sqrt{3 + x}\sqrt{3 - x}}{x(3 - x) + (x + 2)\sqrt{3 + x}\sqrt{3 - x}} : 2\sqrt{\frac{3 + x}{3 - x}}$$

$$= \frac{\sqrt{3 + x}}{\sqrt{3 - x}} \cdot \frac{(x + 2)\sqrt{3 + x} + x\sqrt{3 - x}}{x\sqrt{3 - x} + (x + 2)\sqrt{3 + x}} : 2\sqrt{\frac{3 + x}{3 - x}} = \frac{1}{2}.$$

- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b + c} - \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a + b}{ab} = -\frac{a + b}{c(a + b + c)}$
 $\Rightarrow (a + b)[c(a + b + c) + ab] = 0 \Rightarrow (a + b)[c(a + c) + bc + ab] = 0$

$$\Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases}$$

Thay vào Q ta được $Q = 0$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình $\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x} = 3$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-3}{y+5}} + \sqrt{\frac{y+5}{2x-3}} = 2 \\ 3x+2y = 19 \end{cases}$ (với $x > \frac{3}{2}, y > -5$).

Lời giải.

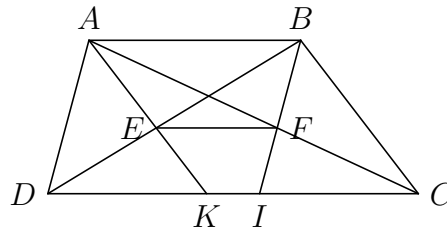
- a) $\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x} = 3$
 $\Leftrightarrow x+10+17-x+3\sqrt[3]{(x+10)(17-x)} [\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{17-x}] = 27 \Leftrightarrow (x+10)(17-x) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 17. \end{cases}$
- b) Đặt $a = \sqrt{\frac{2x-3}{y+5}}$ ($a > 0$). Ta có $a + \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x-3 = y+5 \Rightarrow 2x-y = 8$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y = 8 \\ 3x+2y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$

□

Câu 4. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn là CD . Qua A vẽ $AK \parallel BC$ ($K \in CD$) và qua B kẻ $BI \parallel AD$ ($I \in CD$); BI cắt AC tại F , AK cắt BD tại E .

- a) Chứng minh $KD = CI$ và $EF \parallel AB$.
- b) Chứng minh $AB^2 = CD \cdot EF$.

Lời giải.



- a) Ta có $ABID$ và $ABCK$ là các hình bình hành $\Rightarrow DI = CK = AB$.
- Nếu I nằm giữa D và $K \Rightarrow K$ nằm giữa I và C .
Ta có $DK = DI + IK = CK + IK = CI$.
 - Nếu K nằm giữa D và $I \Rightarrow I$ nằm giữa K và C .
Ta có $DK = DI - IK = CK - IK = CI$.

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle KED$ có
 $\widehat{EAB} = \widehat{EKD}, \widehat{DEK} = \widehat{AEB} \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle KED \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{AB}{KD}$.

Tương tự $\triangle AFB \sim \triangle CFI \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{CI}$.

Mà $KD = CI \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel KC$ (định lý Talet đảo).

- b) Ta có $\triangle KED \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{DE}{EB} \Rightarrow \frac{DK+AB}{AB} = \frac{DE+EB}{EB}$
 $\Rightarrow \frac{DK+KC}{AB} = \frac{BD}{EB} \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{BD}{EB}$ (1).

Lại có $EF \parallel DI \Rightarrow \frac{BD}{EB} = \frac{DI}{EF} \Rightarrow \frac{BD}{EB} = \frac{AB}{EF}$ (2).

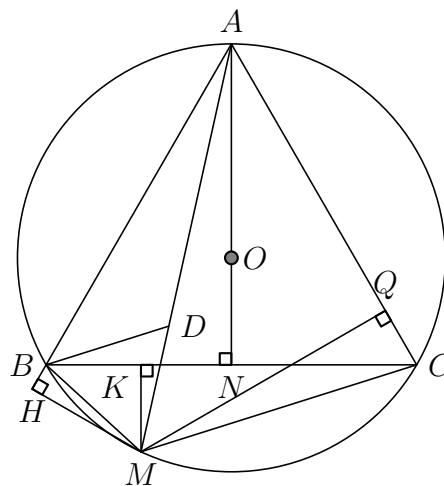
Từ (1) và (2) ta có $\frac{DC}{AB} = \frac{AB}{EF} \Rightarrow AB^2 = CD.EF$.

□

Câu 5. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

- Chứng minh $BM + MC = MA$.
- Xác định vị trí của điểm M để tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.
- Gọi H, K, Q lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, BC, CA . Đặt diện tích tam giác ABC là S và diện tích tam giác MBC là S' . Chứng minh rằng $MH + MK + MQ = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$ khi M chạy trên cung nhỏ BC .

Lời giải.



- Trên tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MB \Rightarrow \triangle MBD$ cân tại M . Mà $\widehat{BMD} = 60^\circ$ (do chắn cung $\widehat{AB}$ và $\triangle ABC$ đều) nên $\triangle BMD$ đều $\Rightarrow MB = BD$.
Lại có $\widehat{MBC} + \widehat{CBD} = 60^\circ = \widehat{CBD} + \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{DBA}$.
Xét $\triangle MBC$ và $\triangle DBA$ có $MB = DB$, $\widehat{MBC} = \widehat{DBA}$, $BC = AB$ nên $\triangle MBC = \triangle DBA$
 $\Rightarrow MC = DA \Rightarrow MA = MD + DA = MB + MC$.
- Ta có $MA + MB + MC = 2MA \leq 4R$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AM là đường kính của đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$.
- Gọi N là trung điểm $BC \Rightarrow OA = \frac{2}{3}AN \Rightarrow AN = \frac{3R}{2}$. Xét tam giác ANB có
 $AB^2 = AN^2 + NB^2 = \frac{9R^2}{4} + \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB^2 = 3R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.
Mà $\frac{MH \cdot AB}{2} + \frac{MK \cdot BC}{2} + \frac{MQ \cdot AC}{2} = S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAC}$
 $\Rightarrow AB(MH + MK + MQ) = 2(S + S') \Rightarrow MH + MK + MQ = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$.

□

———— HẾT ————

13 ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9, TIỀN GIANG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) \end{cases}$$

2) Cho phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ (1).

a) Tìm m để (1) có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa
$$\begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \\ x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

b) Giải phương trình (1) với m vừa tìm được ở a).

Lời giải.

1) Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) & (1) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) & (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình (1) và (2), ta được: $x^3 - y^3 = 2(x^2 - y^2) - 4(x - y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 2(x + y) - 4 \end{cases}$$

• $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, thay vào (1), ta được phương trình:

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

• $x^2 + xy + y^2 = 2(x + y) - 4 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2(x + y) - xy + 4 = 0$.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, ta được
$$\begin{cases} S^2 \geq 4P \\ S^2 - 2S - P + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S^2 \geq 4(S^2 - 2S + 4) \Rightarrow 3\left(S - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{32}{3} \leq 0 \text{ (không xảy ra)}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ (1; 1), \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \right\}$.

2)

a) Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình (1) trở thành $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2m - 1 \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 > 0 \\ \begin{cases} t_1 = 9t_2 \text{ (do } \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = \sqrt{t_2} - (-\sqrt{t_2})) \\ t_2 = 9t_1 \text{ (do } \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1})) \end{cases} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{9} \\ m = 5 \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ hoặc $m = \frac{5}{9}$ là các giá trị cần tìm.

b) Với $m = \frac{5}{9}$, phương trình (1) trở thành:

$$x^4 - \frac{10}{9}x^2 + \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3} \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Vậy với $m = \frac{5}{9}$, phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1\right\}$.

Với $m = 5$, phương trình (1) trở thành:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Vậy với $m = 5$, phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-3; -1; 1; 3\}$.

□

Câu 2. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = x + m$. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB là tam giác vuông.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 - x - m = 0$ (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 1 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$

Khi đó, ta có (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình (1).

Vì vai trò của A và B như nhau nên tam giác OAB là tam giác vuông khi và chỉ khi tam giác OAB là tam giác vuông tại A hoặc vuông tại O .

$$\begin{aligned} \text{a) Tam giác } OAB \text{ vuông tại } A &\Leftrightarrow \begin{cases} OA \perp (d) \\ y_A = x_A^2 \\ y_A = x_A + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -1 \\ y_A = x_A^2 \\ y_A = x_A + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-1; 1) \\ B(2; 4) \\ m = 2. \end{cases} \\ \text{b) Tam giác } OAB \text{ vuông tại } O &\Leftrightarrow \begin{cases} OA \perp OB \\ y_A = x_A^2; y_B = x_B^2 \\ x_A \cdot x_B = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A \cdot x_B = -1 \\ y_A = x_A^2; y_B = x_B^2 \\ x_A \cdot x_B = -m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\ B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ m = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = 1$ là các giá trị cần tìm.

□

Câu 3.

- a) Cho 4 số a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=2$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 1$.
 b) Cho $m \neq -1$ và $a^3 - 3a^2 + 3a(m+1) - (m+1)^2 = 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của a .

Lời giải.

a) Ta có: $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$
 $\Rightarrow a^2 \geq a - \frac{1}{4}, b^2 \geq b - \frac{1}{4}, c^2 \geq c - \frac{1}{4}, d^2 \geq d - \frac{1}{4}$.
 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a+b+c+d) - 1$.
 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$.

b) Ta có: Phương trình $\Leftrightarrow (m+1)a^3 - 3(m+1)a^2 + 3(m+1)^2a - (m+1)^3 = 0$
 $\Leftrightarrow a^3 - 3(m+1)a^2 + 3(m+1)^2a - (m+1)^3 = -ma^3$
 $\Leftrightarrow [a - (m+1)]^3 = -ma^3$
 $\Leftrightarrow a - (m+1) = -\sqrt[3]{m}.a$
 $\Leftrightarrow a = \frac{m+1}{\sqrt[3]{m}+1}$
 $\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{m} + 1}{\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{m} + 1}$
 $\Leftrightarrow a = \left(\sqrt[3]{m} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là $\frac{3}{4}$ khi $m = \frac{1}{8}$.

□

Câu 4. Chứng minh rằng $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ với $n \in \mathbb{Z}; n \geq 1$.

Lời giải.

Đặt $g(n) = (2n)^2; f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$. Ta tìm các số a, b, c, d sao cho $f(n) - f(n-1) = g(n)$.

Ta có: $f(n) - f(n-1) = g(n)$

$$\Leftrightarrow 3an^2 + (2b - 3a)n + a - b + c = 4n^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 4 \\ 2b - 3a = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 2 \\ c = \frac{2}{3} \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Suy ra $f(n) = \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n + d$ (d tùy ý).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(1) - f(0) = g(1) \\ f(2) - f(1) = g(2) \\ f(3) - f(2) = g(3) \\ \vdots \\ f(n) - f(n-1) = g(n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } f(n) - f(0) &= 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n + d - d &= 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 \\ \Leftrightarrow 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

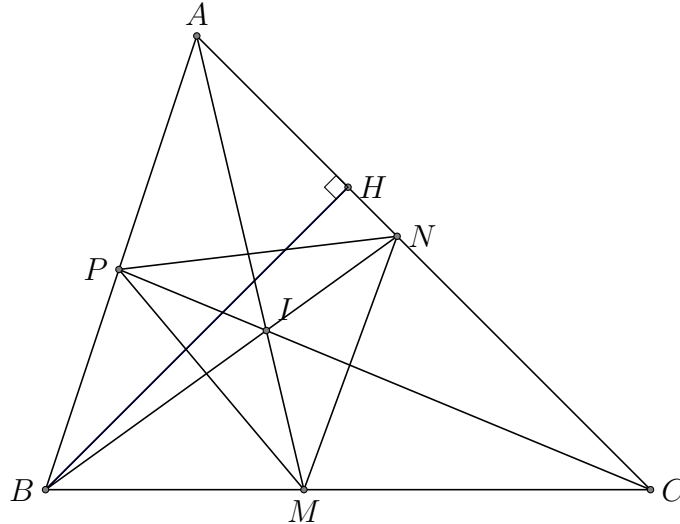
□

Câu 5. Cho tam giác ABC có các phân giác trong của các góc nhọn $\widehat{BAC}, \widehat{ACB}, \widehat{CBA}$ theo thứ

tự cắt các cạnh đối tại các điểm M, N, P . Đặt $a = BC, b = CA, c = AB$; $S_{\triangle MNP}, S_{\triangle ABC}$ theo thứ tự là diện tích của các tam giác MNP và tam giác ABC .

- a) Chứng minh rằng $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.
- b) Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}}$.

Lời giải.



- a) Trong tam giác ABC , kẻ đường cao AH . Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin \widehat{BAC}$.

Tương tự, ta có: $S_{\triangle ANP} = \frac{1}{2}AN \cdot AP \cdot \sin \widehat{BAC}$.

Suy ra $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AN \cdot AP}{bc}$.

Mà $\frac{AN}{b - AN} = \frac{c}{a} \Rightarrow AN = \frac{bc}{a + c}$.

Tương tự, ta có: $AP = \frac{bc}{a + b}$.

Vậy $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{bc}{(a + b)(a + c)}$.

Tương tự, ta có: $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{ca}{(b + c)(b + a)}, \frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{ab}{(c + a)(c + b)}$.

Suy ra $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ANP} - S_{\triangle CMN} - S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle ABC}}$

$$= 1 - \frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ABC}} - \frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{bc}{(a + b)(a + c)}}{\frac{2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}} - \frac{\frac{ca}{(b + c)(b + a)}}{\frac{2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}} - \frac{\frac{ab}{(c + a)(c + b)}}{\frac{2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}}$$

$$= \frac{1}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

- b) Ta có: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Tương tự, ta có: $b + c \geq 2\sqrt{bc}; c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

Suy ra $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Vậy $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} \leq \frac{1}{4}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}}$ là $\frac{1}{4}$ khi tam giác ABC là tam giác đều.

□

———— HẾT ————

14 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI, TỈNH BẮC NINH

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. [9D1K7][9D4K7] Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ ($x > 0, x \neq 1$).

- Rút gọn P .
- Tìm giá trị của x để $P = 3$.

(Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2013-2014 Tỉnh Bắc Ninh)

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - 2\sqrt{x} - 1 + 2(\sqrt{x} + 1) \\ &= x - \sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

- $P = 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$.

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t, t \geq 0 \text{ ta được } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta được $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy với $x = 4$ thì $P = 3$.

□

Câu 2. [9D4K3][9D4K6] Cho phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số).

- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1). Tìm m để $|x_1 - x_2| = 17$.

(Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2013-2014 Tỉnh Bắc Ninh)

Lời giải.

- Có $\Delta = (4m+1)^2 - 8(m-4) = 16m^2 + 8m + 1 - 8m + 32 = 16m^2 + 33$.

Vì $\Delta = 16m^2 + 33 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

- Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên theo định lý Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m+1) \\ x_1 x_2 = 2(m-4). \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 289 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 289$
 $\Leftrightarrow (4m+1)^2 - 8(m-4) = 289 \Leftrightarrow 16m^2 + 33 = 289 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Vậy $m = \pm 4$ là giá trị cần tìm.

**Câu 3.** [9D3K4][9D3G4]

- a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1. \end{cases}$$
- b) Cho các số thực m, n, p thỏa mãn $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = m + n + p$.

(Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2013-2014 Tỉnh Bắc Ninh)

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \quad (1) \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 \quad (2). \end{cases}$$

Trừ vế với vế của hai phương trình ta được

$$y^4 - 2y^2 + 1 - 4xy^3 + 4xy = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 - 1 - 4xy) = 0.$$

- Nếu $y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$ thay vào (1) ta được các nghiệm $(x; y)$ là $(0; 1)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(0; -1)$.
- Nếu $y^2 - 1 - 4xy = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4y}$ (do $y = 0$ không thỏa mãn). Thay vào (2) ta được:

$$4\left(\frac{y}{4} - \frac{1}{4y}\right)^2 + 2y^2 - 4y\left(\frac{y}{4} - \frac{1}{4y}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2} + 2y^2 - y^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow 5y^4 - 6y^2 + 1 = 0.$$

Với $y^2 = 1 \Rightarrow x = 0$ ta được nghiệm $(x; y)$ là $(0; \pm 1)$.

Với $y^2 = \frac{1}{5}$ ta được nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-1}{\sqrt{5}}\right); \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

- b) Có $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$

$$\Leftrightarrow (m + n + p)^2 + (m - p)^2 + (n - m)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (m + n + p)^2 = 2 - (m - p)^2 - (n - m)^2 \leq 2 \Rightarrow S^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}.$$

Khi đó $\max S = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = n = p = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\min S = -\sqrt{2} \Leftrightarrow m = n = p = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.



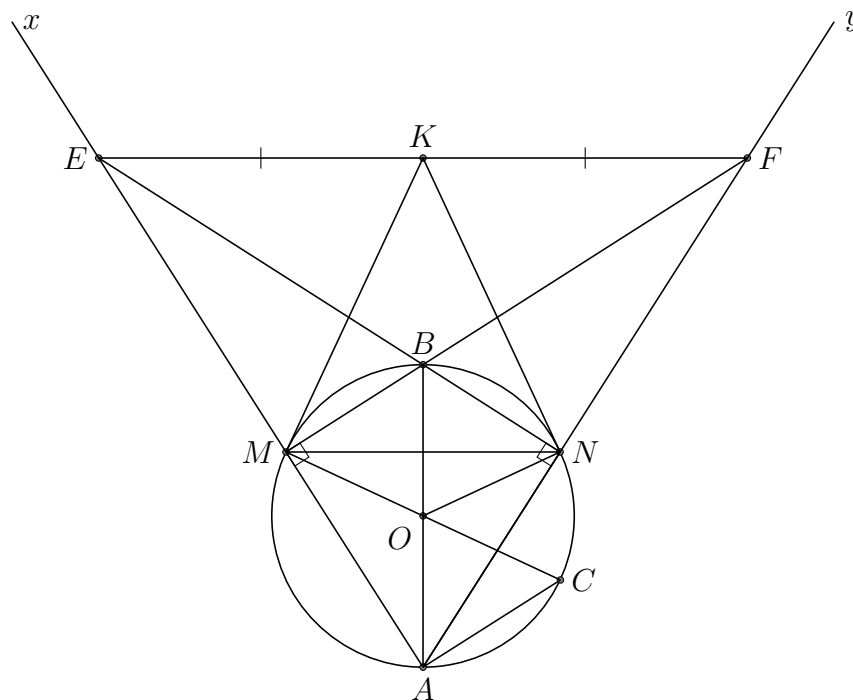
Câu 4. [9H3K3][9H3G7][8H2G3] Cho đường tâm O đường kính AB cố định. Ax và Ay là hai tia thay đổi luôn tạo với nhau một góc 60° , nằm về hai phía của AB , cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N . Đường thẳng BN cắt Ax tại E , đường thẳng BM cắt Ay tại F . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng EF .

- a) Chứng minh rằng $\frac{EF}{AB} = \sqrt{3}$.
- b) Chứng minh rằng $OMKN$ là tứ giác nội tiếp.

- c) Khi tam giác AMN đều, gọi C là điểm di động trên cung nhỏ AN ($C \neq A, C \neq N$). Đường thẳng qua M và vuông góc với AC cắt NC tại D . Xác định vị trí của điểm C để diện tích tam giác MCD là lớn nhất.

(Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2013-2014 Tỉnh Bắc Ninh)

Lời giải.



- a) Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
 $\Rightarrow B$ là trực tâm $\triangle AEF \Rightarrow AB \perp EF$
 $\Rightarrow \widehat{NEF} = \widehat{NAB}$ (Cùng phụ với góc $\widehat{NFE}$).
 Khi đó suy ra $\triangle NEF \sim \triangle NAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{NE}{NA} = \tan \widehat{NAE} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.
- b) $\widehat{MON}$ là góc ở tâm chắn cung $MN \Rightarrow \widehat{MON} = 2\widehat{MAN} = 120^\circ$.
 $\widehat{EMF} = \widehat{ENF} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn đường kính EF tâm K .
 $\Rightarrow \widehat{MKN} = 2\widehat{MEN} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.
 $\widehat{MON} + \widehat{MKN} = 180^\circ \Rightarrow OMKN$ là tứ giác nội tiếp.
- c) Gọi I là giao điểm của AC và MD . Ta có $\widehat{MCA} = \widehat{NCM} = 60^\circ$.
 $\Rightarrow \triangle MCD$ có CI vừa là đường cao vừa là đường phân giác. Khi đó $\triangle MCD$ cân tại C .
 $\Rightarrow S_{MCD} = 2S_{MCI} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot MI \cdot CI = MI \cdot CI = (MC \cdot \sin 60^\circ)(MC \cdot \cos 60^\circ) = \frac{MC^2 \sqrt{3}}{4}$
 $\Rightarrow S_{MCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow MC$ lớn nhất $\Leftrightarrow MC$ là đường kính của (O) .

□

Câu 5. [6D1G10][8H2G3]

- a) Cho 2014 số nguyên dương không lớn hơn 2014 và có tổng bằng 4028. Chứng minh rằng từ 2014 số đó luôn chọn được các số mà tổng của chúng bằng 2014.
- b) Cho tam giác ABC có các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CA . Gọi giao điểm của AE với BF và CD lần lượt là Q, R , giao điểm của CD và BF là P . Biết

diện tích bốn tam giác ADR, BEQ, CFP, PQR cùng bằng 1. Chứng minh rằng các tứ giác $AFPR, BDRQ, CEQP$ có diện tích bằng nhau.

(Đề thi Toán 9 Học sinh giỏi năm học 2013-2014 Tỉnh Bắc Ninh)

Lời giải.

- a) Nếu 2014 số bằng nhau thì lấy 1007 số bất kỳ luôn có tổng là 2014.

Ta xét trường hợp trong 2014 số có ít nhất hai số khác nhau. Giả sử 2014 số là $n_1, n_2, \dots, n_{2014}$ và $n_1 \neq n_2$. Xét dãy gồm 2014 số:

$$n_1, n_2, n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{2013}$$

Nếu có một số trong dãy chia hết cho 2014 thì số đó là 2014.

Nếu không có số nào trong dãy chia hết cho 2014 thì theo nguyên lý Dirichlet có hai số trong dãy có cùng số dư khi chia cho 2014.

Vậy ta được điều phải chứng minh.

- b) Do $S_{PQR} = S_{ADR} \Rightarrow S_{APQ} = S_{ADP} \Rightarrow D, Q$ cách đều $AP \Rightarrow DQ \parallel AP$.

$$\Rightarrow \triangle BQD \sim \triangle BPA \Rightarrow \frac{BP}{BQ} = \frac{AB}{BD} = \frac{AP}{QD} = \frac{BQ + QP}{BQ} = 1 + \frac{QP}{QB}.$$

$$\text{Vì } \triangle ARP \sim \triangle QRD \Rightarrow \frac{AR}{QR} =$$

$$\frac{AP}{QD} = \frac{RP}{RD}.$$

$$\text{Đặt } \frac{AR}{QR} = a, \frac{QB}{QP} = b, \frac{CP}{PR} = c.$$

$$\text{Từ } \frac{AR}{QR} = \frac{AP}{QD} = 1 + \frac{QP}{QB} \Rightarrow a = 1 + \frac{1}{b}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự } b = 1 + \frac{1}{c}, c =$$

$$1 + \frac{1}{a}.$$

$$\text{Do đó } a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

$$\Rightarrow RD = \frac{2PR}{\sqrt{5} + 1}, \frac{RD}{CP} + \frac{PR}{CP} = \frac{2PR}{CP(\sqrt{5} + 1)} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{PD}{CP} = 1.$$

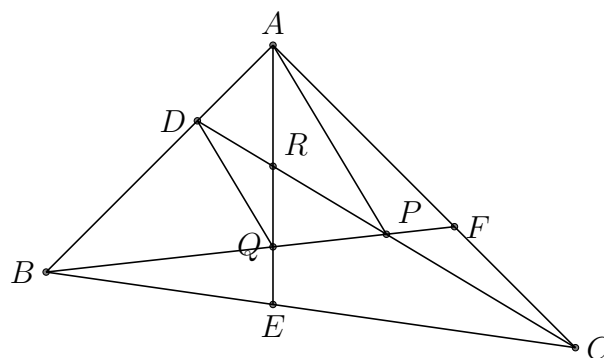
Suy ra P là trung điểm của CD .

$$\Rightarrow S_{BCP} = S_{BDP} \Rightarrow S_{CEQP} = S_{BDRQ}.$$

Chứng minh tương tự ta được $S_{CEQP} = S_{ARPF}$.

□

———— HẾT ————



15 ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9, NGHI XUÂN, HÀ TĨNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có $A = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 1 + 3 - \sqrt{5} = 2$. □

Câu 2. Tìm x, y thỏa mãn $2x + y - 2\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 4 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x = 0; y \in \mathbb{R} \\ x > 0; y \geq 0. \end{cases}$

- Với $x = 0$, ta được $y = -4$ (thỏa mãn).
- Với $x > 0, y \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} 2x + y - 2\sqrt{xy} - 4\sqrt{x} + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{xy} + y) + (x - 4\sqrt{x} + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4. &\quad (\text{thỏa mãn}) \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) \in \{(0; -4); (4; 4)\}$. □

Câu 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4 = 85 - (y - 2x^2)^2$.

$\Rightarrow x^4 \leq 85 < 4^4$. Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^4 \in \{0^4; 1^4; 2^4; 3^4\}$.

- Với $x^4 = 0^4 \Rightarrow y^2 = 85$ (loại).
- Với $x^4 = 1^4 \Rightarrow (y - 2)^2 = 84$ (loại).
- Với $x^4 = 2^4 \Rightarrow (y - 8)^2 = 69$ (loại).
- Với $x^4 = 3^4 \Rightarrow (y - 18)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 18 = 2 \\ y - 18 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ y = 16. \end{cases}$

Vậy phương trình có bốn nghiệm nguyên $(x; y) \in \{(3; 20), (-3; 20), (3; 16), (-3; 16)\}$. □

Câu 4. Cho x, y, z là các số nguyên và

$$\begin{cases} P = (x + 2012)^5 + (2y - 2013)^5 + (3z + 2014)^5 \\ S = x + 2y + 3z + 2013. \end{cases}$$

Chứng minh rằng P chia hết cho 30 khi và chỉ khi S chia hết cho 30.

Lời giải.

Đặt $a = x + 2012, b = 2y - 2013, c = 3z + 2014$. Ta được $\begin{cases} P = a^5 + b^5 + c^5 \\ S = a + b + c \end{cases} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$.

Xét $P - S = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c)$.

Ta chứng minh được $m^5 - m$ chia hết cho 30. Thật vậy, ta có

$$m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1) = 5m(m - 1)(m + 1) + m(m - 1)(m + 1)(m - 2)(m + 2).$$

Mà $m(m-1)(m+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho $2 \cdot 3 = 6$, nghĩa là $5m(m-1)(m+1)$ chia hết cho 30.

Lại có $m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)$ là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Do đó $P - S$ chia hết cho 30. Hay P chia hết cho 30 khi và chỉ khi S chia hết cho 30. $\square$

Câu 5. Cho ba số x, y, z khác 0 thỏa mãn
$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0. \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = (y^{2009} + z^{2009})(z^{2011} + x^{2011})(x^{2013} + y^{2013})$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x+y+z)}{xyz} \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2. \end{aligned}$$

Mà $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$, suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Lại có $x + y + z = \frac{1}{2}$, suy ra $\frac{1}{x+y+z} = 2$.

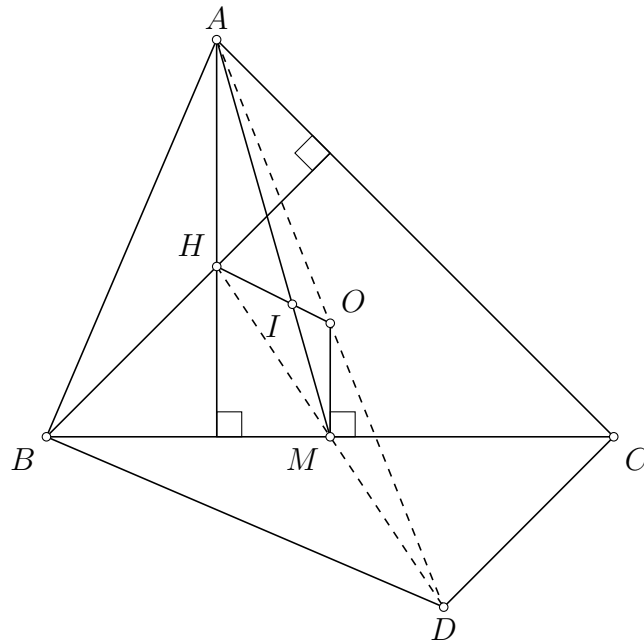
Do đó

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2009} = -y^{2009} \\ y^{2011} = -z^{2011} \\ z^{2013} = -x^{2013}. \end{cases}$$

Vậy $P = 0$. $\square$

Câu 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn có trực tâm H , trọng tâm I . Giao điểm của ba đường trung trực là O , trung điểm của BC là M . Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}}$.

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Do O là giao của ba đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $OA = OC = OD$, suy ra $\triangle ACD$ vuông tại C và $BH \parallel CD$. Tương tự cũng có $HC \parallel BD$, suy ra $BHCD$ là hình bình hành và M là trung điểm BC .

Từ đó MO là đường trung bình của $\triangle DAH$ hay $\frac{MO}{AH} = \frac{1}{2}$.

Lại có I là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\frac{MI}{AI} = \frac{1}{2}$. Do đó $\frac{MO}{AH} = \frac{MI}{AI}$ và $\triangle MOI \sim \triangle AHI$ (c.g.c).

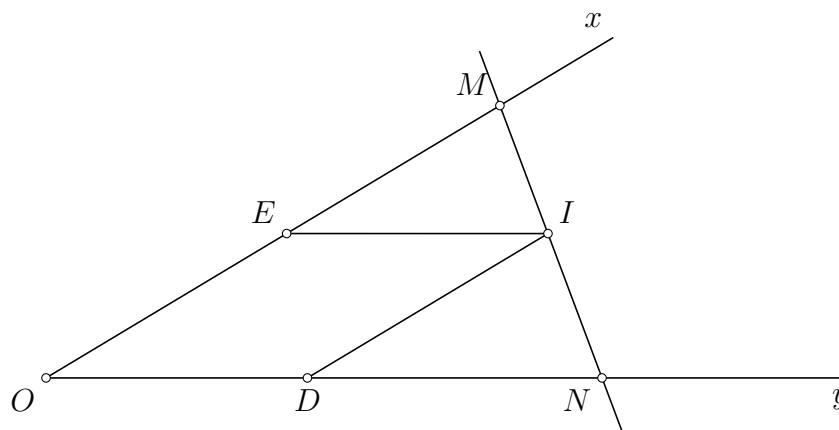
Suy ra $\frac{IO}{IH} = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$\frac{IO^2}{IH^2} = \frac{OM^2}{HA^2} = \frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}} = \frac{1}{2}.$$

□

Câu 7. Cho góc $\widehat{xOy}$ và một đường thẳng d thay đổi luôn cắt các tia Ox, Oy tại M và N . Biết giá trị biểu thức $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ không thay đổi khi đường thẳng d thay đổi. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



Giả sử $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{a}$ (a là một số dương không đổi). Lấy điểm D trên Oy sao cho $OD = a$. Khi đó $OD < ON$. Vẽ $DI \parallel Ox$ ($I \in MN$). Lấy E trên Ox sao cho $OE = ID$. Khi đó $OEID$ là

hình bình hành. Ta có

$$\frac{OE}{OM} + \frac{OD}{ON} = \frac{NI}{NM} + \frac{EI}{ON} = \frac{NI}{NM} + \frac{MI}{MN} = 1 \Rightarrow \frac{1}{ON} + \frac{OE}{OD \cdot OM} = \frac{1}{OD} = \frac{1}{a}.$$

Khi đó

$$\frac{1}{OM} = \frac{OE}{OD \cdot OM} \Rightarrow \frac{OE}{OD} = 1 \Rightarrow OE = OD = a.$$

Mà $D \in Oy$, $E \in Ox$ nên OD, OE cố định. Mặt khác O cố định và $OEID$ là hình bình hành nên I cố định. Vậy d luôn đi qua điểm I cố định. $\square$

Câu 8. Cho các số x, y, z không âm, không đồng thời bằng 0 thỏa mãn

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} \leq 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{x+y+z}$.

Lời giải.

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz (Bunhiacopxki) ta có

$$(x+1+y+2+z+3) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} \right) \geq (1+1+1)^2 \Leftrightarrow x+y+z+6 \geq 9 \Leftrightarrow x+y+z \geq 3.$$

Do đó

$$P = \frac{8(x+y+z)}{9} + \frac{x+y+z}{9} + \frac{1}{x+y+z} \geq \frac{8}{3} + 2\sqrt{\frac{x+y+z}{9} \cdot \frac{1}{x+y+z}} = \frac{10}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x; y; z) = (2; 1; 0)$. Vậy $\min P = \frac{10}{3}$ khi $(x; y; z) = (2; 1; 0)$. $\square$

Câu 9. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 671$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2013} + \frac{y}{y^2 - zx + 2013} + \frac{z}{z^2 - xy + 2013} \geq \frac{1}{x+y+z}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x}{x^2 - yz + 2013} + \frac{y}{y^2 - zx + 2013} + \frac{z}{z^2 - xy + 2013} \\ &= \frac{x^2}{x(x^2 - yz + 2013)} + \frac{y^2}{y(y^2 - zx + 2013)} + \frac{z^2}{z(z^2 - xy + 2013)} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2013(x+y+z)}. \end{aligned}$$

Lại có $xy + yz + zx = 671$ nên

$$\begin{aligned} &x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2013(x+y+z) \\ &= (x+y+z) [(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)] + 2013(x+y+z) \\ &= (x+y+z) [(x+y+z)^2 - 3 \cdot 671 + 2013] = (x+y+z)^3 \end{aligned}$$

Từ đó

$$VT \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3} = \frac{1}{x+y+z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{\sqrt{2013}}{3}$. $\square$

———— HẾT ————

16 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GỎI, NINH THUẬN

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Tìm x, y thỏa mãn phương trình: $4y\sqrt{x-2} + 2x\sqrt{y-1} = y(3x-2)$

Lời giải.

Điều kiện của phương trình : $x \geq 2, y \geq 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} 4y\sqrt{x-2} + 2x\sqrt{y-1} &= y(3x-2) \Leftrightarrow 4y\sqrt{x-2} + 2x\sqrt{y-1} - 3xy + 2y = 0 \\ \Leftrightarrow -2xy + 4y\sqrt{x-2} + 2y - xy + 2x\sqrt{y-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow -2y(x - 2\sqrt{x-2} - 1) - x(y - 2\sqrt{y-1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2y(x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1) - x(y - 1 - 2\sqrt{y-1} + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2y(\sqrt{x-2} - 1)^2 - x(\sqrt{y-1} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y(\sqrt{x-2} - 1)^2 + x(\sqrt{y-1} - 1)^2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) = (3; 2)$ □

Câu 2. Cho các số thực a, b, c không âm. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

Lời giải.

Các số a, b, c không âm, nên ta có:

$$\begin{aligned} a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow ab^2 - 2abc + ac^2 + bc^2 - 2abc + ba^2 + ca^2 - 2abc + cb^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 &\geq 6abc \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2) + 6abc \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3.6abc + 6abc \Leftrightarrow (a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$.

□

Câu 3. Cho tam giác ABC có trung tuyến $AM = 1$ và $\widehat{ABC} = \widehat{CAM}$. Tính độ dài cạnh AB .

Lời giải.

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{MAC}$ (Theo giả thiết) và $\widehat{ACM}$ chung, suy ra:

$$\Delta ABC \sim \Delta MAC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MA} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{MC} (*)$$

Theo giả thiết $AM = 1$, nên từ (*) suy ra: $AB = \frac{AC}{MC}$ (1)

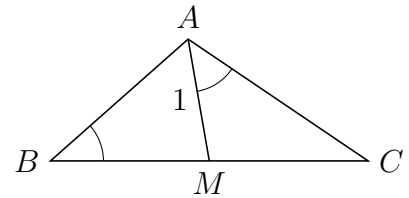
Mặt khác, theo giả thiết AM là trung tuyến nên M là trung điểm của $BC \Rightarrow BC = 2MC$.

$$\text{Do đó, từ (*) suy ra: } \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{2MC}{AC}$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 2MC^2 \Leftrightarrow \frac{AC^2}{MC^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = \sqrt{2} (2)$$

Do đó, từ (1) và (2) suy ra: $AB = \sqrt{2}$.



□

Câu 4. Chứng minh rằng $ab(a^2 - b^2)$ Chia hết cho 3 với mọi số nguyên a và b .

Lời giải.

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: a hoặc b chia hết cho 3. Khi đó tích $ab:3$ nên $ab(a^2 - b^2):3$.
- Trường hợp 2: Cả a và b không chia hết cho 3. Khi đó: $a = 3p + r_1$ và $b = 3q + r_2$ với p, q, r_1, r_2 nguyên và $1 \leq r_1, r_2 \leq 2$.

$$\oplus \text{ Nếu: } r_1 = r_2 \text{ thì } (a - b):3 \text{ suy ra } ab(a^2 - b^2) = ab(a - b)(a + b):3$$

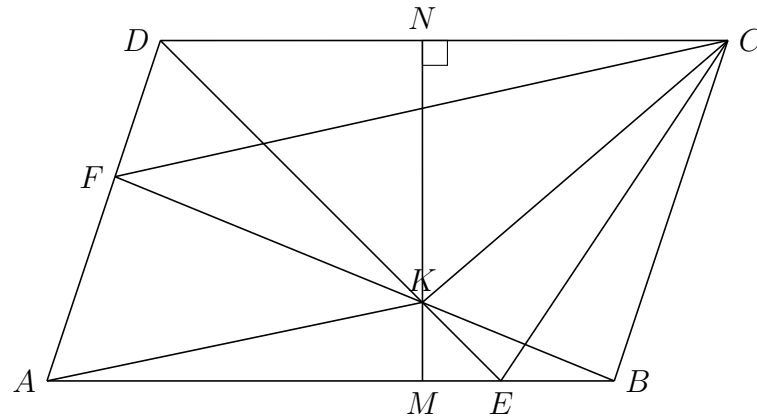
$$\oplus \text{ Nếu: } r_1 \neq r_2 \text{ thì } (a + b):3 \text{ suy ra } ab(a^2 - b^2) = ab(a - b)(a + b):3$$

Vậy: $ab(a^2 - b^2):3$ với mọi số nguyên a, b .

□

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và AD lần lượt lấy các điểm E và F (E, F không trùng với các đỉnh của hình bình hành). Gọi K là giao điểm của ED và FB . Chứng minh rằng hai tứ giác $ABKD$ và $CEKF$ có diện tích bằng nhau.

Lời giải.



Ta có: $S_{ABKD} = S_{\Delta AKB} + S_{\Delta AKD}$ và $S_{CEKF} = S_{\Delta CKE} + S_{\Delta CKF}$

Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AB và CD (vì $AB \parallel CD$), cắt AB tại M và cắt CD tại N .

$$\text{Ta có: } S_{\Delta AKB} + S_{\Delta CKD} = \frac{1}{2}KM \cdot AB + \frac{1}{2}KN \cdot CD = \frac{1}{2}AB \cdot MN = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } S_{\Delta CKE} + S_{\Delta CKD} = S_{\Delta CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot MN = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } S_{\Delta AKB} = S_{\Delta CKE} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có: } S_{\Delta AKD} + S_{\Delta CKB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \text{ và } S_{\Delta CKF} + S_{\Delta CKB} = S_{\Delta BFC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

$$\text{Suy ra: } S_{\Delta AKD} = S_{\Delta CKF} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } S_{\Delta AKB} + S_{\Delta AKD} = S_{\Delta CKE} + S_{\Delta CKF}$$

$$\text{Vậy: } S_{ABKD} = S_{CEKF}$$

□

———— HẾT ————

17 ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9, VINH PHÚC

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1.

- a) Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{a}-16}{a-6\sqrt{a}+8} - \frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-2} - \frac{2\sqrt{a}+1}{4-\sqrt{a}}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để giá trị của M là một số nguyên.
- b) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $P(x) \geq 0$ với mọi số thực x và $b > a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a+b+c}{b-a}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định: $a \geq 0, a \neq 4, a \neq 16$.
Ta có $M = \frac{2\sqrt{a}-16}{a-6\sqrt{a}+8} - \frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-2} - \frac{2\sqrt{a}+1}{4-\sqrt{a}} = \frac{a-\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-4)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-4}$
 $M = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-4} = 1 + \frac{5}{\sqrt{a}-4}$, M nguyên suy ra $\sqrt{a}-4$ là ước của 5, cho nên $\sqrt{a}-4 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow a = 9; 25; 81$.
- b) $P(-2) = 4a - 2b + c \geq 0 \Rightarrow a + b + c \geq 3(b-a)$ suy ra $Q \geq 3$. Ta thấy đa thức $P(x) = x^2 + 4x + 4$ thỏa mãn giả thiết và $Q = 3$. Vậy $Q_{\min} = 3$.

□

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau vô nghiệm:

$$\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq m-1, x \neq -m-2$.

Phương trình tương đương với $(2m+2)x = -m-2$ (1).

Nếu $m = -1$, (1) $\Leftrightarrow 0x = -1$ (vô nghiệm)

Nếu $m \neq -1$, $x = \frac{-m-2}{2m+2}$, phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{-m-2}{2m+2} = m-1 \quad (2) \text{ hoặc } \frac{-m-2}{2m+2} = -m-2 \quad (3).$$

$$(2) \Leftrightarrow m = 0; m = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \Leftrightarrow m = -2; m = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } m = 0, m = -1, m = -2, m = -\frac{1}{2}.$$

□

Câu 3. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng số $p^{1954^{57}} - 1$ chia hết cho 60.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $p^{4m} - 1$ chia hết cho 60 với mọi m nguyên dương.

$p^{4m} - 1 = M(p^2 - 1)(p^2 + 1)$, p nguyên tố lẻ suy ra $(p^2 - 1)(p^2 + 1)$ chia hết cho 4.

p là số nguyên tố lớn hơn 5 theo định lý Fermat nhỏ ta có $p^4 - 1$ chia hết cho 5.

p là số nguyên tố lớn hơn 5 suy ra $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ cho nên $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

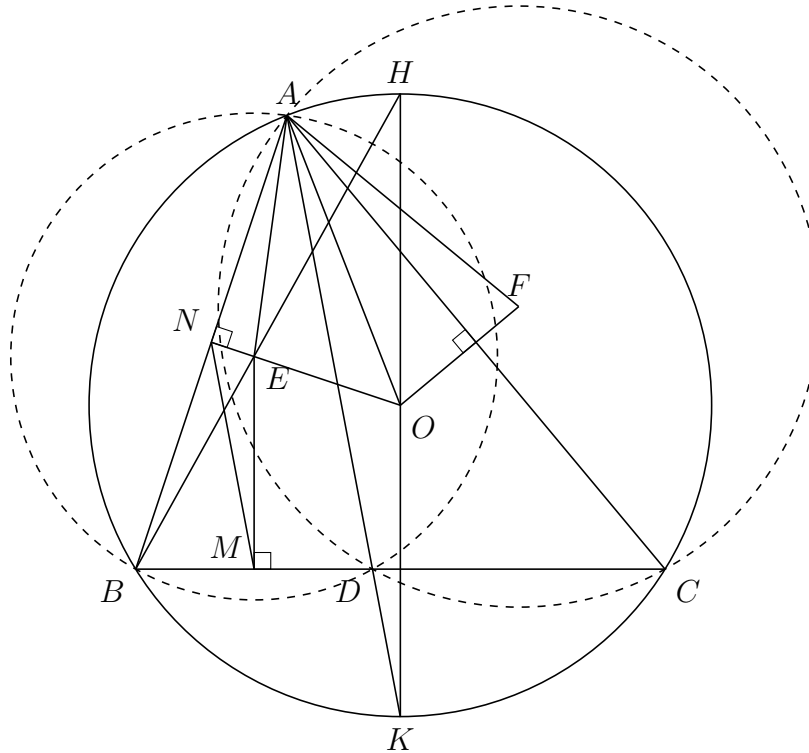
Vậy $p^{4m} - 1$ chia hết cho 60. Dễ thấy 1954^{57} chia hết cho 4 (ĐPCM).

□

Câu 4. Cho đường tròn (O) có tâm O và bán kính R . Hai điểm phân biệt B, C cố định nằm trên (O) sao cho $BC = a < R$. Gọi A là điểm bất kì thuộc cung lớn BC của (O) , A không trùng với B, C . Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC . Hai điểm E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADB và ADC .

- Chứng minh rằng hai tam giác AEO và ADC đồng dạng.
- Tính diện tích tứ giác $AEOF$ theo a và R .
- Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi thì E di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Lời giải.



- Gọi N là trung điểm của AB , trong đường tròn (O) ta có $\widehat{AON} = \widehat{ACB}$ (1), trong đường tròn (ADB) ta có $\widehat{AEN} = \widehat{ADB} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{AEN} = 180^\circ - \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ADC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác AEO và ADC đồng dạng.

- Hai tam giác AEO và ADC đồng dạng suy ra $\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow OE = \frac{AO \cdot CD}{AC}$ (3).

Chứng minh tương tự hai tam giác AFO và ADB đồng dạng suy ra $OF = \frac{AO \cdot BD}{AB}$ (4).

Vì AD là phân giác suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ (5).

$$4S_{AEOF} = OE \cdot AB + OF \cdot AC \quad (6)$$

Từ (3), (4), (5), (6) ta có $4S_{AEOF} = AO(BD + CD) = R \cdot a \Rightarrow S_{AEOF} = \frac{R \cdot a}{4}$.

- Gọi H là giao điểm của OK và (O) , M là trung điểm của BD , dễ thấy $\widehat{BNE} = \widehat{BME} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $BMEN$ nội tiếp đường tròn đường kính BE mặt khác $MN \parallel AK \Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{BNM} = \widehat{BAK} = \widehat{BHK}$.

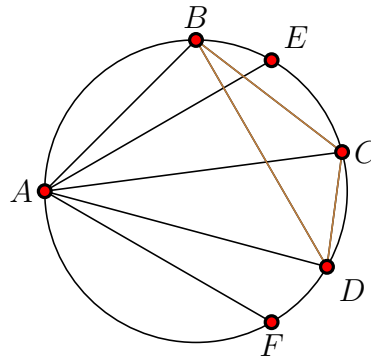
Giả sử H' là giao điểm của BE và HK , $EM \parallel HK \Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{BH'K} = \widehat{BHK} \Rightarrow H \equiv H'$.

Vậy E thuộc đường thẳng BH cố định khi A thay đổi.

□

Câu 5. Trên một đường tròn cho 21 điểm phân biệt. Mỗi một điểm được tô bởi một trong 4 màu: xanh, đỏ, tím, vàng. Giữa mỗi cặp điểm nối với nhau bằng một đoạn thẳng được tô bởi một trong 2 màu: nâu hoặc đen. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác có ba đỉnh được tô cùng một màu (xanh, đỏ, tím hoặc vàng) và ba cạnh cũng được tô cùng một màu (nâu hoặc đen).

Lời giải.



Vì các điểm phân biệt nằm trên một đường tròn nên ba điểm bất kỳ luôn tạo thành một tam giác. Có 21 điểm được tô bằng 4 màu, do đó có ít nhất 6 điểm có cùng màu. Giả sử có 6 điểm cùng màu đỏ là A, B, C, D, E, F . Nối 5 đoạn AB, AC, AD, AE, AF và tô bằng 2 màu nâu, đen khi đó có ít nhất 3 đoạn cùng màu, giả sử AB, AC, AD được tô cùng màu đen. Xét tam giác BCD , xảy ra hai khả năng

- i) Nếu ba cạnh BC, BD, DC được tô cùng màu nâu thì tam giác BCD có ba đỉnh cùng màu đỏ, ba cạnh cùng màu nâu (thỏa mãn)
- ii) Nếu ba cạnh BC, BD, DC có ít nhất một cạnh màu đen, giả sử BC đen, khi đó tam giác ABC có ba đỉnh cùng màu đỏ, ba cạnh cùng màu đen (thỏa mãn)

Vậy luôn có một tam giác có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu. □

————— HẾT —————

18 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GỎI NĂM HỌC 2017-2018, AN GIANG.

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị của biểu thức $P = (1 + 3x^3 - x^5)^{2016}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1} + \sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \\ \Rightarrow 1 - 3x^3 + x^5 &= 1 - 3 \cdot (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^5 = 1. \end{aligned}$$

Vậy $A = (1 - 3x^3 + x^5)^{2016} = 1$. □

Câu 2. Cho Parabol (P) : $y = \frac{1}{4}x^2$ và điểm $A(0; 1)$.

a) Vẽ Parabol (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trên (P) thì độ dài đoạn MA bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$.

(Biết khoảng cách giữa hai điểm $C(x_c; y_c), D(x_D; y_D)$ bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ được tính theo công thức $CD = \sqrt{(x_D - x_c)^2 + (y_D - y_c)^2}$).

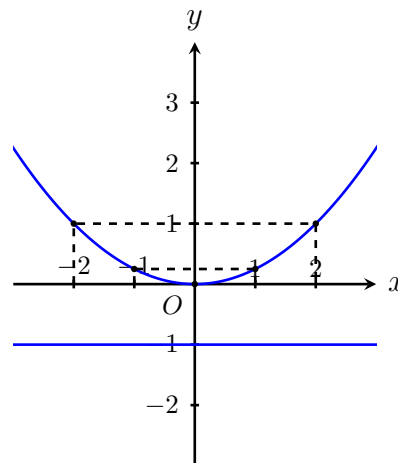
Lời giải.

a) Vẽ Parabol (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Giá trị đặc biệt

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

Đồ thị



- b) Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trên (P) thì độ dài đoạn MA bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$.

Điểm M thuộc $(P) \Rightarrow M\left(x; \frac{1}{4}x^2\right); A(0; 1)$.

Từ M kẻ MN vuông góc với (d) , và AH vuông góc MN .

Khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$ là

$$MN = y_M + 1 = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Khoảng cách giữa hai điểm M, A là

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(0 - x)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}x^2 + 1 \\ &= y_M + 1 = MN \end{aligned}$$

Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$ bằng độ dài đoạn thẳng MA .

□

Câu 3. Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$ tìm b, c và các nghiệm còn lại của phương trình.

Lời giải.

Phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$ nên

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{5})^3 + b(2 + \sqrt{5})^2 + c(2 + \sqrt{5}) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^3 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5}) + b(9 + 4\sqrt{5}) + c(2 + \sqrt{5}) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4b + c + 17)\sqrt{5} + (9b + 2c + 39) &= 0 \end{aligned}$$

Vì $\sqrt{5}$ là số vô tỉ, b, c là các số nguyên nên ta có

$$\begin{cases} 4b + c + 17 = 0 \\ 9b + 2c + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b + 2c + 34 = 0 \\ 9b + 2c + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 3 \end{cases}$$

Với $b = -5; c = 3$ phương trình trở thành

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x - 1) = 0$$

Phương trình có ba nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}; x_1 = 2 - \sqrt{5}; x_2 = 1$. □

Câu 4. Tìm x, y biết

$$\sqrt{2(\sqrt{x} + y - 2)} = \sqrt{\sqrt{x} \cdot y}.$$

Lời giải.

ĐK $x, y \geq 0; \sqrt{x} + y - 2 \geq 0$.

Bình phương hai vế của phương trình ta có

$$2\sqrt{x} + 2y - 4 = \sqrt{x} \cdot y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(2 - y) + 2(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(2 - \sqrt{x}) = 0$$

Khi đó $x = 4$ hoặc $y = 2$. So với điều kiện, ta có $x = 4; y \geq 0$ hoặc $x \geq 0; y = 2$. □

Câu 5. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MB, MD với đường tròn (B, D là tiếp điểm) và một cát tuyến qua M cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, C .

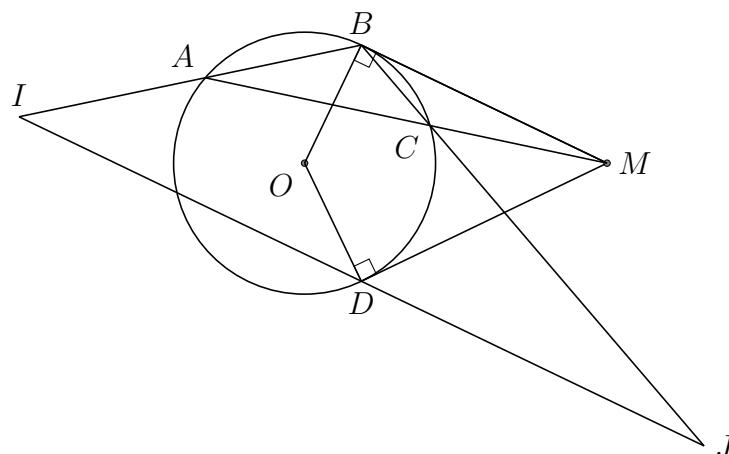
a) Chứng minh hai tam giác MAB và MBC đồng dạng.

b) Chứng minh $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

c) Gọi (d) là đường thẳng qua D và song song với MB , (d) cắt BA, BC lần lượt tại I và J .

Chứng minh $DI = DJ$.

Lời giải.



- a) Chứng minh hai tam giác MAB và MBC đồng dạng.

Hai tam giác MAB và MBC có

$\widehat{M}$ chung

$\widehat{MBA} = \widehat{MCB}$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$)

Vậy $\triangle MAB \sim \triangle MBC$.

- b) Chứng minh $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

Ta có

$$\triangle MAB \sim \triangle MBC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MB}{MC} \quad (1)$$

Hai tam giác MAD và MDC có

$\widehat{M}$ chung

$\widehat{MDA} = \widehat{MCD}$ (cùng chắn cung $\widehat{AD}$)

Vậy $\triangle MAD \sim \triangle MDC$.

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{MD}{MC} \quad (2)$$

Mà $MB = MD$ nên từ (1) và (2) ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BC.$$

- c) Gọi (d) là đường thẳng qua D và song song với MB , (d) cắt BA, BC lần lượt tại I và J . Chứng minh $DI = DJ$.

Hai tam giác IBD và DBA đồng dạng do

$\widehat{B}$ chung

$\widehat{BID} = \widehat{IBM}$ (so le trong)

$\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$ (chắn cung $\widehat{AB}$)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{ID}{DA} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{ID}{BD} \quad (3)$$

Tương tự hai tam giác JBD và DBC đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{JD}{DC} \Leftrightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{JD}{BD} \quad (4)$$

Theo câu a)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} \quad (5)$$

$$(3), (4), (5) \Rightarrow \frac{ID}{BD} = \frac{JD}{BD} \Rightarrow DI = DJ.$$

□

———— HẾT ————

19 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GỎI, SỞ GD BẾN TRE

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Chứng minh rằng: $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16 với mọi n là số nguyên.
- b) Cho biểu thức $B = \sqrt{\frac{(x^2 - 3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x + 2)^2 - 8x}$.
Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên.
- c) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

Lời giải.

- a) Ta có $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = n^4(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = [n(n + 1)]^4$.
Vì $n(n + 1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $n(n + 1) : 2 \Rightarrow [n(n + 1)]^4 : 2^4 = 16$.
Do đó: $A : 16$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

$$b) B = \sqrt{\frac{(x^2 - 3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x + 2)^2 - 8x} = \sqrt{\frac{(x^2 + 3)^2}{x^2}} + \sqrt{(x - 2)^2} = \frac{x^2 + 3}{|x|} + |x - 2|.$$

$$\bullet \text{ Nếu } x < 0 \Rightarrow B = \frac{-x^2 - 3}{x} - x + 2 = \frac{-2x^2 + 2x - 3}{x} = -2x + 2 - \frac{3}{x}.$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } \frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{U}(3) \text{ và } x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Nếu } 0 < x \leq 2 \Rightarrow B = \frac{x^2 + 3}{x} - x + 2 = \frac{2x + 3}{x} = 2 + \frac{3}{x}.$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } \frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{U}(3) \text{ và } 0 < x \leq 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet \text{ Nếu } x > 2 \Rightarrow B = \frac{x^2 + 3}{x} + x - 2 = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x} = 2x - 2 + \frac{3}{x}.$$

$$B \text{ có giá trị nguyên khi } \frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{U}(3) \text{ và } x > 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Tập các giá trị của x để B nguyên là $x \in \{\pm 1; \pm 3\}$.

$$c) 2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2y^2 + y) = 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ x - 2y^2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \\ x - 2y^2 + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là $(2; 1)$ và $(0; 1)$.

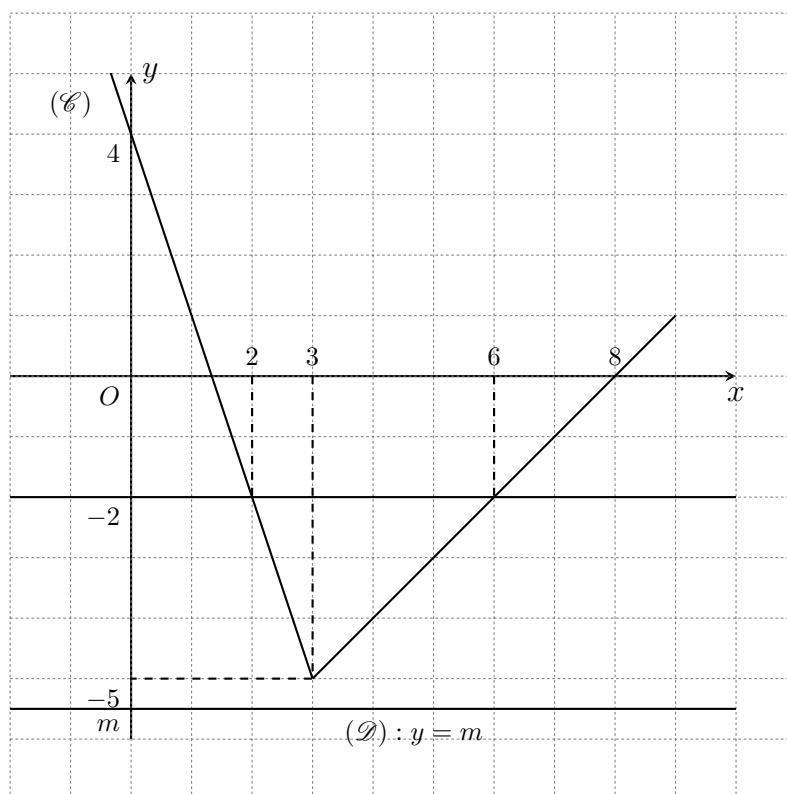
□

Câu 2. Cho hàm số $y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ có đồ thị $(\mathcal{C})$.

- a) Vẽ đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số trên
- b) Với giá trị nào của m thì phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = m$ vô nghiệm.
- c) Dựa vào đồ thị $(\mathcal{C})$, tìm tập nghiệm của bất phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x$.

Lời giải.

$$a) y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = 2|x - 3| - x - 2 = \begin{cases} x - 8 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -3x + 4 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}.$$



b) $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = m$ (*).

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị sau: $(\mathcal{C}) : y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ và $(\mathcal{D}) : y = m$ là đường thẳng song song với trục Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ m .

Căn cứ đồ thị ta có phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow (\mathcal{C})$ và $(\mathcal{D})$ không giao nhau $\Leftrightarrow m < -5$.

□

Câu 3. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 \end{cases} \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z).$$

Chứng minh rằng: $\frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 & (1) \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 & (2) \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z). \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 & (3) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) theo vế, ta có: $x^2 - xy - z^2 = 1008$ (4).

Trừ (3) và (4) theo vế, ta có: $xz - xy + 2z^2 = 0$

$$\Leftrightarrow xz + 2z^2 = xy \Leftrightarrow 2xz + 2z^2 = xy + xz.$$

$$\Leftrightarrow 2z(x+z) = x(y+z).$$

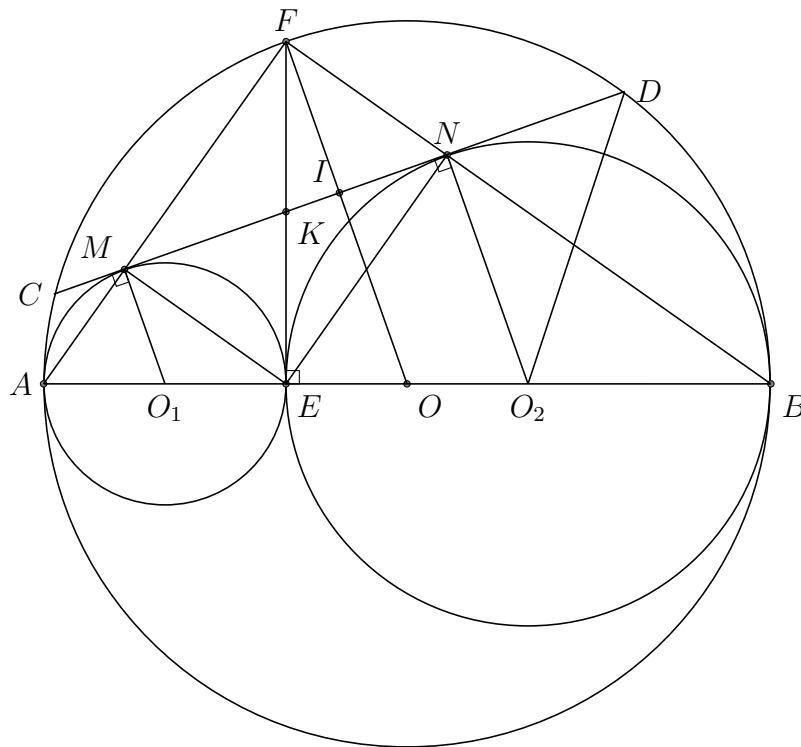
$$\Leftrightarrow \frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}.$$

□

Câu 4. Cho đoạn thẳng AB và điểm E nằm giữa điểm A và điểm B sao cho $AE < BE$. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AE và đường tròn (O_2) đường kính BE . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN của hai đường tròn (O_1) và (O_2) với M là tiếp điểm thuộc (O_1) và N là tiếp điểm thuộc (O_2) .

- Gọi F là giao điểm của các đường thẳng AM và BN . Chứng minh rằng đường thẳng EF vuông góc với đường thẳng AB .
- Với $AB = 18$ cm và $AE = 6$ cm, vẽ đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại C và D sao cho điểm C thuộc cung nhỏ AD . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Lời giải.



- MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) nên $\begin{cases} MN \perp O_1M \\ MN \perp O_2N \end{cases} \Rightarrow O_1M \parallel O_2N$.

$$\Rightarrow \widehat{MO_1E} + \widehat{NO_2E} = 180^\circ.$$

$$\Delta O_1AM \text{ cân tại } O_1 \Rightarrow \widehat{MO_1E} = 2\widehat{O_1AM}.$$

$$\Delta O_2BN \text{ cân tại } O_2 \Rightarrow \widehat{NO_2E} = 2\widehat{O_2BN}.$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1AM} + \widehat{O_2BN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MFN} = 90^\circ.$$

Mặt khác $\widehat{AME} = \widehat{BNE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow MENF$ là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{NME}.$$

$$\text{Mà } \widehat{O_1EM} = \widehat{O_1ME} \text{ và } \widehat{NME} + \widehat{O_1ME} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MEF} + \widehat{O_1EM} = 90^\circ$$

hay $EF \perp AB$ tại E .

- Ta có: $AB = 18$ cm, $AE = 6$ cm $\Rightarrow EB = 12$ cm, $OF = 9$ cm.

$$\Delta AFB \text{ vuông tại } F \text{ có đường cao } EF \text{ nên } EF^2 = AE \cdot EB = 6 \cdot 12 = 72 \Rightarrow EF = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow MN = EF = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của EF, OF với MN .

Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật nên $\widehat{NMF} = \widehat{NEF}$. Mà $\widehat{NEF} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ góc $\widehat{BEM}$).

$$\Rightarrow \widehat{NMF} = \widehat{ABF} \quad (1).$$

$$\Rightarrow \triangle FNM \sim \triangle FAB.$$

Lại có $\triangle OAF$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAF} = \widehat{OFA}$ (2) và $\widehat{OAF} + \widehat{ABF} = 90^\circ$ (3).

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{NMF} + \widehat{OFA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIF} = 90^\circ$.

$\triangle FNM \sim \triangle FAB$ và có FI, FE là hai đường cao tương ứng nên: $\frac{FI}{EF} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow FI = 4$ cm $\Rightarrow OI = 5$ cm.

$\triangle OID$ vuông tại $I \Rightarrow ID = \sqrt{OD^2 - OI^2} = 2\sqrt{14}$ cm.

Vì $OF \perp CD$ tại $I \Rightarrow CD = 2ID = 4\sqrt{14}$ cm.

□

Câu 5. Cho tam giác ABC cân tại A , có góc A nhỏ hơn 90° . Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại điểm M (điểm $M \in AC$). Chứng minh rằng: $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2$.

Lời giải.

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.

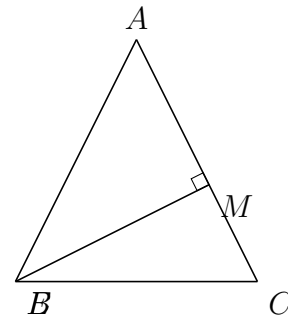
$$\text{Ta có: } \frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{AM + MC}{MC} = 2 \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = 2 \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow BC^2 = 2AC \cdot MC.$$

Ta cần chứng minh: $BC^2 = 2AC \cdot MC$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BM^2 + MC^2 = AB^2 - AM^2 + (AC - AM)^2 \\ &= AC^2 - AM^2 + AC^2 - 2AC \cdot AM + AM^2 \\ &= 2AC^2 - 2AC \cdot AM = 2AC(AC - AM) = 2AC \cdot MC. \end{aligned}$$

□



————— HẾT —————

20 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI, HẢI PHÒNG

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. Cho $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = (12x^2 + 4x - 55)^{2017}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 2.$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5} = \sqrt{5}+1-\sqrt{5} = 1.$$

Vậy $x = 2$. Thay giá trị x vào P ta được:

$$P = (12.2^2 + 4.2 - 55)^{2017} = 1^{2017} = 1.$$

□

Câu 2. Cho biểu thức $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0$, $a \neq 1$. Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải.

Với điều kiện $a > 0$, $a \neq 1$ thì:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}}. \\ \Rightarrow N &= \frac{6}{M} = \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Khi đó ta thấy với $0 < a \neq 1$ thì

$$a - \sqrt{a} + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 > 3\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a} + 1)^2} < 2.$$

Do $0 < N < 2$ nên để N có giá trị nguyên thì $N = 1$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \frac{6\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} = 1 &\Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - 2)^2 = 3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{3} + 2 \\ \sqrt{a} = -\sqrt{3} + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ a = 7 - 4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

□

Câu 3. Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (với m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$?

Lời giải.

Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm thì

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 6) = m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6.$$

Theo hệ thức Viét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m - 6 \end{cases}$$

Ta có

$$|x_1| + |x_2| = 8 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 64 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 64. \quad (1)$$

Trường hợp 1: Nếu x_1 và x_2 cùng dấu thì:

$$x_1 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ (thỏa mãn } (*))$$

Trường hợp 2: Nếu x_1 và x_2 trái dấu thì:

$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3. \quad (**)$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - m - 6) = 64 \\ &\Leftrightarrow m + 6 = 16 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (không thỏa mãn điều kiện } (**)) \end{aligned}$$

Kết luận: $m = \pm 4$. □

Câu 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3 y^2 - 2x^2 y - x^2 y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}$ (với m là tham số).

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &x^3 y^2 - 2x^2 y - x^2 y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 y^2 - 2xy + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (xy-1)^2 + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Thay $x = 1$ vào phương trình dưới của hệ ta được $y^2 - y - 3m + 1 = 0$. (1)

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta = 1 + 4(3m - 1) > 0 \Leftrightarrow 12m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Theo đề bài và chú ý rằng $x_1 = x_2 = 1$:

$$(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 + y_1 + y_2 + y_1 y_2 = 0. \quad (2)$$

Với $m > \frac{1}{4}$, theo hệ thức Viét cho phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 y_2 = 1 - 3m \end{cases}$$

Thay vào (2) ta được

$$5 + 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Kết luận $m = 2$. □

Câu 5. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2 b - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(a + b^2) : (a^2b - 1) &\Rightarrow a + b^2 = k(a^2b - 1), \quad k \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow a + k &= b(ka^2 - b) \text{ hay } mb = a + k \quad (1) \text{ với } m = ka^2 - b \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow m + b &= ka^2. \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$mb - m - b + 1 = a + k - ka^2 + 1 \Leftrightarrow (m - 1)(b - 1) = (a + 1)(k + 1 - ka). \quad (3)$$

Do $m, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (m - 1)(b - 1) \geq 0$.

Vì thế từ (3) suy ra: $(a + 1)(k + 1 - ka) \geq 0$.

Lại do $a > 0$ nên suy ra: $k + 1 - ka \geq 0 \Rightarrow 1 \geq k(a - 1)$.

Vì $a - 1 > 0, k > 0$ nên $1 \geq k(a - 1) \geq 0$ và $k(a - 1) \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(a - 1) = 0 \\ k(a - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Với $a = 1$. Thay vào (3) ta được:

$$\begin{aligned}(m - 1)(b - 1) &= 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 2 \\ b - 1 = 1 \\ m - 1 = 1 \\ b - 1 = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow ka^2 = 5 \Rightarrow a = 1 \\ b = 3 \Rightarrow ka^2 = 5 \Rightarrow a = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy, trường hợp này ta được hai cặp $a = 1, b = 2$ và $a = 1, b = 3$.

Với $a = 2$ và $k = 1$. Thay vào (3) ta có:

$$(m - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Khi $b = 1$, ta được $a = 2, b = 1$.

Khi $m = 1$. Từ (1) suy ra $a + k = b \Rightarrow b = 3$. Khi đó $a = 2, b = 3$.

Vậy có 4 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn là: $(1; 2), (1; 3), (2; 3), (2; 1)$. □

Câu 6. Cho ba số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b + c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c + a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a + b)^3}} \geq 1$$

Lời giải.

Với x là số dương, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3 + 1} &= \sqrt{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \leq \frac{x + 1 + x^2 - x + 1}{2} = \frac{x^2 + 2}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^3 + 1}} &\geq \frac{2}{x^2 + 2}\end{aligned} \quad (*)$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 2} = \frac{2a^2}{(b+c)^2 + 2a^2}.$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{2a^2}{2(b^2 + c^2) + 2a^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (1)$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (3)$$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1.$$

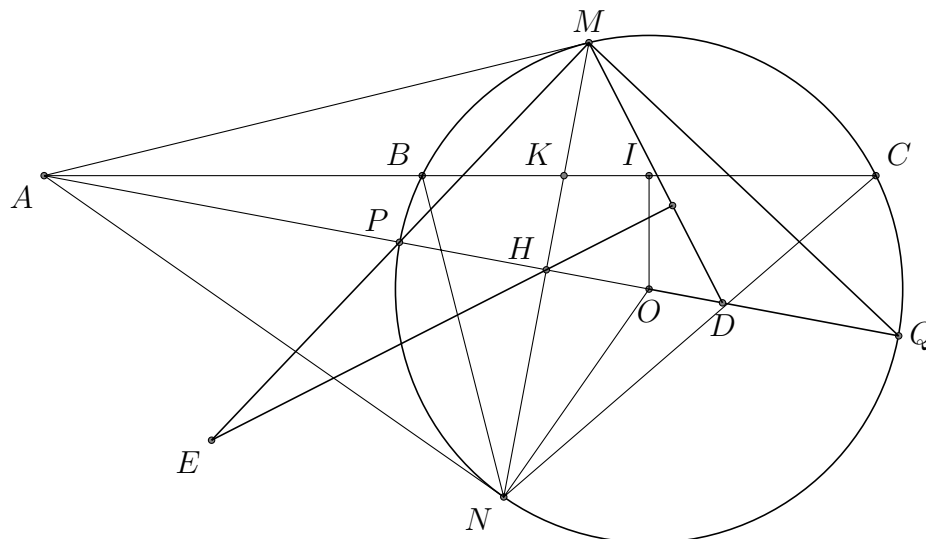
Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$. □

Câu 7. Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (điểm B nằm giữa điểm A và điểm C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua điểm B và điểm C (điểm O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (với M và N là các tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt MN tại điểm K . Đường thẳng AO cắt MN tại điểm H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và Q).

a) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

b) Gọi D là trung điểm của HQ , từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E . Chứng minh rằng P là trung điểm của ME .

Lời giải.



a) Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $IO \perp BC$.

$\triangle ABN$ đồng dạng với $\triangle ANC$ (vì $\widehat{ANB} = \widehat{ACN}$, $\widehat{CAN}$ chung)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$$

$\triangle ANO$ vuông tại N , đường cao NH nên $AH.AO = AN^2$. Suy ra

$$AB.AC = AH.AO \quad (1)$$

$\triangle AHK$ đồng dạng với $\triangle AIO$ (g.g) nên

$$\frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK = AH.AO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AI.AK = AB.AC \Rightarrow AK = \frac{AB.AC}{AI}$$

Ta có A, B, C cố định nên I cũng cố định, suy ra AK không đổi. Mà A cố định, K là giao điểm của BC và MN nên K thuộc tia AB , suy ra K cố định.

b) Xét hai tam giác MHE và QDM . Có

$$\widehat{NME} = \widehat{MQP}$$

$$\widehat{NHE} = 90^\circ - \widehat{AHE} = \widehat{MDH}. \text{ Suy ra } \widehat{MHE} = 180^\circ - \widehat{NHE} = 180^\circ - \widehat{MDH} = \widehat{MDQ}$$

$$\text{Vậy } \triangle MHE \text{ đồng dạng với } \triangle QDM, \text{ suy ra } \frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}.$$

$$\text{Mặt khác, } \triangle PMH \text{ đồng dạng với } \triangle MQH \text{ (g.g), suy ra } \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{QH} = \frac{MH}{2DQ}.$$

Từ hai kết quả trên suy ra

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ME}{MQ} \Rightarrow ME = 2MP$$

Từ đó suy ra P là trung điểm của ME . □

Câu 8. Cho tập hợp A gồm 21 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 phần tử bất kì lớn hơn tổng của 10 phần tử còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A . Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A .

Lời giải.

Giả sử $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{21}\}$ với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{21} \in \mathbb{Z}$ và $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{21}$.

Theo giả thiết ta có

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21}$$

$$\Leftrightarrow a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \dots + (a_{21} - a_{11}) \quad (1)$$

Mặt khác với $x, y \in \mathbb{Z}$ và nếu $x < y$ thì $y \geq x + 1$. Suy ra

$$a_{12} - a_2 \geq 10, a_{13} - a_3 \geq 10, \dots, a_{21} - a_{11} \geq 10 \quad (2)$$

Nên từ (1) suy ra

$$a_1 > 10 + 10 + \dots + 10 = 100$$

Mà a_1 nhỏ nhất và $101 \in A$ nên $a_1 = 101$.

Ta có

$$101 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \dots + (a_{21} - a_{11}) \geq 100$$

$$\Rightarrow (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \dots + (a_{21} - a_{11}) = 100$$

Kết hợp với (2), suy ra

$$a_{12} - a_2 = a_{13} - a_3 = \cdots = a_{21} - a_{11} = 10 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 10 = a_{12} - a_2 = (a_{12} - a_{11}) + (a_{11} - a_{10}) + \cdots + (a_3 - a_2) \geq 10$$

$$\Rightarrow a_{12} - a_{11} = a_{11} - a_{10} = \cdots = a_3 - a_2 = 1 \quad (4)$$

Ta có $a_1 = 101$ mà $102 \in A$ suy ra $a_2 = 102$.

Kết hợp với (3) và (4) suy ra $A = \{101; 102; \cdots; 121\}$. □

————— **HẾT** —————

21 ĐỀ THI HSG TOÁN 9, PHÚ LỘC, THỪA THIÊN HUẾ, 2017

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1}$.

- Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị của x để $\frac{2}{A}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

- Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \left(\frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - 2 \right) : \frac{1}{x - 1} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (x - 1) \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \cdot (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} + 1)^2. \end{aligned}$$

- Với điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\text{Ta có: } A = (\sqrt{x} + 1)^2.$$

$$\text{Vì } A = (\sqrt{x} + 1)^2 \geq 1 \text{ với mọi } x \geq 0 \text{ nên } 0 \leq \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \leq 2.$$

$$\text{Do đó: } \frac{2}{A} = \frac{2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \in \mathbb{N} \text{ khi } (\sqrt{x} + 1)^2 = 1 \text{ hoặc } (\sqrt{x} + 1)^2 = 2.$$

$$\text{Mà } \sqrt{x} + 1 > 0 \text{ nên } \sqrt{x} + 1 = 1 \text{ hoặc } \sqrt{x} + 1 = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } x = 0 \text{ hoặc } x = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{2}{A} \text{ là số tự nhiên khi } x = 0 \text{ hoặc } x = 3 - 2\sqrt{2}.$$

□

Câu 2. Giải phương trình: $x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 4}$.

Lời giải.

Điều kiện: $4 \leq x \leq 6$.

- $VT = x^2 - 10x + 27 = (x - 5)^2 + 2 \geq 2$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 5$.
 - $VP = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x - 4} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2) [(\sqrt{6 - x})^2 + (\sqrt{x - 4})^2]} \Leftrightarrow VP \leq 2$.
- dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6 - x}} = \frac{1}{\sqrt{x - 4}} \Rightarrow 6 - x = x - 4 \Leftrightarrow x = 5$.
- $VT = VP \Leftrightarrow x = 5$ (TMDK). Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$.

□

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Lời giải.

Ta có: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$A = \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-x^2}{x^2+x+1} = 1 - \frac{x^2}{x^2+x+1} \leq 1 \quad (\text{vì } \frac{x^2}{x^2+x+1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$, suy ra: $\max A = 1$ khi $x = 0$.

$$A = \frac{x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow 3A = \frac{3x+3}{x^2+x+1} = \frac{x^2+4x+4-(x^2+x+1)}{x^2+x+1}.$$

$$= \frac{(x+2)^2}{x^2+x+1} - 1 \geq -1 \quad (\text{vì } \frac{(x+2)^2}{x^2+x+1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}).$$

Suy ra: $A \geq -\frac{1}{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Suy ra: $\min A = -\frac{1}{3}$, khi $x = -2$. □

Câu 4. Cho hai đường thẳng: $y = x + 3$ (d_1); $y = 3x + 7$ (d_2).

- Gọi A và B lần lượt là giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục Oy . Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
- Gọi J là giao điểm của (d_1) và (d_2). Tam giác OIJ là tam giác gì? Tính diện tích của tam giác đó.

Lời giải.

- Tìm được $A(0; 3); B(0; 7)$. Suy ra $I(0; 5)$.
- Hoành độ giao điểm J của (d_1) và (d_2) là nghiệm của phương trình: $x + 3 = 3x + 7$
 $\Rightarrow x = -2 \Rightarrow y_J = 1 \Rightarrow J(-2; 1)$.

$$\text{Suy ra: } OI^2 = 0^2 + 5^2 = 25; OJ^2 = 2^2 + 1^2 = 5; IJ^2 = 2^2 + 4^2 = 20.$$

$$\Rightarrow OJ^2 + IJ^2 = OI^2 \Rightarrow \text{tam giác } OIJ \text{ là tam giác vuông tại } J.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OIJ} = \frac{1}{2} OI \cdot OJ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 5 \text{ (đvdt)}. \quad \square$$

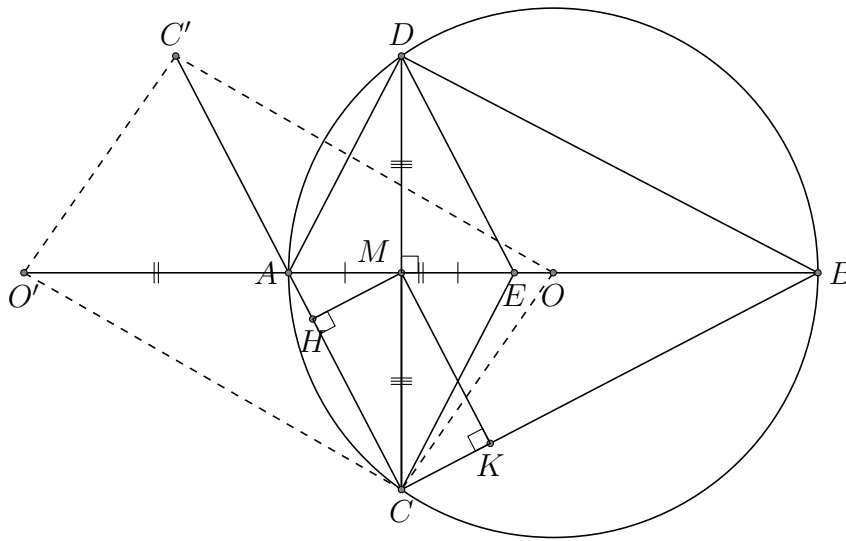
Câu 5. Cho đường tròn ($O; R$) đường kính AB . Gọi M là điểm nằm giữa A và B . Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB , lấy điểm E đối xứng với A qua M .

- Tứ giác $ACED$ là hình gì? Vì sao?
- Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên AC và BC . Chứng minh rằng:

$$\frac{HM}{HK} \cdot \frac{MK}{MC} = \frac{CD}{4R}.$$

- Gọi C' là điểm đối xứng với C qua A . Chứng minh rằng C' nằm trên một đường tròn cố định khi M di chuyển trên đường kính AB (M khác A và B).

Lời giải.



- Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông ta có:

Suy ra C' nằm trên đường tròn $(O'; R')$ cố định khi M di chuyển trên đường kính AB .

Câu 6. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{c + ab}{a + b} + \frac{a + bc}{b + c} + \frac{b + ac}{a + c} \geq 2.$$

Lời giải.

Vì $a + b + c = 1$ nên

$$c + ab = c(a + b + c) + ab = (c + a)(c + b)$$

$$a + bc = a(a + b + c) + bc = (b + a)(b + c)$$

$$b + ac = b(a + b + c) + ac = (a + b)(a + c)$$

do đó BĐT cần chứng minh tương đương với: $\frac{(c + a)(c + b)}{a + b} + \frac{(b + a)(b + c)}{a + c} + \frac{(a + b)(a + c)}{b + c} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{(c + a)(c + b)}{a + b}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{(b + a)(b + c)}{a + c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{(a + b)(a + c)}{b + c}\right)^2} \geq 2.$$

Mặt khác dễ thấy: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, với mọi x, y, z (*)

Áp dụng (*) ta có: $VT \geq b + c + a + b + c + a = 2$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. □

————— **HẾT** —————

22 ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 NĂM HỌC 2016-2017, THANH HÓA

◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$, với $0 \leq x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.
- c) So sánh: P^2 và $2P$.

Lời giải.

- a) Điều kiện $0 \leq x \neq 1$. Ta biến đổi biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

- b) Điều kiện $0 \leq x \neq 1$. Ta có:

$$P = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$$

Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ nên $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$, thỏa mãn. Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x=4$.

- c) Vì $x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2 \Leftrightarrow 0 < P \leq 2 \Leftrightarrow P(P-2) \leq 0 \Leftrightarrow P^2 \leq 2P.$$

Dấu “=” xảy ra khi $P=2 \Leftrightarrow x=0$. Vậy $P^2 \leq 2P$.

□

Câu 2.

- a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$.

- b) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{aligned} 2y^2x + x + y + 1 &= x^2 + 2y^2 + xy \\ \Leftrightarrow 2y^2x + x + y + 1 - x^2 - 2y^2 - xy &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(2y^2 - y - x) &= -1 \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x-1 \in \{1; -1\}$

- Nếu $x-1=1 \Rightarrow x=2$. Khi đó $2y^2 - y - 2 = -1 \Leftrightarrow y=1 \vee y=-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
- Nếu $x-1=-1 \Rightarrow x=0$. Khi đó $2y^2 - y = 1 \Leftrightarrow y=1 \vee y=-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

b) Từ giả thiết

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$$

Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$. Từ đó

$$(a + b)^3 = (-c)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 : 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

□

Câu 3.

- a) Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$.
 b) Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$

Lời giải.

a) Dkxđ: $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20.$$

Vì $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq 0, \forall x$ nên $10x - 20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} &= 10x - 20 \\ \Leftrightarrow |2x + 5| + |x + 3| &= 10x - 20 \\ \Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 &= 10x - 20 \Leftrightarrow 7x = 28 \Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + y)^2 + 7(x + y) + 10 &= -y^2 \\ \Rightarrow (x + y + 2)(x + y + 5) &= -y^2 \leq 0 \\ \Rightarrow -4 \leq x + y + 1 &\leq -1 \end{aligned}$$

- $x + y + 1 = -4$ khi $x = -5; y = 0$.
- $x + y + 1 = -1$ khi $x = -2; y = 0$.

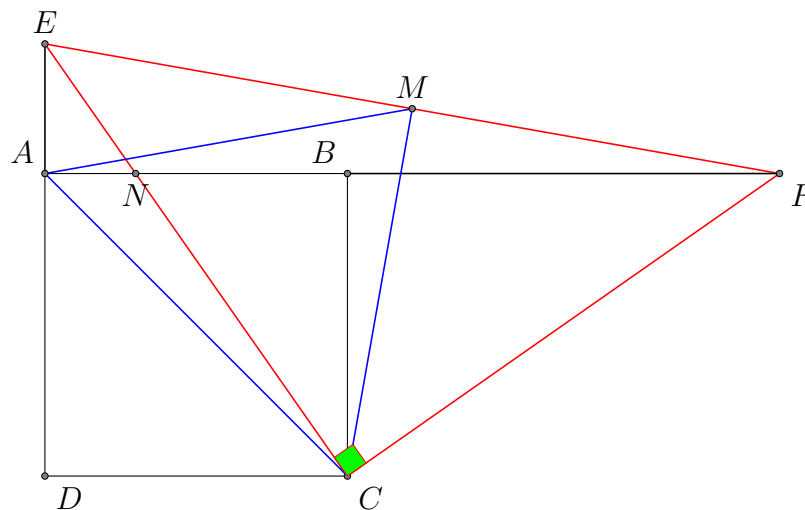
Vậy $A_{\min} = -4$ khi $x = -5; y = 0$. $A_{\max} = -1$ khi $x = -2; y = 0$.

□

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB . Gọi E là giao điểm của CN và DA . Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F . Lấy M là trung điểm của EF .

- a) Chứng minh CM vuông góc với EF .
 b) Chứng minh $NB \cdot DE = a^2$ và B, D, M thẳng hàng.
 c) Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác $AEFC$ gấp 3 lần diện tích của hình vuông $ABCD$.

Lời giải.



- a) Ta có: $\widehat{ECD} = \widehat{BCF}$ (cùng phụ với $\widehat{ECB}$)

Chứng minh được: $\triangle EDC = \triangle FBC$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)

$\Rightarrow CE = CF \Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C

Mà CM là đường trung tuyến nên $CM \perp FE$.

- b) Vì $\triangle EDC = \triangle FBC \Rightarrow ED = FB$.

Do $\triangle NCF$ vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $BC^2 = NB \cdot BF \Rightarrow a^2 = NB \cdot DE$, (đpcm).

$\triangle CEF$ vuông tại C có CM là đường trung tuyến nên $CM = \frac{FE}{2}$,

$\triangle AEF$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = \frac{FE}{2}$.

Suy ra $CM = AM = \frac{FE}{2}$. Vậy M thuộc đường trung trực của AC.

Vì ABCD là hình vuông nên B, D thuộc đường trung trực của AC.

Vậy B, D, M thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của AC, (đpcm).

- c) Đặt $DE = x$ với $x > 0$, suy ra $BF = x$.

Ta có $S_{ACFE} = S_{ACF} + S_{AEF} = \frac{1}{2}AF(AE + CB)$.

$$= \frac{1}{2}(AB + BF)(AE + AD) = \frac{1}{2}(a + x)DE = \frac{1}{2}(a + x)x.$$

$$\text{Mà } S_{ACFE} = 3S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(a + x) = 3a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a \\ x = -3a \end{cases}.$$

Do $x > 0$ và $a > 0$ suy ra nhận $x = 2a$. Vậy A là trung điểm của DE hay $AE = a$.

Vì $AE \parallel BC$ nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AE}{BC} = 1 \Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Vậy với N là trung điểm của AB thì $S_{ACFE} = 3S_{ABCD}$.

□

Câu 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

Lời giải.

Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$.

Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$; $\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$ suy ra

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2(1)$$

Ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$. Vì $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{a + (b+c)}{2} \geq \sqrt{a(b+c)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

Tương tự $\frac{2b}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{b}{a+c}}$; $\frac{2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{c}{b+a}}$.

Từ đó suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$.

Vậy $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$.

□

————— **HẾT** —————

23 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2016-2017, SỞ GD&ĐT THỪA THIÊN HUẾ

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

- a) Giả sử a là một nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^2 + x - 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{2a - 3}{\sqrt{2(2a^4 - 2a + 3)} + 2a^2}.$$

- b) Cho số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2(x + 2y) + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = 2016x^{2017} + 2017y^{2016}$.

Lời giải.

- a) Do a là một nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^2 + x - 1 = 0$ nên $\sqrt{2}a^2 + a - 1 = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{2}a^2 = 1 - a \quad (a \leq 1) \Rightarrow 2a^4 = (1 - a)^2 = a^2 - 2a + 1.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2a - 3}{\sqrt{2(2a^4 - 2a + 3)} + 2a^2} = \frac{2a - 3}{\sqrt{2(a^2 - 2a + 1 - 2a + 3)} + 2a^2} = \frac{2a - 3}{\sqrt{2(a^2 - 4a + 4)} + 2a^2} \\ &= \frac{2a - 3}{\sqrt{2}(2 - a) + \frac{2(1 - a)}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}(2a - 3)}{-4a + 6} = \frac{\sqrt{2}(2a - 3)}{-2(2a - 3)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- b) Ta có: $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2(x + 2y) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4y^2 + 4xy - 4(x + 2y) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow [(x + 2y)^2 - 4(x + 2y) + 4] + x^2 = 2 \Leftrightarrow (x + 2y - 2)^2 + x^2 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (x + 2y - 2)^2 \leq 2 \\ 0 \leq x^2 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow (x + 2y - 2)^2 = x^2 = 1$$

Do x, y là các số nguyên dương nên $x = y = 1$.

Vậy $S = 4033$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình sau: $x^3 + 5x^2 + 10x = (3x^2 + 3x + 6)\sqrt{x + 2}$.

- b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $x^2 - y^2 + x^2y - xy = x + 14$.

Lời giải.

- a) $x^3 + 5x^2 + 10x = (3x^2 + 3x + 6)\sqrt{x + 2}. (*)$

Đk: $x \geq -2$.

Với điều kiện trên ta có:

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow x(x^2 + x + 2) + 4x(x + 2) = 3(x^2 + x + 2)\sqrt{x + 2} \\
 &\Leftrightarrow [x(x^2 + x + 2) - (x^2 + x + 2)\sqrt{x + 2}] + [4x(x + 2) - 2(x^2 + x + 2)\sqrt{x + 2}] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x + 2)(x - \sqrt{x + 2}) - 2\sqrt{x + 2}(x^2 + x + 2 - 2x\sqrt{x + 2}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x + 2})(x^2 + x + 2) - 2(x - \sqrt{x + 2})^2 \cdot \sqrt{x + 2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x + 2})[x - 2x\sqrt{x + 2} + 3(x + 2)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x + 2})[(x - \sqrt{x + 2})^2 + 2(x + 2)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 2} = x \\ (x - \sqrt{x + 2})^2 + 2(x + 2) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 + x^2y - xy &= x + 14 \Leftrightarrow (x^2 + x^2y) - (x + xy) = y^2 + 14 \Leftrightarrow (x^2 - x)(y + 1) = y^2 + 14 \\
 \Rightarrow x^2 - x &= \frac{y^2 + 14}{y + 1} = y - 1 + \frac{15}{y + 1}.
 \end{aligned}$$

Do x nguyên dương, y nguyên dương nên $\frac{15}{y + 1}$ nguyên dương.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} y + 1 = 1 \rightarrow y = 0 \\ y + 1 = 3 \rightarrow y = 2 \\ y + 1 = 5 \rightarrow y = 4 \\ y + 1 = 15 \rightarrow y = 14 \end{cases}.$$

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là: $(3; 2); (3; 4)$.

□

Câu 3. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (4m + 3)x - 8m - 2 = 0$. (*)

- Giải phương trình (*) khi $m = 2$.
- Tìm m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.
- Khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 , tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2017$.

Lời giải.

a) Khi $m = 2$, thì phương trình viết lại: $x^3 - 3x^2 + 11x - 18 = 0$. (**)

$$\begin{aligned}
 (**) &\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2) - x(x - 2) + 9(x - 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - x + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 - x + 9 = 0(vn) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x = 2.
 \end{aligned}$$

Vậy khi $m = 2$ thì phương trình (*) có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) **Tìm m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.**

$$x^3 - 3x^2 + (4m + 3)x - 8m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 4mx - 8m + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)x^2 - x(x - 2) + 4m(x - 2) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[x^2 - x + 4m + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - x + 4m + 1 = 0(1) \end{cases}$$

Do đó, phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $x^2 - x + 4m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 3 + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16m - 3 > 0 \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{16} \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy với $m < -\frac{3}{16}$ và $m \neq -\frac{3}{4}$ thì phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

c) **Khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 , tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2017$.**

$$\text{Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{16} \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Khi đó phương trình luôn có một nghiệm bằng 2, giả sử đó là $x_1 = 2$.

Theo định lý Viet, ta có: $x_2 + x_3 = 1, x_2x_3 = 4m + 1$.

Do đó:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 4 + 1 - 2(4m + 1) = -8m + 3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2017 \Leftrightarrow -8m + 3 = 2017 \Leftrightarrow m = -\frac{1007}{4}$$

Vậy $m = -\frac{1007}{4}$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với $AB < AC$ và AA', BB', CC' là ba đường cao. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC . Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn O (M, N là các tiếp điểm). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , M' là giao điểm thứ hai của $A'N$ là đường tròn O , K là giao điểm của OH và $B'C'$. Chứng minh rằng:

a) BC là đường trung trực của đoạn thẳng MM' .

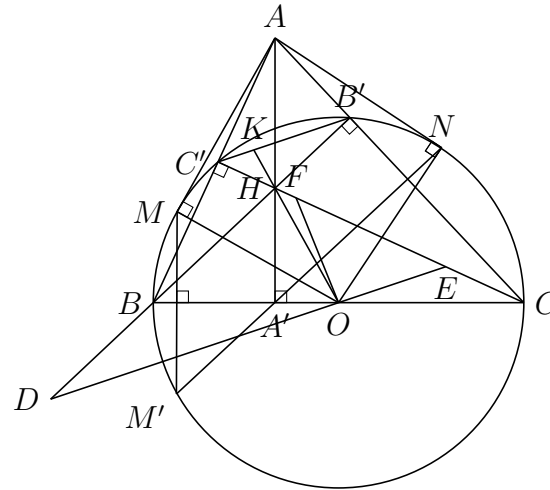
b) Ba điểm M, N, H thẳng hàng.

c) $\frac{KB'}{KC'} = \left(\frac{HB'}{HC'}\right)^2$.

Lời giải.

a)

Mà $\widehat{AMN} = \widehat{MM'N}$ (cùng
chấn $\widehat{MN}$). Suy
ra $\widehat{MM'N} = \widehat{AA'N}$.



Lúc đó $\widehat{OFC} = \widehat{B'C'H}$ (cùng bằng $\widehat{OEC'}$).

Mặt khác $\widehat{HB'C'} = \widehat{OCF}$ (cùng chắn cung $\widehat{BC'}$) nên $\triangle B'C'H \sim \triangle CFO$

$$\text{Suy ra } \frac{HB'}{HC'} = \frac{OC}{OF} \Rightarrow \frac{HB'}{HC'} = \frac{OC}{OE} \quad (5).$$

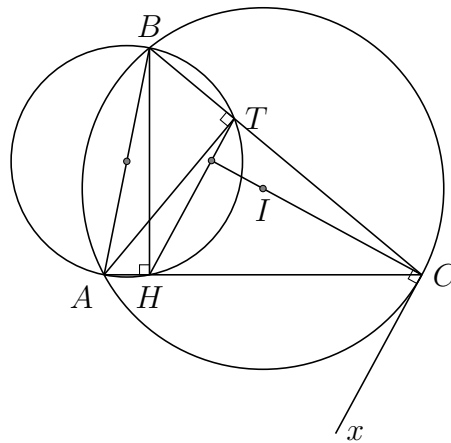
$$\text{Từ (3), (4), (5) ta được } \frac{KB'}{KC'} = \left(\frac{HB'}{HC'}\right)^2.$$

□

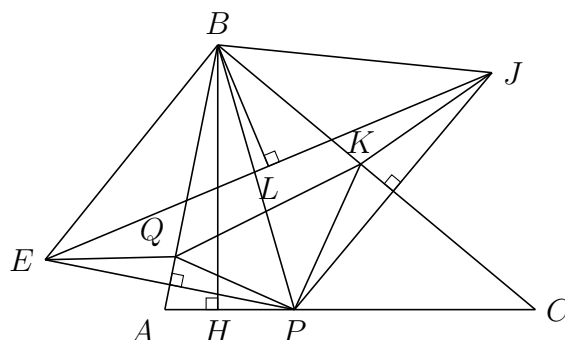
Câu 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; T, H lần lượt là chân đường cao kẻ từ A và B của tam giác ABC .

- Chứng minh bốn điểm A, B, T, H cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh: $CH.CA = CT.CB$
- Chứng minh $IC \perp HT$.
- Tìm trên các cạnh BC, AC, AB lần lượt các điểm K, P, Q có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải.



- Ta có: $\widehat{AHB} = \widehat{ATB} = 90^\circ \Rightarrow H, T$ cùng nhìn AB dưới một góc vuông nên H, T thuộc đường tròn đường kính AB .
 $\Rightarrow \triangle CTA \sim \triangle CHB$ (vì hai tam giác vuông có $\widehat{ACB}$ chung).
 Do đó: $\frac{CH}{CT} = \frac{CB}{CA} \Leftrightarrow CH.CA = CT.CB$
- Gọi Cx là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C .
 Ta có: $\widehat{HCx} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung $\widehat{AC}$)
 Ta lại có: $\widehat{ABC} = \widehat{THC}$ (vì tứ giác $AHTB$ nội tiếp)
 Suy ra: $\widehat{HCx} = \widehat{THC} \Rightarrow HT \parallel Cx$. Mà $IC \perp Cx$. Vậy $IC \perp HT$.
- Gọi E là điểm đối xứng của P qua AB , J là điểm đối xứng của P qua BC



Ta có: $BE = BJ = BP$; $\widehat{EBJ} = 2\widehat{ABC}$; $EQ = PQ, PK = JK$.

Vẽ $BL \perp EJ$ ($L \in EJ$). $\triangle BEJ$ cân tại B ($BE = BJ$); BL là đường cao $\Rightarrow BL$ là tia phân giác và là trung tuyến $\Rightarrow \widehat{EBL} = \widehat{ABC}, EJ = 2EL$.

Trong tam giác EBL vuông tại L , ta có: $EL = BE \cdot \sin \widehat{EBL} \Rightarrow EJ = 2BP \cdot \sin \widehat{ABC}$ (vì $EJ = 2EL, BP = BE$)

Gọi $C_{\triangle KPQ}$ là chu vi của tam giác KPQ , ta có:

$$C_{\triangle KPQ} = KQ + QP + KP = EQ + QK + KJ \geq EJ = 2BP \cdot \sin \widehat{ABC} \geq 2BH \cdot \sin \widehat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow C_{\triangle KPQ} \geq 2BH \cdot \sin \widehat{ABC} \text{ (không đổi)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv H$ và E, Q, K, J thẳng hàng.

Vậy P là chân đường cao H kẻ từ B và Q, K lần lượt là giao điểm của EJ và hai cạnh AB và AC của tam giác ABC .

□

Câu 6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng: $P = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3$.

Lời giải.

$$\text{Do } x, y, z \text{ là các số thực dương nên } \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3 \Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)^2 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 \geq 3 \text{ (vì } x^2 + y^2 + z^2 = 3)$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: } \Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 \geq 2\sqrt{\left(\frac{xy}{z} \right)^2 \cdot \left(\frac{yz}{x} \right)^2} = 2y^2 \text{ (1).}$$

Tương tự: $\left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \geq 2z^2$ (2); $\left(\frac{zx}{y}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2 \geq 2x^2$ (3).

Cộng (1), (2), (3) về theo vế, ta có:

$$2 \left[\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \right] \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) = 6(x^2 + y^2 + z^2 = 3)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 \geq 3 \Leftrightarrow P \geq 3$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

□

———— HẾT ————

24 ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 NĂM HỌC 2016-2017, THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

✧✧✧✧ NỘI DUNG ĐỀ ✧✧✧✧

Câu 1. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a - b = 7, b - c = 3$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$.

Lời giải.

Từ $a - b = 7, b - c = 3 \Rightarrow a - c = 10$. Ta có:

$$P = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ba - ca)}{2(a^2 - c^2 - 2ab + 2bc)} = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2[(a - b)^2 - (b - c)^2]} = \frac{7^2 + 3^2 + 10^2}{2(7^2 - 3^2)} = \frac{79}{40}. \quad \square$$

Câu 2. Giải phương trình: $(2x - 1)\sqrt{x + 3} = x^2 + 3$ (1).

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -3$.

$$(1) \Leftrightarrow 2x\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 3} = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3 - 2x\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x\sqrt{x + 3} + x + 3) - (x - \sqrt{x + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x + 3})(x - \sqrt{x + 3} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x + 3} = 0 \\ x - \sqrt{x + 3} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{x + 3} \\ x \geq 1 \\ x - 1 = \sqrt{x + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x + 3 \\ x \geq 1 \\ (x - 1)^2 = x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}$. $\square$

Câu 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(y - 1) + y(x + 1) = 6 \\ (x - 1)(y + 1) = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} xy - x + xy + y = 6 \\ xy + x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy = 8 \\ 3xy + 3x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(-3y) = -24 \\ 3x + (-3y) = -2 \end{cases}$$

Khi đó $(3x)$ và $(-3y)$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 + 2X - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ X = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{-4}{3} \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\left(\frac{4}{3}; 2\right), \left(-2; \frac{-4}{3}\right)$. □

Câu 4.

- a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = xy^2$.
- b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình: $(x+y)(x+2y) = x+5$.

Lời giải.

- a) Với $x, y > 0$ ta có $\frac{x}{1+x} + \frac{2y}{1+y} = 1 \Leftrightarrow x + xy + 2y + 2xy = 1 + xy + x + y \Leftrightarrow y + 2xy = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $1 = y + 2xy \geq 2\sqrt{y \cdot 2xy} = 2\sqrt{2xy^2}$.

$$\Rightarrow 1 \geq 8xy^2 \Rightarrow P = xy^2 \leq \frac{1}{8}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} y = 2xy \\ y + 2xy = 1 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

- b) Ta có $(x+y)(x+2y) = x+5 \Leftrightarrow x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow 4x^2 + 12xy + 8y^2 - 4x - 20 = 0 \Leftrightarrow [2x + (3y-1)]^2 - (y-3)^2 = 12$
 $\Leftrightarrow (2x+2y+2)(2x+4y-4) = 12 \Leftrightarrow (x+y+1)(x+2y-2) = 3$.

Với x, y nguyên nên ta có bảng sau:

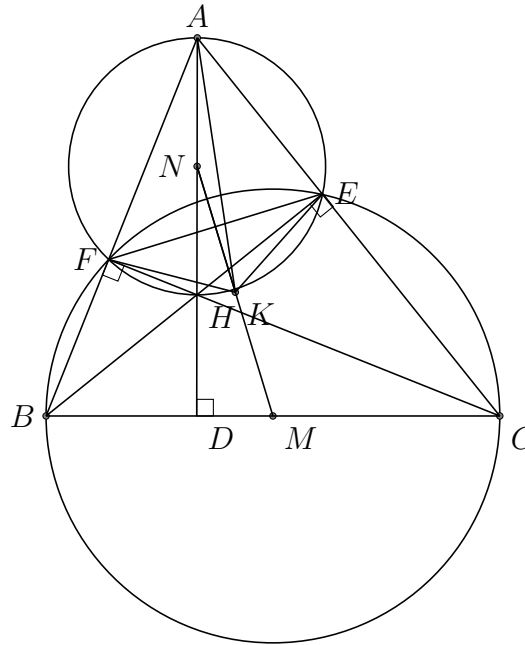
$x+2y-2$	1	3	-1	-3
$x+y+1$	3	1	-3	-1
$y-3$	-2	2	2	-2
y	1	5	5	1
x	1	-5	-9	-3

Vậy phương trình có nghiệm: $S = \{(1; 1), (-5; 5), (-9; 5), (-3; 1)\}$. □

Câu 5.

- a) Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH . Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K . Chứng minh rằng AK vuông góc với HK .
- b) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi AH, AD lần lượt là đường cao, đường phân giác trong của tam giác ABC ($H, D \in BC$). Tia AD cắt (O) ở E , tia EH cắt (O) ở F và tia FD cắt (O) ở K . Chứng minh rằng AK là đường kính của đường tròn tâm O .

Lời giải.

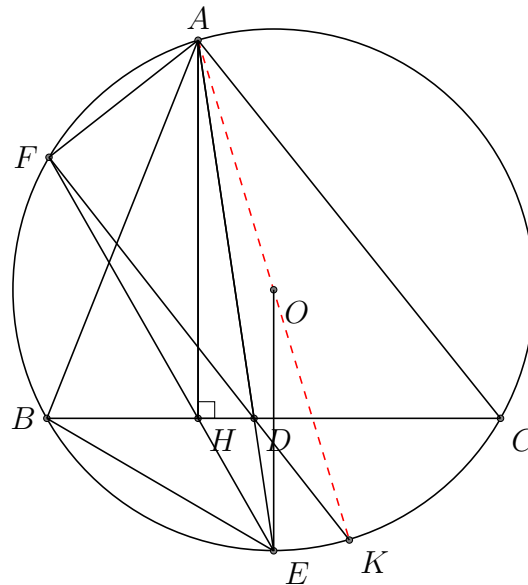


- a) Gọi ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF . Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC có tâm M , và tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH có tâm N .

Giả sử đường tròn (N) cắt NM tại K' , Suy ra $\widehat{AK'H} = 90^\circ \Rightarrow AK' \perp HK'$.

Ta có NM là đường trung trực của dây cung chung FE mà $K' \in NM \Rightarrow K'F = K'E$,
 $\Rightarrow \widehat{K'EF} = \widehat{K'FE}$, mà $\widehat{K'FE} = \widehat{K'AE}$ và $\widehat{K'EF} = \widehat{K'AF}$ (do tứ giác $AFK'E$ nội tiếp).

$\Rightarrow \widehat{K'AE} = \widehat{K'AF}$, hay AK' là phân giác trong của góc A , mà AK là phân giác trong của góc A (gt) và $K, K' \in NM \Rightarrow K \equiv K' \Rightarrow AK \perp HK$.



- b) Ta có $\widehat{BHF} = \widehat{HBE} + \widehat{HFB} = \widehat{CAE} + \widehat{FAB} = \widehat{BAD} + \widehat{FAB} = \widehat{FAD}$.

Suy ra tứ giác $AFHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{AHD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AFK} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{AFK}$ là góc nội tiếp của đường tròn tâm O , suy ra AK là đường kính của đường tròn

tâm O .

□

Câu 6. Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ anh ta chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

Lời giải.

Vào ngày thứ Hai anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá.

Nếu 0 ngày sau đó anh ta chơi bóng đá thì ngày chơi bóng đá là ngày thứ Hai.

Nếu 1 ngày sau đó anh ta chơi bóng đá thì ngày chơi bóng đá là ngày thứ Ba.

Đề bài cho hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá nên ngày chơi bóng đá là ngày thứ Tư.

Suy ra ba ngày chạy chỉ là ngày:

- Thứ Ba, thứ Năm, thứ Bảy. Khi đó ngày chơi cầu lông là ngày thứ Sáu hoặc Chủ Nhật (không xảy ra vì sau ngày chạy).
- Thứ Ba, thứ Năm, Chủ Nhật. Khi đó ngày chơi cầu lông là thứ Sáu (không xảy ra vì sau ngày chạy thứ Năm) hoặc thứ Bảy (không xảy ra vì khi đó sau ngày bơi thứ Sáu).
- Thứ Ba, thứ Sáu, Chủ Nhật. Khi đó ngày chơi cầu lông là thứ Năm và ngày bơi là thứ Bảy (thỏa mãn điều kiện đề bài). Vậy thứ Bảy là ngày trong tuần Nam đi bơi. □

———— HẾT ————

25 ĐỀ THI TOÁN 9 HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2017-2018, BÌNH ĐỊNH

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

1) Cho biểu thức $P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm $m \in \mathbb{N}$ để $P \in \mathbb{N}$.

2) Cho biểu thức $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng nếu $(a+b+c) : 4$ thì $P : 4$.

Lời giải.

1a) Điều kiện: $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2m + 4\sqrt{m} + 6}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} + \frac{(\sqrt{m} - 2)(\sqrt{m} + 3)}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} + \frac{3(\sqrt{m} - 1)}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} - \frac{2(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} \\ &= \frac{2m + 4\sqrt{m} + 6 + m + \sqrt{m} - 6 + 3\sqrt{m} - 3 - 2m - 4\sqrt{m} + 6}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} \\ &= \frac{m + 4\sqrt{m} + 3}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} = \frac{(\sqrt{m} + 1)(\sqrt{m} + 3)}{(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 3)} = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}. \end{aligned}$$

1b) Ta có $P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} = \frac{\sqrt{m} - 1 + 2}{\sqrt{m} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{m} - 1$ là ước dương của 2 $\Leftrightarrow \sqrt{m} - 1 \in \{1; 2\} \Leftrightarrow m \in \{4; 9\}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m = 4, m = 9$ là các giá trị cần tìm.

2) Đặt $a + b + c = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow a + b = 4k - c; b + c = 4k - a; a + c = 4k - b$.

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= (a+b)(b+c)(c+a) - abc = (4k - c)(4k - a)(4k - b) - abc \\ &= (16k^2 - 4ak - ack + ac)(4k - b) - abc \\ &= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc \\ &= 4(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack) - 2abc \quad (*) \end{aligned}$$

Giả sử a, b, c đều chia 2 dư 1 $\Rightarrow a + b + c$ chia 2 dư 1 (1).

Mà $a + b + c : 4 \Rightarrow a + b + c : 2$ (theo giả thiết) (2).

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai.

$\Rightarrow$ Trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chia hết cho 2 $\Rightarrow 2abc : 4$ (**).

Từ (*) và (**) $\Rightarrow P : 4$.

□

Câu 2.

1) Chứng minh rằng với mọi số thực x, y dương, ta luôn có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

2) Cho phương trình $2x^2 + 3mx - \sqrt{2} = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2$.

Lời giải.

1) Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (đúng). Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

2) Phương trình có a, c trái dấu nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lý Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2} \text{ và } x_1 x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Khi đó}$$

$$\begin{aligned} M &= (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2 = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{x_2 + x_1^2 x_2 - x_1 - x_1 x_2^2}{x_1 x_2} \right)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + \left[\frac{x_2 - x_1 + x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{x_1 x_2} \right]^2 = (x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 x_2 - 1)^2}{(x_1 x_2)^2} \\ &= (x_1 - x_2)^2 \cdot \left[1 + \frac{(x_1 x_2 - 1)^2}{(x_1 x_2)^2} \right] = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] \cdot \left[1 + \frac{(x_1 x_2 - 1)^2}{(x_1 x_2)^2} \right] \\ &= \left[\left(\frac{-3m}{2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \right] \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2}{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^2} \right] = \left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2} \right) m^2 + 8\sqrt{2} + 8 \geq 8\sqrt{2} + 8. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 0$.

Vậy GTNN của M là $8\sqrt{2} + 8$ khi $m = 0$. □

Câu 3. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$.

Lời giải.

Áp dụng BĐT Côsi cho các số dương x^2 và yz ta có

$$x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2 yz} = 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{yz}}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y\sqrt{xz}}$ và $\frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{xy}}$.

Suy ra

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \quad (1)$$

Ta có $\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy} \leq x + y + z$ (2). Thật vậy

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xy} \leq 2x + 2y + 2z \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x + y + z}{xyz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \right)$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. □

Câu 4.

1) Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và M là một điểm di động trên

cung nhỏ BC của đường tròn đó.

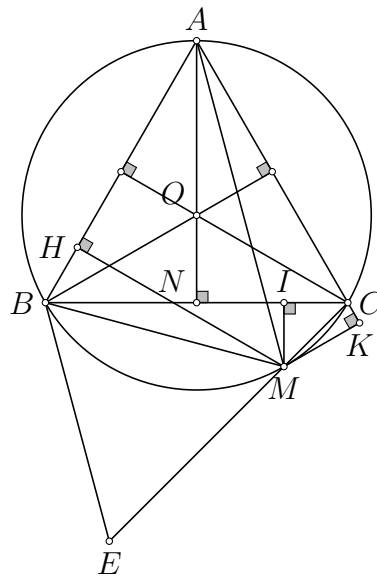
a) Chứng minh rằng $MB + MC = MA$.

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA . Gọi S, S' lần lượt là diện tích của $\triangle ABC$ và $\triangle MBC$. Chứng minh rằng khi M di động ta luôn có đẳng thức sau:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$$

2) Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn và AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD , lấy N trên tia DE sao cho $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng MA là tia phân giác của $\widehat{NMF}$.

Lời giải.



1a) Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$ (1).

Ta có $\widehat{BMC}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O) nên $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 240^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BME} = 180^\circ - \widehat{BMC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle BME$ đều $\Rightarrow BE = BM = EM$.

Xét $\triangle BMA$ và $\triangle BEC$, ta có:

$$BM = BE \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{BAM} = \widehat{BCE} \text{ (cùng chắn cung nhỏ } BM)$$

$$BA = BC \text{ (do } \triangle ABC \text{ đều)}$$

$$\text{Vậy } \triangle BMA = \triangle BEC \Rightarrow MA = EC \Rightarrow MB + MC = ME + MC = EC = MA.$$

1b) Gọi N là giao điểm của AO và BC .

Vì $\triangle ABC$ đều nên O là trọng tâm của $\triangle ABC \Rightarrow A, O, N$ thẳng hàng và $AN = \frac{3}{2}AO = \frac{3}{2}R$.

$$\text{Ta có } AB = \frac{AN}{\sin \widehat{ABN}} = \frac{3}{2}R : \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle MAB} &= \frac{1}{2}MH \cdot AB \Rightarrow MH = \frac{2S_{\triangle MAB}}{AB} = \frac{2S_{\triangle MAB}}{R\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot S_{\triangle MAB}}{3R} \\
 S_{\triangle MBC} &= \frac{1}{2}MI \cdot BC \Rightarrow MI = \frac{2S_{\triangle MBC}}{BC} = \frac{2S_{\triangle MBC}}{R\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot S_{\triangle MBC}}{3R} \\
 S_{\triangle MAC} &= \frac{1}{2}MK \cdot AC \Rightarrow MK = \frac{2S_{\triangle MAC}}{AC} = \frac{2S_{\triangle MAC}}{R\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot S_{\triangle MAC}}{3R} \\
 \Rightarrow MH + MI + MK &= \frac{2\sqrt{3}}{3R} \cdot (S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAC}) \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3R} \cdot (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MBC}) \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}.
 \end{aligned}$$

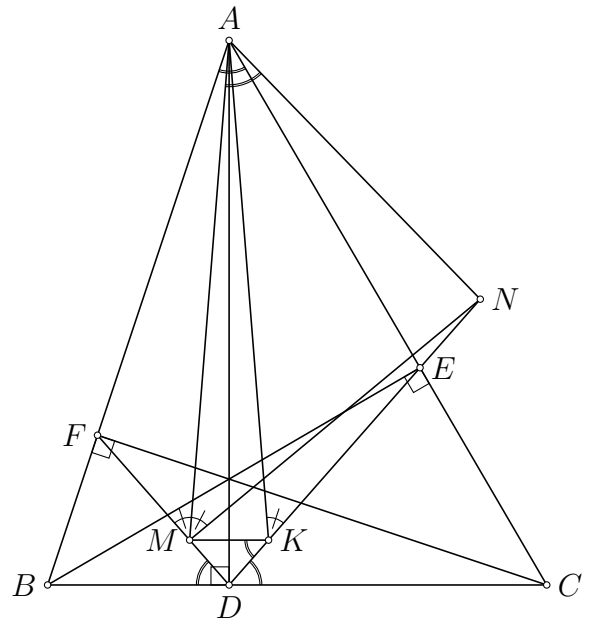
2)

Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K .

Tứ giác $AEDB$ có D, E cùng nhìn AB dưới một góc vuông nên $AEDB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{BAC}$.

Mà $\widehat{MKD} = \widehat{CDE}$ (vì $MK \parallel BC$) nên $\widehat{MKD} = \widehat{BAC} = \widehat{MAN} \Rightarrow$ tứ giác $AMKN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AKN}$.

Tứ giác $FDCA$ có F, D cùng nhìn AC dưới một góc vuông nên $FDCA$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{EDC} (= \widehat{BAC}) \Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{KDA}$.



$\triangle DMK$ có DA là phân giác vừa là đường cao nên cân tại $D \Rightarrow DM = DK$.

$\triangle AMD = \triangle AKD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AKD} \Rightarrow \widehat{FMA} = \widehat{AKN}$.

Mà $\widehat{AKN} = \widehat{AMN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ $\widehat{AN}$). Suy ra $\widehat{FMA} = \widehat{AMN}$ hay MA là tia phân giác của $\widehat{NMF}$.

□

———— HẾT ————

26 ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 NĂM HỌC 2017-2018, HẢI DƯƠNG

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

- a) Cho biểu thức $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ với $-1 \leq x \leq 1$.
 Tính giá trị của biểu thức P khi $x = -\frac{1}{2017}$.
- b) Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$.
 Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$.

Lời giải.

- a) $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$
 $= \sqrt{1-x} \left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \right)$ (vì $-1 \leq x \leq 1$).
 Suy ra: $P^2 = (1-x) \left(2 + 2\sqrt{1-(1-x^2)} \right) = 2(1-x)(1+|x|)$.
 Mà $P > 0$ nên $P = \sqrt{2(1-x)(1+|x|)}$.
 Thay $x = -\frac{1}{2017}$ ta được $P = \frac{2018}{2017}\sqrt{2}$.
- b) Đặt $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c} \Rightarrow xy + yz + zx = 1 \Rightarrow a + 1 = (x+y)(x+z)$.
 Tương tự ta có $b + 1 = (y+z)(y+x); c + 1 = (z+x)(z+y)$.
 Do đó $\frac{\sqrt{a}}{1+a} + \frac{\sqrt{b}}{1+b} + \frac{\sqrt{c}}{1+c} = \frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$. □

Câu 2.

- a) Giải phương trình: $2x^2 - 2x + 1 = (2x + 1)(\sqrt{x^2 - x + 2} - 1)$.
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases}$$

Lời giải.

- a) $2x^2 - 2x + 1 = (2x+1)(\sqrt{x^2-x+2}-1) \Leftrightarrow (x^2-x+2)+x^2-x-1 = (2x+1)(\sqrt{x^2-x+2}-1)$ (1).
 Đặt $t = (\sqrt{x^2-x+2}-1) \Rightarrow x^2-x+2 = (t+1)^2$. Thay vào phương trình (1) ta có:
 $(t-x)(t-x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = x-1 \end{cases}$.
 Với $t = x \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-x-2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.
 Với $t = x-1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-x-2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.
 Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{1}{3}; x = 2$.
- b)
$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 - x(y+1) = 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases}$$

Đặt $t = y + 1$ ta được:

$$\begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ 2x^3 = (x+t)(x^2 + t^2 - xt) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x = 1 \\ t = x = -1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(1; 0); (-1; -2)$.

□

Câu 3.

- Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $2x^3 + 2y^2 + 3x - 6y = 5xy - 7$.
- Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương.

Lời giải.

- Ta có $2x^3 + 2y^2 + 3x - 6y = 5xy - 7 \Leftrightarrow (x - 2y)(2x - y + 3) = -7$.
Xét tất cả trường hợp ta có cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ là: $(3; 2); (-5; -6); (-7; -4); (1; 4)$.
- $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương.

Suy ra $\sqrt{n^2 + 2n + 18}$ là số tự nhiên.

Đặt $\sqrt{n^2 + 2n + 18} = k \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 17$.

Vì k, n đều là số tự nhiên và $k + n + 1 > k - n - 1$ nên ta xét trường hợp sau:

$$\begin{cases} k + n + 1 = 17 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 9 \\ n = 7 \end{cases}.$$

Khi đó: $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9 = 81 = 9^2$ là số chính phương.

Vậy $n = 7$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Câu 4.

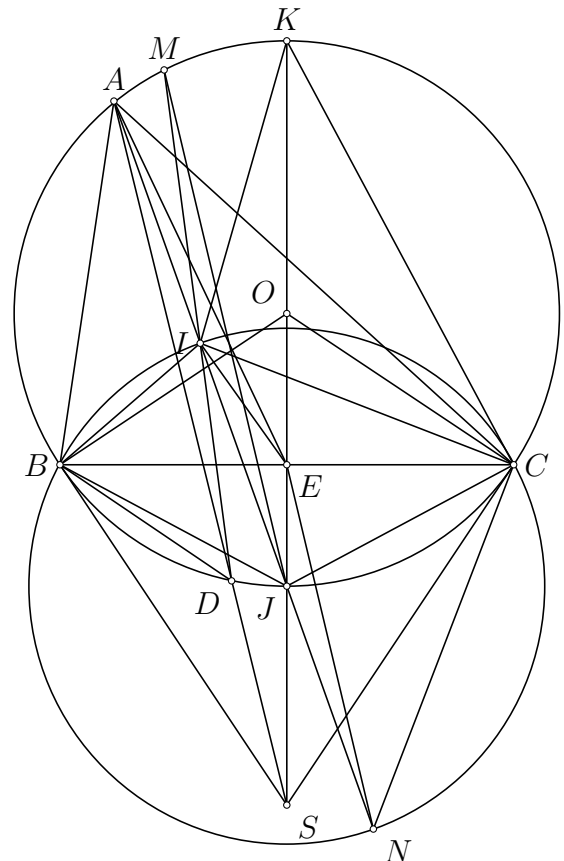
- Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tia AI cắt (O) tại J khác A . Đường thẳng JO cắt BC tại E , và cắt (O) tại K khác J .
 - Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và $JE \cdot JK = JI^2$.
 - Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại S . Chứng minh rằng $SJ \cdot EK = SK \cdot EJ$.
 - Đường thẳng SA cắt (O) tại D khác A , đường thẳng DI cắt (O) tại M khác D . Chứng minh rằng JM đi qua trung điểm của đoạn thẳng IE .
- Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; AF cắt DE tại P ; BF cắt CE tại Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{FA}{FP} + \frac{FB}{FQ} + \frac{ED}{EP} + \frac{EC}{EQ}.$$

Lời giải.

- 1)

- Từ đó, áp dụng thêm hệ thức lượng trong tam giác vuông JCK , ta dễ dàng thu được $JI^2 = JC^2 = JE \cdot JK$.



- 2) Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Đường thẳng qua A và song song với CD cắt đường thẳng qua D và song song với AB tại S . Khi đó SO song song (hoặc trùng) với MN .

Chứng minh. Gọi B' đối xứng với B qua M . Khi đó MN song song với $B'C$. Ta chứng minh SO cũng song song với $B'C$.

Thật vậy, gọi C' là giao của AC và SD . Để ý rằng tứ giác $ABDB'$ là hình bình hành, nên

$$\frac{C'B'}{C'S} = \frac{C'B'}{C'A} \cdot \frac{C'A}{C'S} = \frac{C'D}{C'O} \cdot \frac{C'C}{C'D} = \frac{C'C}{C'O}.$$

Ta có điều cần chứng minh.

Trở lại bài toán.

Áp dụng bổ đề trên với các tứ giác $ABCD$ và $AEFD$, ta suy ra S, O, P thẳng hàng, suy ra OP song song với MN . Tương tự, ta cũng có OQ song song với MN . Do đó, O, P, Q thẳng hàng và $PQ \parallel MN$.

Gọi I là giao điểm của FE và MN , P', Q' là giao điểm của PQ với AD, BC . Qua F , kẻ đường thẳng song song với PQ , cắt đoạn AD tại G và cắt tia đối của tia CB tại H . Các điểm J, K được định nghĩa tương tự (xem hình vẽ).

Theo trên, IM là đường trung bình của hình thang $EFGK$ nên M là trung điểm của KG .

Suy ra $GA = KD$.

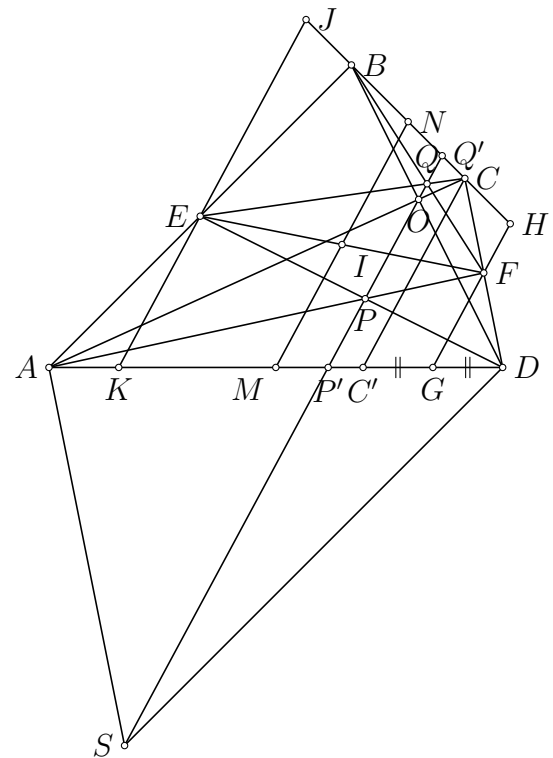
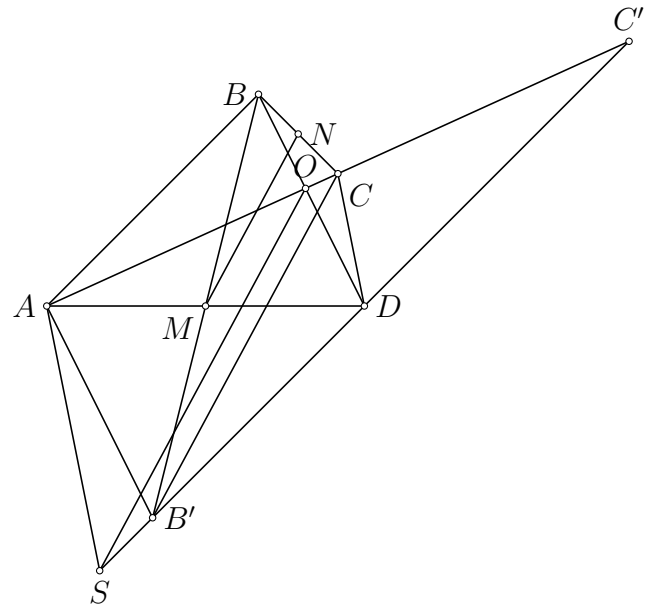
Áp dụng định lý Thales và BDT Cauchy-Schwartz, ta thu được

$$\frac{FA}{FP} + \frac{ED}{EP} = \frac{GA}{GP'} + \frac{KD}{KP'} = DK \left(\frac{1}{GP'} + \frac{1}{KP'} \right) \geq DK \cdot \frac{4}{GP' + KP'} = 4 \frac{DK}{GK}.$$

Tương tự, ta cũng thu được $\frac{FB}{FQ} + \frac{EC}{EQ} \geq 4 \frac{CJ}{HJ}$. Suy ra $T \geq 4 \left(\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} \right)$.

Cuối cùng, ta chứng minh $\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} = 2$, và do đó, GTNN của T bằng 8.

Thật vậy, gọi C' là điểm trên AD sao cho CC' song song với HG . Khi đó, do F là trung điểm CD nên G là trung điểm $C'D$. Do đó $\frac{DK}{GK} + \frac{CJ}{HJ} = \frac{DK}{GK} + \frac{C'K}{GK} = \frac{KD + KC'}{KG} = 2$.



□

Câu 5. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{6a^2 + 8ab + 11b^2}} + \frac{b^2 + 3bc + c^2}{\sqrt{6b^2 + 8bc + 11c^2}} + \frac{c^2 + 3ca + a^2}{\sqrt{6c^2 + 8ca + 11a^2}} \leq 3$

Lời giải.

Ta có: $6a^2 + 8ab + 11b^2 = (2a + 3b)^2 + 2(a - b)^2 \geq (2a + 3b)^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{6a^2 + 8ab + 11b^2}} \leq \frac{a^2 + 3ab + b^2}{2a + 3b}.$$

Tiếp tục ta chứng minh $\frac{a^2 + 3ab + b^2}{2a + 3b} \leq \frac{3a + 2b}{5} \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Tương tự ta có:

$$\frac{b^2 + 3bc + c^2}{\sqrt{6b^2 + 8bc + 11c^2}} \leq \frac{3b + 2c}{5}.$$

$$\frac{c^2 + 3ca + a^2}{\sqrt{6c^2 + 8ca + 11a^2}} \leq \frac{3c + 2a}{5}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được:

$$M = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{6a^2 + 8ab + 11b^2}} + \frac{b^2 + 3bc + c^2}{\sqrt{6b^2 + 8bc + 11c^2}} + \frac{c^2 + 3ca + a^2}{\sqrt{6c^2 + 8ca + 11a^2}} \leq a + b + c.$$

Mặt khác: $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3$.

Vậy $M \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

□

———— HẾT ————

27 ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 NĂM HỌC 2017-2018, HUYỆN TIỀN HẢI - TỈNH THÁI BÌNH

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$
 b) $B = \sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}} + \sqrt{\frac{(c+ab)(b+ca)}{a+bc}} + \sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}$, (với a, b, c là các số thực dương và $a + b + c = 1$).

Lời giải.

- a) Ta có $A = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} > 0$ nên

$$\begin{aligned} A^2 &= 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} \\ &= 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\ &= 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $A = \sqrt{5} + 1$ (do $A > 0$).

- b) Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên biểu thức B có nghĩa và $0 < a, b, c < 1$. Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{(1-b-c+bc)(1-a-c+ca)}{1-a-b+ab}} + \sqrt{\frac{(1-a-b+ab)(1-a-c+ca)}{1-b-c+bc}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(1-a-b+ab)(1-b-c+bc)}{1-a-c+ca}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-b)(1-c)(1-a)(1-c)}{(1-a)(1-b)}} + \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1-a)(1-c)}{(1-b)(1-c)}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)(1-b)(1-c)}{(1-a)(1-c)}} \\ &= \sqrt{(1-c)^2} + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt{(1-b)^2} \\ &= |1-c| + |1-a| + |1-b| \\ &= (1-c) + (1-a) + (1-b) \quad (\text{do } 0 < a, b, c < 1). \\ &= 2 \quad (\text{do } a + b + c = 1). \end{aligned}$$

□

Câu 2.

- a) Tìm các số a, b sao cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx - 1$ chia hết cho đa thức $x^3 - 3x + 2$.
 b) Chứng minh rằng $B = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

Lời giải.

- a) Ta có $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Theo bài ra ta có $f(x) : (x-1)(x-2)$.

$$\Rightarrow f(x) : (x-1) \text{ và } f(x) : (x-2).$$

$$\text{Do } f(x) : (x-1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a \quad (1)$$

$$\text{Do } f(x) : (x-2) \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 2b = -15 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 8a + 2(-a) = -15 \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{2}$.

Thử lại: $\left(x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 1\right) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Vậy $a = -\frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{2}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2 \\ &= 4(x^2 + xy + xz)(x^2 + xy + xz + yz) + y^2z^2 \\ &= 4(x^2 + xy + xz)^2 + 4(x^2 + xy + xz)yz + y^2z^2 \\ &= (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2. \end{aligned}$$

Vì x, y, z là các số nguyên nên $2x^2 + 2xy + 2xz + yz$ là số nguyên. Do đó B là số chính phương.

□

Câu 3.

- a) Tìm m để phương trình $\frac{2m-1}{x-2} = m-3$ vô nghiệm.
 b) Giải phương trình $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$.
 c) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

Lời giải.

a) ĐKXD $x \neq 2$.

$$\frac{2m-1}{x-2} = m-3 \Rightarrow 2m-1 = (x-2)(m-3) \Rightarrow (m-3)x = 4m-7 \quad (3).$$

+) Xét $m = 3$, phương trình (3) trở thành $0x = 5$ (vô lý).

Do đó, với $m = 3$ phương trình đã cho vô nghiệm.

+) Xét $m \neq 3$, phương trình (3) có nghiệm $x = \frac{4m-7}{m-3}$.

Do đó, để phương trình đã cho vô nghiệm thì $\frac{4m-7}{m-3} = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy với $m = 3$, $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

b) ĐKXD: $x \geq -1$. Ta có

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14 &\Leftrightarrow x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \quad (\text{thoả mãn}). \end{aligned}$$

c) Áp dụng bất đẳng thức Cossi cho các số dương ta có

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq 1 \quad (4).$$

Do x, y, z là các số nguyên dương nên từ (4) suy ra $x = y = z = 1$.

Thử lại: Với $x = y = z = 1$ ta có $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

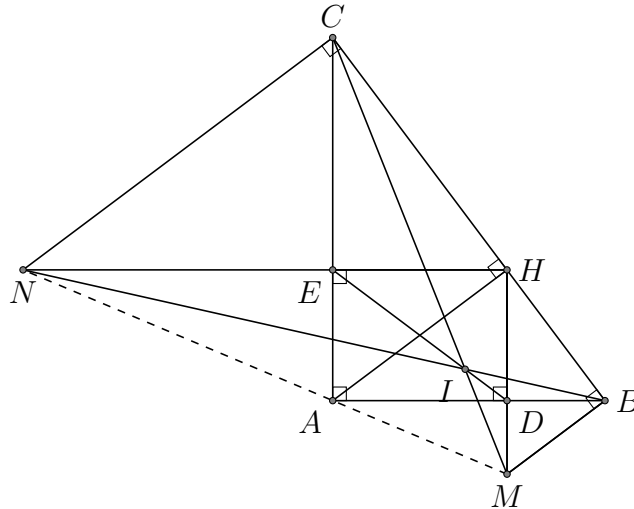
Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

- Biết $AB = 6\text{cm}$, $HC = 6,4\text{cm}$. Tính BC, AC .
- Chứng minh rằng $DE^3 = BC \cdot BD \cdot CE$
- Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC cắt HD tại M , đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC cắt HE tại N . Chứng minh rằng M, A, N thẳng hàng.
- Chứng minh rằng BN, CM, DE đồng qui.

Lời giải.



- Đặt $BH = x$ (đơn vị: cm) ($0 < x < 6$). Ta có $BC = x + 6,4$.
Ta có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 6^2 = x(x + 6,4) \Rightarrow x = 3,6$
 $\Rightarrow BC = 10\text{ cm} \Rightarrow AC = 8\text{ cm}$.
Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$
- $ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = AH$.
Tam giác AHB vuông tại H , đường cao $HD \Rightarrow BH^2 = BD \cdot BA$
Tam giác AHC vuông tại H , đường cao $HE \Rightarrow CH^2 = CE \cdot CA$
Ta có $AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH^4 = HB^2 \cdot HC^2$
 $\Rightarrow AH^4 = BD \cdot BA \cdot CE \cdot CA = BD \cdot CE \cdot BC \cdot AH$
 $\Rightarrow AH^3 = BD \cdot CE \cdot BC$. Vậy $DE^3 = BD \cdot CE \cdot BC$.
- Ta có $\widehat{CNH} = \widehat{BHM}$ (cùng phụ với $\widehat{CHN}$)
Do $ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HD = AE$.
Gọi M' là giao điểm của NA và HD . Ta có
 $\cos^2 \widehat{CNH} = \frac{NE}{NC} \cdot \frac{NC}{NH} = \frac{NE}{NH} = \frac{AE}{M'H}$
 $\cos^2 \widehat{BHM} = \frac{HD}{HB} \cdot \frac{HB}{HM} = \frac{HD}{HM} = \frac{AE}{HM}$
 $\Rightarrow \frac{AE}{M'H} = \frac{AE}{HM} \Rightarrow M'H = HM$
 $\Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow M, A, N$ thẳng hàng.
- Ta có $BM \parallel CN, BD \parallel NE, MD \parallel CE$
 $\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle NEC \Rightarrow \frac{BD}{NE} = \frac{DM}{EC}$ (5).

$$\text{Gọi } I \text{ là giao điểm của } MC \text{ và } DE \Rightarrow \frac{DI}{EI} = \frac{DM}{EC} \quad (6).$$

$$\text{Gọi } I' \text{ là giao điểm của } BN \text{ và } DE \Rightarrow \frac{DI'}{EI'} = \frac{BD}{NE} \quad (7)$$

$$\text{Từ (5), (6), (7)} \Rightarrow \frac{DI}{EI} = \frac{DI'}{EI'} \Rightarrow I \equiv I'.$$

Vậy BN, CM, DE đồng quy.

□

Câu 5. Cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với a, b, c, d là các số thực). Biết $f(1) = 10; f(2) = 20; f(3) = 30$. Tính giá trị biểu thức $A = f(8) + f(-4)$.

Lời giải.

Xét đa thức $g(x) = f(x) - 10x \Rightarrow$ bậc của đa thức $g(x)$ bằng 4.

Từ giả thiết $\Rightarrow g(1) = g(2) = g(3) = 0$.

Mà $g(x)$ có bậc bằng 4 nên $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$ (với a là số thực nào đó)

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-a) + 10x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(8) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (8-a) + 80 \\ f(-4) = (-5)(-6)(-7)(-4-a) - 40 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (4+a) - 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(8) + f(-4) = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (8-a+4+a) + 40 = 2560.$$

□

————— HẾT —————

28 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - QUẬN CẦU GIẤY - TP HÀ NỘI NĂM 2017-2018, VÒNG 1

NỘI DUNG ĐỀ

Câu 1.

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$ với $x \geq 0; x \neq \frac{4}{3}$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

2) Cho biểu thức

$$P = \frac{1}{3+2a+b+ab} + \frac{1}{3+2b+c+bc} + \frac{1}{3+2c+a+ca}.$$

với a, b, c là các số thực làm cho P xác định và thỏa mãn điều kiện

$$a+b+c+ab+bc+ca+abc=0.$$

Chứng minh rằng $P=1$.

Lời giải.

1)

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right) \\ &= \left[\frac{6x+4-(\sqrt{3x}-2)\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right] (3x-\sqrt{3x}+1-\sqrt{3x}) \\ &= \left[\frac{3x+2\sqrt{3x}+4}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right] (3x-2\sqrt{3x}+1) \\ &= \frac{(\sqrt{3x}-1)^2}{\sqrt{3x}-2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } A = \frac{3x-2\sqrt{3x}+1}{\sqrt{3x}-2} = \frac{3x-3}{\sqrt{3x}-2} - 2. \text{ Suy ra } A \in \mathbb{Z} \text{ khi và chỉ khi } B = \frac{3x-3}{\sqrt{3x}-2} \in \mathbb{Z}.$$

Nếu $3x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện).

Nếu $3x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{3x}-2 \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{3x}-2 \in \mathbb{I} \end{cases}$$

• Nếu $\sqrt{3x}-2 \in \mathbb{I}$ thì $A \in \mathbb{I}$ (Vô lý).

• Nếu $\sqrt{3x}-2 \in \mathbb{Z}$ thì $B = \sqrt{3x}+2 + \frac{1}{\sqrt{3x}-2}$

Do đó $B \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\sqrt{3x}-2 \in \{-1; 1\}$, từ đó tìm được $x=3$ thỏa mãn yêu cầu.

Vậy $x \in \{1; 3\}$.

2) Đẳng thức điều kiện tương đương với $(1+a)(1+b)(1+c)=1 \Rightarrow 1+a, 1+b, 1+c \neq 0$. Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1+(1+a)+(1+a)(1+b)} + \frac{1}{1+(1+b)+(1+b)(1+c)} + \frac{1}{1+(1+c)+(1+c)(1+a)} \\ &= \frac{1}{1+(1+a)+(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{(1+a)(1+(1+b)+(1+b)(1+c))} + \\ &\quad + \frac{(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+(1+c)+(1+c)(1+a))} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 + (1 + a) + (1 + a)(1 + b)}{1 + (1 + a) + (1 + a)(1 + b)} = 1.$$

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình: $x^2 + 6 = 4\sqrt{x^3 - 2x^2 + 3}$.
 b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2(x - y) = 5(y - 1)$.

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x \geq -1$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 3) + 3(x + 1) = 4\sqrt{(x + 1)(x^2 - 3x + 3)} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{3(x + 1)}{x^2 - 3x + 3} = 4\sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 3}} \quad (\text{vì } x^2 - 3x + 3 > 0, \forall x). \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 3}}$ ($t \geq 0$), ta được phương trình:

$$1 + 3t^2 = 4t \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ t = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{cases}$$

- Với $t = 1$, ta có: $\sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 3}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện).
- Với $t = \frac{1}{3}$, ta có: $\sqrt{\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 3}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \pm \sqrt{42}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{2 \pm \sqrt{2}; 6 \pm \sqrt{42}\}$.

- b) Ta có $x^2(x - y) = 5(y - 1) \Leftrightarrow x^2(x - y) = 5(y - x) + 5(x - 1)$
 $\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + 5) = 5(x - 1)$

$$\text{Suy ra: } 5(x - 1) : (x^2 + 5) \quad (1)$$

$$\text{Do đó: } [5(x^2 + 5) - 5x(x - 1)] : (x^2 + 5) \Rightarrow 25 + 5x : (x^2 + 5) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $(25 + 5x) - 5(x - 1) : (x^2 + 5) \Rightarrow 30 : (x^2 + 5)$.

Suy ra: $x^2 + 5 \in \{5; 6; 10; 15; 30\} \Leftrightarrow x^2 \in \{0; 1; 5; 10; 25\}$.

Từ đó tìm được $x \in \{0; 1; -1; 5; -5\}$.

Thử lại vào phương trình đã cho, ta được các nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x; y) \in \{(0; 1); (1; 1); (-5; -4)\}.$$

□

Câu 3.

- a) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3}$$

- b) Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn $\frac{x + y\sqrt{2017}}{y + z\sqrt{2017}}$ là số hữu tỷ, đồng thời $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Lời giải.

- a) Ta có $a^2 + 2b^2 + 3 = a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 2 \geq 2ab + 2b + 2 = 2(ab + b + 1)$
 Tương tự ta có $b^2 + 2c^2 + 3 \geq 2(bc + c + 1); c^2 + 2a^2 + 3 \geq 2(ca + a + 1)$.

Do đó $A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} \right)$.

Ta chứng minh được $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1$, suy ra $A \leq \frac{1}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

b) Ta có $\frac{x+y\sqrt{2017}}{y+z\sqrt{2017}} = \frac{m}{n} (m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1)$.

$$\Leftrightarrow nx - my = (mz - ny) \sqrt{2017} \Rightarrow \begin{cases} nx - my = 0 \\ mz - ny = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{m}{n} \Rightarrow xz = y^2.$$

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = (x+z)^2 - 2xz + y^2 = (x+z)^2 - y^2 = (x+y+z)(x+z-y)$

Vì $x+y+z > 1$ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố nên $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x+y+z \\ x-y+z = 1 \end{cases}$

Từ đó suy ra $x = y = z = 1$ (thỏa mãn).

□

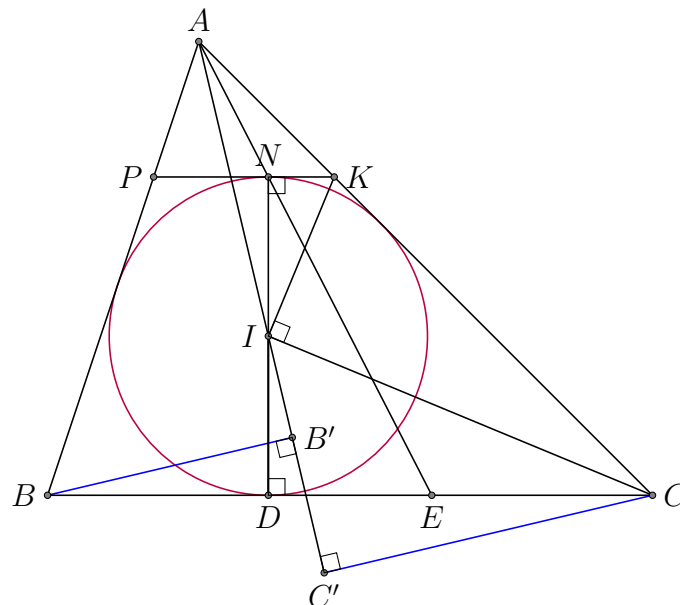
Câu 4. Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại D . Vẽ đường kính DN của đường tròn $(I; r)$. Tiếp tuyến của đường tròn (I) tại N cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại P và K .

a) Chứng minh rằng $NK \cdot CD = r^2$.

b) Gọi E là giao điểm của AN và BC . Chứng minh rằng $BD = CE$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{IA + IB + IC}{r}$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{ICK} + \widehat{IKC} = \frac{1}{2} (\widehat{DCK} + \widehat{NKC}) = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{KIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NIK} = \widehat{ICD}$ (cùng phụ $\widehat{DIC}$).

$\Rightarrow \triangle INK \sim \triangle CDI \Rightarrow \frac{IN}{CD} = \frac{NK}{ID}$.

Do đó, ta có $NK \cdot CD = IN \cdot ID = r^2$.

b) Chứng minh tương tự câu a ta có $NP.DB = r^2$.

$$\text{Suy ra } NK.CD = NP.DB \Rightarrow \frac{NP}{NK} = \frac{DC}{DB} \Leftrightarrow \frac{NP}{DC} = \frac{NK}{DB} = \frac{NP + NK}{DC + DB} = \frac{PK}{BC}$$

$$\text{Vì } PK \parallel BC \text{ nên theo định lí Talet ta có } \frac{NK}{EC} = \frac{AK}{AC} = \frac{PK}{BC}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{NK}{EC} = \frac{NK}{DB} \Rightarrow EC = DB.$$

c) Đặt $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$. Gọi B' , C' lần lượt là hình chiếu của B , C trên AI .

$$\text{Ta có } cr = IA.BB'; br = IA.CC' \text{ nên } (b + c)r = IA(BB' + CC') \leq IA.a \Rightarrow \frac{IA}{r} \geq \frac{b + c}{a}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{IB}{r} \geq \frac{a + c}{b}; \frac{IC}{r} \geq \frac{a + b}{c}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{IA + IB + IC}{r} \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 6.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy $\frac{IA + IB + IC}{r}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi $\triangle ABC$ đều.

□

Câu 5. Cho một đa giác đều có 2017 đỉnh. Người ta ghi lên mỗi đỉnh của đa giác số 1 hoặc số 2. Biết rằng có 1007 số 1 và 1010 số 2 và các số trên 3 đỉnh liên tiếp bất kỳ không đồng thời bằng nhau. Hãy tính tổng của tất cả các tích ba số trên 3 đỉnh liên tiếp của đa giác trên.

Lời giải.

Có 2017 đỉnh nên có 2017 tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp. Vì 3 đỉnh liên tiếp bất kỳ các số không bằng nhau nên chỉ có 2 loại tích:

- Loại I: Ba số ở ba đỉnh liên tiếp chỉ có một số 2, tích ba số này bằng 2.
- Loại II : Ba số ở ba đỉnh liên tiếp có hai chữ số 2, tích ba số này bằng 4.

Gọi số loại I là x ($x \in \mathbb{N}$) thì số tích loại II là $2017 - x$. Mà số 2 ở 2017 tích này là $1010 \times 3 = 3030$.

Ta có phương trình $x.1 + (2017 - x).2 = 3030 \Leftrightarrow x = 1004$.

Vậy tổng tất cả các tích cần tìm là: $1004 \times 2 + 1013 \times 4 = 6060$.

□

————— **HẾT** —————

29 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI NĂM HỌC 2010 - 2011**◆◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆◆****Câu 1.**

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{4x^3 - 16x^2 + 21x - 9}}{\sqrt{x - 1}}$

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$

Ta có $4x^3 - 16x^2 + 21x - 9 = (2x - 3)^2(x - 1)$

suy ra $A = |2x - 3| \Leftrightarrow A = \begin{cases} 2x - 3 \text{ với } x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x \text{ với } 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$ □

Câu 2.

a) Giải phương trình $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$

b) Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $4x^2 - (8y + 11)x + (8y^2 + 14) = 0$.

Tìm y khi x lần lượt đạt được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$ (1)

Ta có $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^2 + x + 1)$

Điều kiện $x \geq -2$

Đặt $a = x + 2; b = x^2 + x + 1$.

Khi đó phương trình (1) trở thành $2(a + b) = 5\sqrt{ab} \Leftrightarrow a = 4b$ hoặc $b = 4a$

TH1: Nếu $a = 4b$ suy ra $4x^2 + 3x + 2 = 0$ (vô nghiệm)

TH2: Nếu $b = 4a$ suy ra $x^2 - 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$ (chọn) hoặc $x_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$ (loại)

b) Ta có

$$4x^2 - (8y + 11)x + (8y^2 + 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8y^2 - 8yx + 4x^2 - 11x + 14 = 0 \quad (2)$$

Để phương trình (2) có nghiệm x thì $\Delta'_y \geq 0$.

Xét

$$\Delta'_y = -16x^2 + 88x - 112 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 14 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$$

Khi x lớn nhất suy ra $x = 5$, thay vào phương trình (2) ta được $y = 1, 75$

Khi x nhỏ nhất suy ra $x = 2$, thay vào phương trình (2) ta được $y = 1$

Vậy $(x; y) = (2; 1); (5; 1, 75)$. □

Câu 3.

a) Tìm 7 số nguyên dương sao cho tích các bình phương của chúng bằng 2 lần tổng các bình phương của chúng.

- b) Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của:

$$B = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

Lời giải.

- a) Gọi 7 số nguyên dương cần tìm là $x_1; x_2; \dots; x_7$.

Khi đó theo đề bài $x_1^2 x_2^2 \dots x_7^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_7^2)$

Giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_7 \geq 1$.

Khi đó $x_1^2 x_2^2 \dots x_7^2 \leq 2.7.x_1^2 = 14x_1^2$ suy ra $x_2^2 \dots x_7^2 \leq 14$

Mà $x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2$ là số chính phương nên $x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2$ bằng 1; 4; 9

Nếu $x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2 = 1$ suy ra $x_2 = \dots = x_7 = 1$ khi đó $x_1^2 + 12 = 0$ vô lý

Nếu $x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2 = 4$ suy ra $x_2 = 2; x_3 = \dots = x_7 = 1$. Khi đó $x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = \dots = x_7 = 1$

Nếu $x_2^2 x_3^2 \dots x_7^2 = 9$ suy ra $x_2 = 3; x_3 = \dots = x_7 = 1$. Khi đó $x_1 = 2$ vô lý vì $x_1 > x_2$

Vậy 7 số cần tìm là $(3; 2; 1; 1; 1; 1; 1)$ và các hoán vị.

- b) Ta có $B = 16x^2y^2 + 12x^3 + 12y^3 + 34xy$

$$= 16x^2y^2 + 12(x+y)^3 - 2xy = 16x^2y^2 + 12 - 2xy$$

$$= 16 \left(xy - \frac{1}{16} \right)^2 + \frac{191}{16}$$

Vậy B đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{191}{16}$ khi $xy = \frac{1}{16}$.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ta được $x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}, y = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ và hoán vị.

Mặt khác: $0 \leq 4xy \leq (x+y)^2 = 1$ suy ra $0 \leq \left| xy - \frac{1}{16} \right| \leq \frac{3}{16}$.

$$\text{Ta suy ra } B = 16 \left(xy - \frac{1}{16} \right)^2 + \frac{191}{16} \leq \frac{25}{52}.$$

Vậy B lớn nhất bằng $\frac{25}{52}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

□

Câu 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC .

- a) Vẽ về phía ngoài tam giác ABC nửa đường tròn (I) đường kính AB và nửa đường tròn (K) đường kính AC . Đường thẳng qua A cắt hai nửa đường tròn $(I), (K)$ lần lượt tại các điểm M, N (M khác A, B và N khác A, C).

Tính các góc của tam giác ABC khi diện tích tam giác CAN bằng 3 lần diện tích tam giác AMB .

- b) Cho $AB < AC$ và điểm D thuộc cạnh AC sao cho $AD = AB$. Gọi điểm E là hình chiếu của điểm D trên đường thẳng BC và điểm F là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng DE .

So sánh $\frac{AF}{AB}$ và $\frac{AF}{AC}$ với $\cos \widehat{AEB}$

Lời giải.

- a) Tính $\widehat{ABC}; \widehat{ACB}$

$$\text{Vậy } \frac{AF}{AC} < \cos \widehat{AEB} < \frac{AF}{AB}.$$

□

Câu 5. Hai người chơi trò chơi như sau: Trong hộp có 311 viên bi, lần lượt từng người lấy k viên bi, với $k \in \{1; 2; 3\}$. Người thắng là người lấy được viên bi cuối cùng trong hộp bi đó.

- a) Hỏi người thứ nhất hay người thứ hai thắng và chiến thuật chơi thế nào để thắng?
 b) Cũng hỏi như câu trên, khi đề bài thay 311 viên bi bằng n viên bi, với n là số nguyên dương?

Lời giải.

- a) Người thứ nhất thắng, chiến thuật chơi như sau

Người thứ nhất lấy 3 viên bi còn 308 viên bi là bội số của 4.

Người thứ hai lấy 1, 2 hoặc 3 viên bi

Người thứ nhất lấy 3, 2 hoặc 1 viên bi

còn lại là bội của 4.

Cứ tiếp tục như vậy thì người lấy cuối cùng phải là người thứ nhất.

- b) Với n viên bi

Nếu n không phải là bội số của 4, với cách làm như trên thì người thứ nhất thắng

Nếu n là bội của 4 thì người thứ hai thắng

□

———— **HẾT** ————

30 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI NĂM HỌC 2011-2012

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

- a) Chứng minh rằng $(a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}) - (a^{2008} + b^{2008} + c^{2008}) : 30$ với mọi a, b, c nguyên dương.
- b) Cho $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2012}$. Tính $f(x)$ khi $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\frac{49}{8}}}$

Lời giải.

- a) Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned} a^{2012} - a^{2008} &= a^{2008}(a^4 - 1) \\ &= a^{2008}(a^2 + 1)(a^2 - 1) \\ &= a^{2008}(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1) \\ &= a^{2008}(a^2 - 4 + 5)(a - 1)(a + 1) \\ &= a^{2007}a(a^2 - 4)(a - 1)(a + 1) + 5a^{2007}a(a - 1)(a + 1) \\ &= a^{2007}(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5a^{2007}a(a - 1)(a + 1) \end{aligned}$$

Nhận xét

- $a^{2007}(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp suy ra chia hết cho 6 và 5. Mà $(5; 6) = 1$. Suy ra $a^{2007}(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) : 30$, (1).
- $5a^{2007}(a - 1)a(a + 1) : 5$. Lại có $(a - 1)a(a + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và chia hết cho 3, suy ra chia hết cho $5a^{2007}(a - 1)a(a + 1) : 6$. Suy ra $5a^{2007}(a - 1)a(a + 1) : 30$, (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a^{2007}(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5a^{2007}(a - 1)a(a + 1) : 30 \Rightarrow a^{2012} - a^{2008} : 30$.
Tương tự với b và c , suy ra $A : 30$, (đpcm).

- b) Ta có $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{\frac{49}{8}}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{\frac{49}{8}}} = a + b$. Suy ra $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 14 + \frac{21}{2}x$.
Tương đương với $2x^3 - 21x - 29 = -1$. Vậy $f(x) = (-1)^{2012} = 1$.

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 5} + 3x = \sqrt{x^2 + 12} + 5$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + x - y - 2y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 + x + y = 6. \end{cases}$

Lời giải.

- a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 5} - 3 + 3x - 6 - (\sqrt{x^2 + 12} - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3(x - 2) - \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} + 3 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} + 3 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (x+2) \frac{-\sqrt{x^2+5} + \sqrt{x^2+12} + 1}{(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x^2+12}+4)} = -3 \Leftrightarrow x = 2. \end{cases}$$

Do đặc điểm của phương trình $\sqrt{x^2+5}+3x = \sqrt{x^2+12}+5$. Suy ra $3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$, nên về trái phương trình thứ hai là số dương, suy ra phương trình hai vô nghiệm.

b) Từ phương trình $x^2 + xy + x - y - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y - 1. \end{cases}$

Thay $x = y$ vào phương trình $x^2 - y^2 + x + y = 6$ ta được $x = y = 3$.

Thay $x = -2y - 1$ vào phương trình $x^2 - y^2 + x + y = 6$ ta được

$$3y^2 + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy hệ có các nghiệm là $(3; 3), (-3; 1), (3; -2)$.

□

Câu 3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $2x^2 - 5xy + 3y^2 - x + 3y - 4 = 0$.

Lời giải.

Từ phương trình $2x^2 - 5xy + 3y^2 - x + 3y - 4 = 0$ ta viết thành

$$(2x - 3y + 3)(x - y - 2) = -2 = -1 \cdot 2 = 2 \cdot (-1) = 1 \cdot (-2) = -2 \cdot 1.$$

Ta có 4 trường hợp xảy ra

$2x - 3y + 3$	2	-1	1	-2
$x - y - 2$	-1	2	-2	1

Vậy ta có bốn cặp nghiệm thỏa mãn là $(4; 3), (16; 12), (2; 2), (14; 11)$.

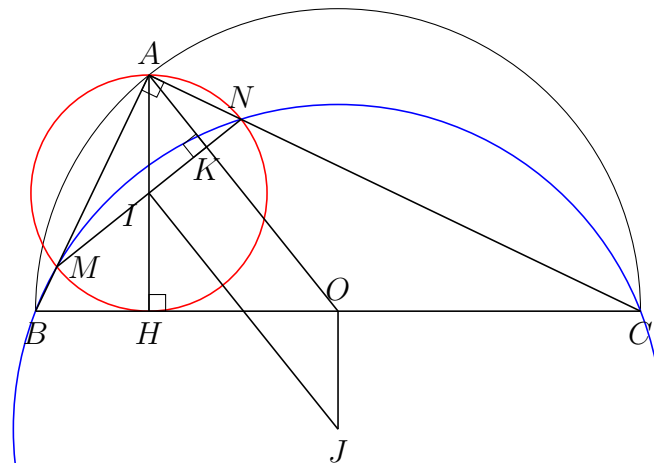
□

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC và A bất kì nằm trên đường tròn. Từ A hạ AH vuông góc BC và vẽ đường tròn đường kính HA cắt $AB; AC$ ở M và N .

a) Chứng minh OA vuông góc MN .

b) Cho $AH = \sqrt{2}; BC = \sqrt{7}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN .

Lời giải.



- a) Gọi $AO \cap MN = K$, ta có $\widehat{OAC} = \widehat{ACB}$ vì $OA = OC$. Do góc $\widehat{ANM} = \widehat{AHM}$ do cùng chắn cung $\widehat{AM}$, mặt khác $\widehat{AHM} = \widehat{ABH}$ do cùng phụ với góc $\widehat{BAH}$.
Suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{MC}$ nên $\widehat{OAC} + \widehat{ANM} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AKN} = 90^\circ$, tức là $AO \perp MN$.
- b) Xét tứ giác $BMNC$ có $\widehat{MBC} = \widehat{ANM} \Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{MNC} = \widehat{ANM} + \widehat{MNC} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $BMNC$ là tứ giác nội tiếp. Gọi $I = AH \cap MN$, gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNC . Do tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật suy ra I là trung điểm của MN , suy ra $IJ \perp MM$. Vậy $JI \parallel AO$, (cùng vuông góc với MN); $JO \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC) nên tứ giác $AIGO$ là hình bình hành, suy ra $JO = AI = \frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$;
 $OB = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}(\text{cm})$. Do đó $BJ = \sqrt{OB^2 + JO^2} = \frac{3}{2}(\text{cm})$.

□

Câu 5.

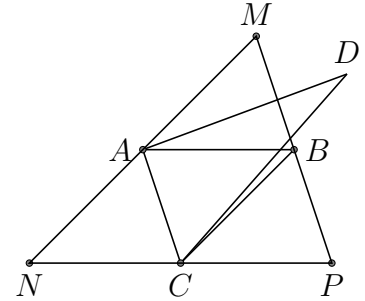
- a) Chứng minh rằng: Điều kiện cần và đủ để 1 tam giác có các đường cao $h_1; h_2; h_3$ và bán kính đường tròn nội tiếp r là tam giác đều là $\frac{1}{h_1 + 2h_2} + \frac{1}{h_2 + 2h_3} + \frac{1}{h_3 + 2h_1} = \frac{1}{3r}$.
- b) Cho 8045 điểm trên một mặt phẳng sao cho cứ 3 điểm bất kì thì tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng: Luôn có thể có ít nhất 2012 điểm nằm trong tam giác hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

Lời giải.

- a) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{1}{\frac{S}{a} + \frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{S}{b} + \frac{2S}{c}} + \frac{1}{\frac{S}{c} + \frac{2S}{a}} = \frac{1}{\frac{3S}{a+b+c}}$.
- Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\frac{S}{a} + \frac{2S}{b} = S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{9S}{a+2b}$.
- Tương tự ta cũng có $\frac{S}{b} + \frac{2S}{c} \geq \frac{9S}{b+2c}$ và $\frac{S}{c} + \frac{2S}{a} \geq \frac{9S}{c+2a}$.
- Do đó $\frac{1}{\frac{S}{a} + \frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{S}{b} + \frac{2S}{c}} + \frac{1}{\frac{S}{c} + \frac{2S}{a}} \leq \frac{1}{\frac{3S}{a+b+c}} = VP$.
- Suy ra dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay tam giác ABC là tam giác đều.

- b) Trong 8045 điểm luôn tìm được 3 điểm là đỉnh của tam giác có diện tích lớn nhất, giả sử đó là A, B, C với $S_{\triangle ABC} \leq 1$. Dựng các đường thẳng đi qua A song song với BC , qua B song song với AC , qua C song song với AB , chúng đôi một cắt nhau tại M, N, P . Khi đó $S_{\triangle MNP} = 4S_{\triangle ABC} \leq 4$.

Ta sẽ chứng minh rằng 8045 điểm đã cho nằm trong hoặc trên cạnh tam giác MNP . Thật vậy, giả sử tồn tại điểm $D \notin \triangle MNP$, (chẳng hạn D và B cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa AC) thì $S_{\triangle DAC} > S_{\triangle ABC}$ (mâu thuẫn với cách chọn tam giác ABC). Tam giác MNP được chia thành bốn tam giác nhỏ bằng nhau là ANC , AMB , ABC , BCP . Ta có $8045 = 4 \cdot 2011 + 1$. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất $2011 + 2 = 2012$ điểm phải nằm trong hoặc trên cạnh của một tam giác nhỏ có diện tích không lớn hơn 1.



□

———— HẾT ————

31 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI, NĂM HỌC 2012 - 2013

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1. [9D2B2][9D5G2]

- a) Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.
- b) Cho biểu thức $P = (a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}) + (b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011})$. Tính giá trị của P với $a = 4 + \sqrt{5}$ và $b = 4 - \sqrt{5}$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hà Nội, năm 2013)

Lời giải.

- a) Đặt $P(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$.

Ta có $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Do đó, $P(x)$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$ khi và chỉ khi $P(x)$ chia hết cho cả hai đa thức $x + 1$ và $x - 3$. Theo định lý Bézout về số dư của phép chia đa thức, ta phải có

$$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 9 \\ 18a - 15b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$ khi và chỉ khi $a = 2, b = 1$.

- b) Ta nhận thấy a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 11 = 0$. Do đó ta có $a^2 - 8a + 11 = 0$ và $b^2 - 8b + 11 = 0$. Suy ra

$$\begin{aligned} P &= (a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}) + (b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011}) \\ &= a^{2011}(a^2 - 8a + 11) + b^{2011}(b^2 - 8b + 11) = 0. \end{aligned}$$

□

Câu 2. [9D4G7][9D5G3]

- a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 - xy + 5x + 5y - 6 = 0 \\ 20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0. \end{cases}$$
- b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $6x^2 + 10y^2 + 2xy - x - 28y + 18 = 0$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hà Nội, năm 2013)

Lời giải.

- a) Ta có $6x^2 - y^2 - xy + 5x + 5y - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (x - 5)y - 6x^2 - 5x + 6 = 0$. (1)

Coi phương trình (1) như là phương trình bậc 2 ẩn y và tham số là x . Khi đó

$$\Delta = (x - 5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6x^2 - 5x + 6) = 25x^2 + 10x + 1 = (5x + 1)^2.$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{-x + 5 + 5x + 1}{2} = 2x + 3 \text{ hoặc } y = \frac{-x + 5 - 5x - 1}{2} = -3x + 2.$$

TH1: $y = 2x + 3$, thay vào phương trình $20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0$ ta được

$$20x^2 - (2x + 3)^2 - 28x + 9 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 - 40x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow y = 3 \\ x = \frac{5}{2} & \Rightarrow y = 8. \end{cases}$$

TH2: $y = -3x + 2$, thay vào phương trình $20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0$ ta được

$$20x^2 - (-3x + 2)^2 - 28x + 9 = 0 \Leftrightarrow 11x^2 - 16x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow y = -1 \\ x = \frac{5}{11} & \Rightarrow y = \frac{7}{11} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có 4 cặp nghiệm $(x; y)$ là $(0; 3)$, $(\frac{5}{11}; \frac{7}{11})$, $(1; -1)$, $(\frac{5}{11}; \frac{7}{11})$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} 6x^2 + 10y^2 + 2xy - x - 28y + 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow 12x^2 + 20y^2 + 4xy - 2x - 56y + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 4y)^2 + (4y - 7)^2 + (x - 1)^2 + 10x^2 - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 14 = -(x + 4y)^2 - (4y - 7)^2 - (x - 1)^2 &\leq 0 \\ \Rightarrow x^2 \leq \frac{7}{5} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\} & \text{ (vì } x \text{ là số nguyên).} \end{aligned}$$

• $x = -1$, suy ra $10y^2 - 30y + 25 = 0$ (vô nghiệm).

• $x = 0$, suy ra $10y^2 - 28y + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}$ (loại).

• $x = 1$, suy ra $10y^2 - 26y + 23 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có 1 cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 1)$.

□

Câu 3. [9D5G1] Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3$. Chứng minh:

$$\frac{27a^2}{c(c^2 + 9a^2)} + \frac{b^2}{a(4a^2 + b^2)} + \frac{8c^2}{b(9b^2 + 4c^2)} \geq \frac{3}{2}.$$

(Đề thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hà Nội, năm 2013)

Lời giải.

Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{2}{y}$; $c = \frac{3}{z}$. Ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3 \Leftrightarrow x + y + z = 3$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{z^3}{z^2 + x^2} + \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + x^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{z^3}{z^2 + x^2} + \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + x^2} \\ &= (x + y + z) - \left(\frac{x^2z}{x^2 + z^2} + \frac{z^2y}{z^2 + y^2} + \frac{y^2z}{y^2 + x^2} \right) \\ &\geq (x + y + z) - \left(\frac{x^2z}{2xz} + \frac{z^2y}{2zy} + \frac{y^2x}{2yx} \right) \\ &\geq (x + y + z) - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \right) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = 1, b = 2, c = 3$.

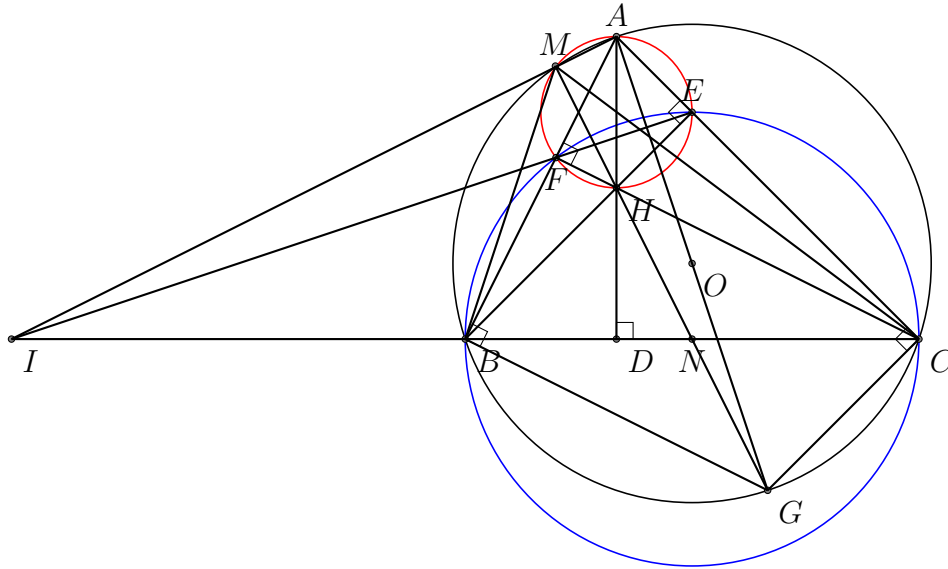
□

Câu 4. [9H3G7] Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC gặp nhau tại H . Gọi I là giao điểm hai đường thẳng EF và CB . Đường thẳng AI cắt (O) tại M (M khác A).

- Chứng minh năm điểm A, M, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi N là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.
- Chứng minh $BM \cdot AC + AM \cdot BC = AB \cdot MC$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hà Nội, năm 2013)

Lời giải.



- Xét đường tròn tâm (O) có hai cát tuyến IMA và IBC . Suy ra $IM \cdot IA = IB \cdot IC$. (1)
 Dễ thấy tứ giác $BFEC$ nội tiếp và EF cắt BC tại I nên suy ra $IF \cdot IE = IB \cdot IC$. (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $IM \cdot IA = IF \cdot IE$, suy ra tứ giác $AMFE$ nội tiếp.
 Ta lại có tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH . Suy ra năm điểm A, M, F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AH .
- Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) . Ta chứng minh G, H, N thẳng hàng.
 Ta có $GC \parallel BE$ (cùng vuông góc với AC) và $GB \parallel CF$ (cùng vuông góc với AB) nên tứ giác $HCGB$ là hình bình hành. Suy ra GN đi qua trung điểm N của BC hay G, H, N thẳng hàng.
 $\widehat{GMA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow GM \perp AM$.
 Do M thuộc đường tròn đường kính AH (cmt) nên ta có $\widehat{AMH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow HM \perp AM$.
 Suy ra G, H, M thẳng hàng. Từ đó suy ra 4 điểm G, H, M, N thẳng hàng. Vậy ta chứng minh được H, M, N thẳng hàng.
- Ta chứng minh định lý Ptoleme: “Nếu một tứ giác nội tiếp đường tròn thì tích hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.”
 Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp, ta chứng minh $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Trên AC lấy điểm K sao cho $\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$. Xét tam giác ABK và tam giác DBC ta có:

$$\widehat{ABK} = \widehat{CBD} \text{ (cách lấy)}$$

$$\widehat{BAK} = \widehat{BDC} \text{ (hai góc nội tiếp chắn cung } BC)$$

$$\Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle DBC \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = BD \cdot AK.$$

Xét tam giác CBK và tam giác DBA , ta có:

$$\widehat{CBK} = \widehat{CBA} - \widehat{ABK} = \widehat{CBA} - \widehat{CBD} = \widehat{ABD}$$

$$\widehat{BCK} = \widehat{BDA} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AB)$$

$$\Rightarrow \triangle CBK \sim \triangle DBA \text{ (g-g)}$$

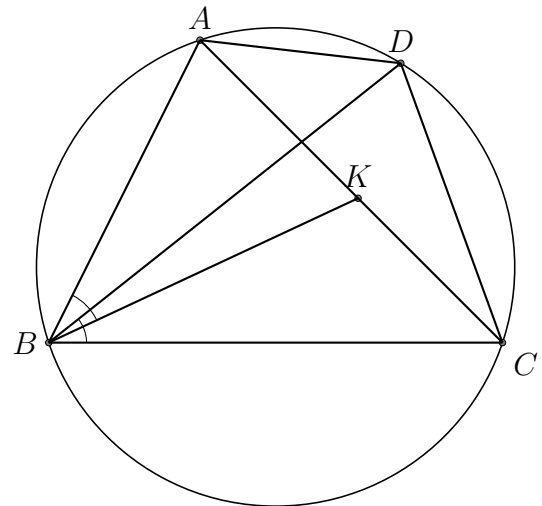
$$\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{CK}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = BD \cdot CK.$$

Từ đó ta có

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot CK = BD(AK + CK) = BD \cdot AC.$$

Áp dụng định lý Ptoleme vào tứ giác nội tiếp $BMAC$ ta có $BM \cdot AC + AM \cdot BC = AB \cdot MC$.

□



Câu 5. [9D5G4] Cho 2013 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2013}$ và đường tròn $(O; 1)$ tùy ý cùng nằm trong mặt phẳng. Chứng minh trên đường tròn $(O; 1)$ đó, ta luôn có thể tìm được một điểm M sao cho $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2013} \geq 2013$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hà Nội, năm 2013)

Lời giải.

Vẽ đường kính BC bất kì của đường tròn $(O; 1)$. Ta có

$$\begin{aligned} & (BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{2013}) + (CA_1 + CA_2 + \dots + CA_{2013}) \\ &= (BA_1 + CA_1) + (BA_2 + CA_2) + \dots + (BA_{2013} + CA_{2013}) \\ &\geq 2013BC = 4026. \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } \begin{cases} BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{2013} < 2013 \\ CA_1 + CA_2 + \dots + CA_{2013} < 2013 \end{cases}$$

thì $(BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{2013}) + (CA_1 + CA_2 + \dots + CA_{2013}) < 4026$ (vô lí).

$$\text{Suy ra } \begin{cases} BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{2013} \geq 2013 \\ CA_1 + CA_2 + \dots + CA_{2013} \geq 2013. \end{cases}$$

- Nếu $BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{2013} \geq 2013$ thì B là điểm M cần tìm.
- Nếu $CA_1 + CA_2 + \dots + CA_{2013} \geq 2013$ thì C là điểm M cần tìm.

□

———— HẾT ————

32 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI NĂM HỌC 2013 - 2014**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 2014$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2014}$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}}$.
- b) Tìm số tự nhiên n để $T = 5^{2n^2-6n+2} - 12$ là số nguyên tố.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2014} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}$
 $\Leftrightarrow (a+b)(ac+bc+c^2) = -ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(ac+bc+c^2+ab) = 0$
 $\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{cases}$

Xét trường hợp $a = -b$, các trường hợp còn lại tương tự.

Ta có $a + b + c = 2014 \Leftrightarrow c = 2014 \Rightarrow M = \frac{1}{2014^{2013}}$

- b) Ta có $2n^2 - 6n + 2 = 2n(n-3) + 2$

Do $n(n-3):2$ nên $2n^2 - 6n + 2$ có dạng $4k + 2$, với $k \in \mathbb{N}$.

$$T = 5^{2n^2-6n+2} - 12 = 5^{4k+2} - 12 = 625^k \cdot 25 - 12 \equiv 1^k \cdot 25 - 12 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}.$$

$$\text{Vậy để } T \text{ là số nguyên tố thì } T = 13 \Leftrightarrow 5^{2n^2-6n+2} - 12 = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=3 \end{cases}.$$

□

Câu 2.

- a) Giải phương trình $x^2 - 2x - 2\sqrt{2x+1} - 2 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z - 5 + 2xy \\ x^4 + y^4 = 9z - 5 - 4z^2 - 2x^2y^2 \end{cases}$

Lời giải.

- a) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$.

$$\text{pt} \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{2x+1} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} + 1 = x \\ \sqrt{2x+1} + 1 = -x \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{2x+1} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=0 \Leftrightarrow x=4 \\ x=4 \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{2x+1} + 1 = -x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = -x-1, \text{ loại vì } -x-1 < 0, \forall x \geq -\frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

- b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z - 5 + 2xy(1) \\ x^4 + y^4 = 9z - 5 - 4z^2 - 2x^2y^2(2) \end{cases}$
 $(1) \Leftrightarrow (x-y)^2 = 4z - 5 \geq 0 \Rightarrow z \geq \frac{5}{4}.$

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = -4z^2 + 9z - 5 = (4z - 5)(1 - z) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq z \leq \frac{5}{4}.$$

Vậy $z = \frac{5}{4}$ và suy ra $x = y$. Từ đó, ta có nghiệm của hệ là $\left(a, a, \frac{5}{4}\right)$, với a là số thực bất kì. $\square$

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 4$ và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.

Lời giải.

a) **Cách 1:**

Giả sử $a \geq b \geq c$, suy ra $2 \leq a \leq 4 \Leftrightarrow (a - 4)(a - 2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 \leq 0 \Leftrightarrow a(6 - a) \geq 8$.

Ta có $P = (a + b + c)^2 - ab - bc - ca = 36 - ab - bc - ca = 36 - a(b + c) - bc \leq 36 - a(6 - a) \leq 36 - 8 = 28$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 28 khi a, b, c là hoán vị của $(2, 4, 0)$.

b) **Cách 2:**

Do $0 \leq a, b, c \leq 4$ nên $(a - 4)(b - 4)(c - 4) \leq 0 \Leftrightarrow abc - 4(ab + bc + ca) + 16(a + b + c) - 64 \leq 0$.

$\Leftrightarrow 4(ab + bc + ca) \geq abc + 16(a + b + c) - 64 \geq 0 + 16 \cdot 6 - 64 = 32 \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 8$.

Ta có $P = (a + b + c)^2 - (ab + bc + ca) \leq 36 - 8 = 28$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 28 khi a, b, c là hoán vị của $(2, 4, 0)$. $\square$

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm M (M khác A).

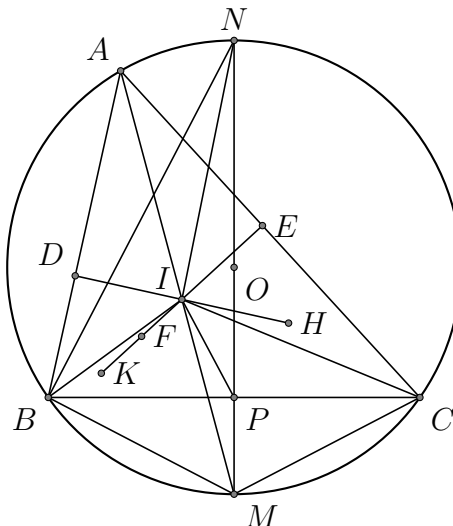
a) Chứng minh rằng các tam giác IMB và IMC là tam giác cân.

b) Đường thẳng MO cắt đường tròn tại điểm N (N khác M) và cắt cạnh BC tại điểm P .

Chứng minh rằng $\sin \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{IP}{IN}$.

c) Gọi các điểm D và E lần lượt là hình chiếu của điểm I trên các cạnh AB và AC . Gọi các điểm H, K lần lượt đối xứng với các điểm D và E qua điểm I . Biết rằng $AB + AC = 3BC$, chứng minh rằng các điểm B, C, H, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



$$a) \text{ Ta có } \widehat{IBM} = \widehat{IBC} + \widehat{CBM} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

$$\widehat{BIM} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Suy ra $\widehat{IBM} = \widehat{BIM} \Rightarrow \triangle IMB$ cân tại M .

Tương tự, $\triangle IMC$ cân tại M .

$$b) \text{ Ta có } \sin \frac{\widehat{BAC}}{2} = \sin \widehat{BCM} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MI} \quad (1) \text{ (do } MP \perp BC \text{ và } MI = MC)$$

$$\triangle MBN \text{ vuông tại } B, \text{ có } MP.MN = MB^2 = MI^2 \Rightarrow \frac{MP}{MI} = \frac{MI}{MN} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \triangle MPI \sim \triangle MIN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{MI}{MN} = \frac{IP}{IN} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \sin \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{IP}{IN}.$$

$$c) \text{ Ta có } AB + AC = 3BC \Leftrightarrow \frac{AB + AC - BC}{2} = BC \Leftrightarrow AE = BC$$

$$\triangle IAE \sim \triangle MCP \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MP}{IE} = \frac{CP}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow IE = 2MP.$$

Gọi F là trung điểm của IK , $\triangle MCP = \triangle MIF$ (c.g.c) do $MC = MI$

$$\widehat{PMC} = \widehat{EIA} = \widehat{MIF}; MP = IF = \frac{1}{2}IE \Rightarrow \widehat{IFM} = \widehat{MPC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle IMK \text{ cân tại } M \Rightarrow MK = MI.$$

Tương tự, $MH = MI$. Suy ra $MB = MC = MH = MK = MI$. Vậy B, C, H, K cùng thuộc đường tròn tâm M .

□

Câu 5.

$$a) \text{ Tìm các số tự nhiên } x, y \text{ thỏa mãn } 5^x - 2^y = 1.$$

b) Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh có độ dài bằng 1 và P là điểm nằm trong lục giác đó. Các tia AP, BP, CP, DP, EP, FP cắt các cạnh của lục giác này lần lượt tại các điểm $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ (các điểm này lần lượt khác các điểm A, B, C, D, E, F). Chứng minh lục giác $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ có ít nhất một cạnh có độ dài lớn hơn hoặc bằng 1.

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } 5^x - 2^y = 1 \Leftrightarrow 2^y = 5^x - 1.$$

$$\text{Với } x = 2k + 1, \forall k \in \mathbb{N} \text{ ta có } 2^y = 4(5^{2k} + 5^{2k-1} + \dots + 5 + 1)$$

- Nếu $y < 2$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $y = 2$ thì $x = 1$ (thỏa mãn).
- Nếu $y > 2$ thì phương trình vô nghiệm vì VT chia hết cho 8 còn VP thì không chia hết cho 8.

$$\text{Với } x = 2k, \forall k \in \mathbb{N} \text{ ta có } 2^y = (5^k - 1)(5^k + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^k - 1 = 2^a \\ 5^k + 1 = 2^b \end{cases} \text{ với } a, b \in \mathbb{N}; 0 \leq a < b; a + b = y. \Rightarrow 2^b - 2^a = 2^a(2^{b-a} - 1) = 2.$$

- Nếu $a \geq 2$ thì $2^a(2^{b-a} - 1) : 4$, vô lí.
- Nếu $a = 1; a = 0$ thì $5^k = 3; 5^k = 2$, vô lí.

$$\text{Vậy } (x; y) = (1; 2).$$

b) Nhận xét: Trong nhiều trường hợp, $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ suy biến không còn là lục giác nên

sau đây ta thống nhất gọi là đa giác $M_1 \dots M_6$.

- Gọi O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$ (kí hiệu là $\mathcal{L}$). Nếu $P \equiv O$ thì đa giác $M_1 \dots M_6 \equiv \mathcal{L}$, ta có đpcm.
- Nếu P thuộc một trong ba đường chéo lớn của $\mathcal{L}$, $P \neq O$ thì P thuộc một trong sáu đoạn OA, OB, OC, OD, OE, OF . Giả sử $P \in OD$, khi đó hai tia AP, DP lần lượt đi qua đỉnh D , đỉnh A của $\mathcal{L}$ và ta có $M_1 \equiv D, M_4 \equiv A$. Còn lại 4 tia, cắt nhiều nhất 4 cạnh của $\mathcal{L}$. Như vậy tồn tại ít nhất hai cạnh AB, AF của $\mathcal{L}$ không chứa các điểm $M_1, \dots, M_6$. Xét tam giác có một cạnh là AB và một cạnh là M_4M_i của đa giác $M_1 \dots M_6$ gần AB nhất ($M_4 \equiv A$), ta luôn có $\widehat{M_4BM_i} > 90^\circ \Rightarrow M_4M_i > AB = 1$.
- Nếu P không thuộc ba đường chéo lớn của $\mathcal{L}$ thì P nằm trong một trong sáu tam giác đều của $\mathcal{L}$ mà ba đường chéo lớn chia ra. Giả sử P nằm trong $\triangle ODE$. Như vậy, tồn tại ít nhất cạnh AB của $\mathcal{L}$ không chứa các điểm $M_1, \dots, M_6$. Khi đó M_4M_5 luôn là một cạnh của đa giác $M_1 \dots M_6$ và ABM_5M_4 là tứ giác luôn có $\widehat{ABM_5} > 90^\circ$; $\widehat{BAM_4} > 90^\circ \Rightarrow M_4M_5 > AB = 1$.

□

———— HẾT ————

33 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI NĂM HỌC 2014-2015

◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆

Câu 1.

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chứng minh có ít nhất một trong các số a, b, c bằng 1.

b) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh $A = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ là hợp số.

Lời giải.

a) Từ giả thiết $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ta có $a + b + c = ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca - a - b - c = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + ab + bc + ca - a - b - c - abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a) - b(1 - a) - c(1 - b) + ca(1 - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)(1 - b) - c(1 - b)(1 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0$$

Vậy có ít nhất 1 trong các số a, b, c bằng 1. (Đpcm).

b) Ta có $2^{3n+1} = 2 \times 2^{3n} = 2 \times 8^n$.

Vì $8 \equiv 1 \pmod{7}$ nên $8^n \equiv 1^n \pmod{7}$ hay $2 \times 8^n \equiv 2 \pmod{7}$ (1)

Tương tự, phân tích $2^{3n-1} = 4 \times 2^{3n-3} = 4 \times 8^{n-1}$ ta có $4 \times 8^{n-1} \equiv 4 \pmod{7}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $A \equiv (2 + 4 + 1) \pmod{7}$, hay $A \equiv 7 \pmod{7}$.

Vì n là số nguyên dương, $A \geq 21$. Vậy A là hợp số. (Đpcm).

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $x\sqrt{3-2x} = 3x^2 - 6x + 4$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ x^2 + 8y^2 = 12 \end{cases}$$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x \leq \frac{3}{2}$.

$$3x^2 - 6x + 4 - x\sqrt{3-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [x^2 - 2x\sqrt{3-2x} + (3-2x)] + \frac{5}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (x - \sqrt{3-2x})^2 + \frac{5}{2} (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - \sqrt{3-2x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

b) Thay $x^2 + 8y^2 = 12$ vào phương trình đầu ta có

$$\begin{aligned}
 x^3 + 2xy^2 + (x^2 + 8y^2)y &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x + 2y)(x^2 - xy + 4y^2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x + 2y) \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{15y^2}{4} \right] &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{15y^2}{4} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ x = y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $x = -2y$, thay vào phương trình thứ 2 của hệ ta được $y = \pm 1$.

Trường hợp 2: $x = y = 0$, không thỏa mãn phương trình thứ 2 của hệ.

Kết luận: Hệ có hai nghiệm là $(2, -1); (-2, 1)$.

□

Câu 3. Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}}.$$

Lời giải.

Vì a, b, c là ba số dương nên theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{\sqrt{bc}}$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{\sqrt{ca}}$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta được:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \quad (1).$$

Mặt khác ta có:

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$b^2 - bc + c^2 \geq bc \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{bc}}$$

$$c^2 - ca + a^2 \geq ca \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Nên sau khi cộng các bất đẳng thức cùng chiều trên, ta được:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$P \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi (1) và (2) đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy Giá trị lớn nhất của P bằng 3, đạt được khi $a = b = c = 1$.

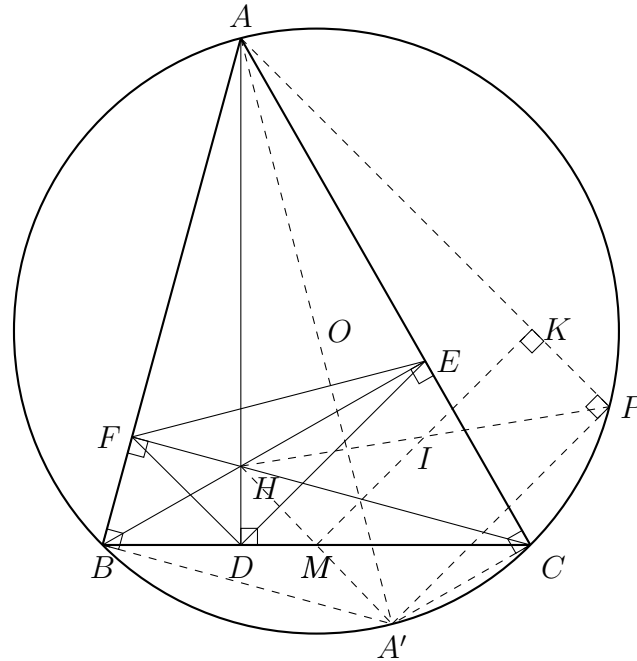
□

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H .

a) Chứng minh $\cos^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{CBA} + \cos^2 \widehat{ACB} < 1$.

- b) P là điểm thuộc cung nhỏ AC của đường tròn tâm O . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và HP . Chứng minh MI vuông góc với AP .

Lời giải.



- a) Vì tam giác BEA vuông tại E nên ta có $\cos^2 \widehat{BAC} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$ (1).

Dễ thấy tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp vì E, F cùng nhìn BC dưới 1 góc vuông. Vì vậy $\widehat{ABC} = \widehat{AEF} = 180^\circ - \widehat{FEC}$ (2).

Xét hai tam giác ABC và AEF có:
 $\widehat{A}$ chung.

$$\widehat{ABC} = \widehat{AEF} \quad (\text{theo (2)}).$$

Do đó tam giác ABC đồng dạng với tam giác AEF . Bình phương tỉ số đồng dạng bằng tỉ số diện tích nên ta có:

$$\left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1) và (3) suy ra } \cos^2 \widehat{BAC} = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} \quad (4).$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được:

$$\cos^2 \widehat{CBA} = \frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}} \quad (5).$$

$$\cos^2 \widehat{ACB} = \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} \quad (6).$$

Từ (4), (5), (6) ta có

$$\cos^2 \widehat{BAC} + \cos^2 \widehat{CBA} + \cos^2 \widehat{ACB} = \frac{S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BFD} + S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} < 1 \quad (\text{đpcm}).$$

- b) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O hay AA' là đường kính.

Xét tứ giác $BHCA'$ có:

$BH \parallel A'C$ (Vì cùng vuông góc với AC)

$CH \parallel A'B$ (Vì cùng vuông góc với AB)

Vậy tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành. Suy ra M là trung điểm của HA' .

Xét tam giác HPA' có:

M là trung điểm của HA' theo chứng minh trên

I là trung điểm của HP theo giả thiết

Vậy MI là đường trung bình trong tam giác HPA' . Suy ra $MI \parallel A'P$.

Dễ thấy $A'P$ vuông góc với AP vì AA' là đường kính.

Vậy MI vuông góc với AP . (Đpcm).

□

Câu 5.

- a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2 - p - 2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên.
- b) Cho 5 số thực không âm a, b, c, d, e có tổng bằng 1. Xếp 5 số này trên một đường tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cách xếp sao cho hai số bất kỳ cạnh nhau có tích không lớn hơn $\frac{1}{9}$.

Lời giải.

- a) Xét $p = 2$, lúc này ta có $\frac{p^2 - p - 2}{2} = 0 = 0^3$. Vậy $p=2$ thỏa mãn.

Trường hợp p nguyên tố, $p > 2$: Từ giả thiết ta có

$$p^2 - p - 2 = n^3 \Leftrightarrow p(p-1) = 2(n+1)(n^2 - n + 1)(1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p | (n+1) \\ p | (n^2 - n + 1) \end{cases}$$

Xét các khả năng sau:

- Nếu p là ước của $n+1$.

$$\Rightarrow p \leq (n+1)$$

$$\Rightarrow p-1 \leq n$$

$$\Rightarrow p(p-1) \leq n(n+1)$$

$$\Rightarrow 2(n+1)(n^2 - n + 1) \leq n(n+1)$$

$$\Rightarrow n^2 - 2n + 2 \leq 0 \text{ Vô lý.}$$

- Nếu p là ước của $(n^2 - n + 1)$.

Đặt $pk = n^2 - n + 1, k \in \mathbb{N}^*$ (2). Thay trở lại (1) ta có

$$p(p-1) = 2(n+1)pk$$

$$\Rightarrow p = 2(n+1)k + 1 \text{ (3)}$$

Thay (3) vào (2) ta có:

$$n^2 - (2k^2 + 1)n + 1 - 2k^2 - k = 0 \text{ (4)}$$

$$\Delta = 4k^4 + 12k^2 + 4k - 3.$$

Ta cần tìm k sao cho Δ là số chính phương. Nhận thấy: $(2k^2 + 2)^2 < \Delta < (2k^2 + 4)^2$.

Suy ra $\Delta = (2k^2 + 3)^2$. Từ đây ta có:

$$4k^4 + 12k^2 + 4k - 3 = (2k^2 + 3)^2 \Rightarrow k = 3.$$

Thay trở lại tìm n từ phương trình (4) và p từ (3) ta được: $p = 127$.

Vậy $p = 2$ hoặc $p = 127$.

- b) Không mất tính tổng quát, giả sử có sắp xếp $a \geq b \geq c \geq d \geq e$. Khi đó lấy a làm chuẩn và xếp theo chiều kim đồng hồ như sau:

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$. Cách xếp này thỏa mãn yêu cầu vì:

$$+, ad \leq \frac{1}{3}a(b+c+d) \leq \frac{1}{12}(a+b+c+d)^2 = \frac{1}{12} < \frac{1}{9}.$$

$$+, bd \leq ad < \frac{1}{9}.$$

$$+, ce \leq ac \leq ad < \frac{1}{9}$$

$$+, bc \leq \frac{1}{4}(b+c)^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}(a+b+c+d) \right)^2 = \frac{1}{9}.$$

□

————— HẾT —————

34 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - TP HÀ NỘI NĂM HỌC 2016 - 2017**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Chứng minh $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30, với mọi số nguyên dương n .
 b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2 + 8y$ và $y^2 + 8x$ là các số chính phương.

Lời giải.

- a) Ta có

$$x = n^5 + 5n^3 - 6n = n(n^4 + 5n^2 - 6) = n(n-1)(n+1)(n^2+6).$$

Do $n, n-1, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $n(n-1)(n+1) \vdots 6$, suy ra $x \vdots 6$.

Nếu $n \equiv 0 \pmod{5}$ hoặc $n \equiv \pm 1 \pmod{5}$ thì $n(n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod{5}$ nên $x \vdots 5$.

Nếu $n \equiv \pm 2 \pmod{5}$ thì $n^2 + 6 \equiv 10 \equiv 0 \pmod{5}$ nên $x \vdots 5$. Do đó ta có $x \vdots 5$ với mọi n .

Từ đó ta suy ra được $x \vdots 30$ với mọi số nguyên dương n .

- b) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq y$. Khi đó

$$x^2 < x^2 + 8y \leq x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2.$$

Mà $x^2 + 8y$ là số chính phương nên ta có các trường hợp sau

- $x^2 + 8y = (x+1)^2 \Leftrightarrow 8y = 2x+1$ (loại).

- $x^2 + 8y = (x+2)^2 \Leftrightarrow 2y = x+1$, khi đó

$$y^2 + 8x = y^2 + 16y - 8 = (y+8)^2 - 72 = a^2 \Leftrightarrow (y+8-a)(y+8+a) = 72 = 3^2 \cdot 2^3.$$

Do $y+8+a > y+8-a$ và hai số đó cùng tính chẵn lẻ, nên ta có

$$\begin{cases} y+a+8 = 2 \cdot 3^2 \\ y+8-a = 2^2 \end{cases} \Rightarrow y=3, x=5. \text{ hoặc } \begin{cases} y+a+8 = 2^2 \cdot 3^2 \\ y+8-a = 2 \end{cases} \Rightarrow y=11, x=21.$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} y+a+8 = 2^2 \cdot 3 \\ y+8-a = 2 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow y=1, x=1.$$

- $x^2 + 8y = (x+3)^2 \Leftrightarrow 8y = 6x+9$ (loại).

Vậy các cặp $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 1), (3; 5), (5; 3), (11; 21), (21; 11)$.

□

Câu 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} = 1 + \frac{3}{2x}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{cases}$.

Lời giải.

a) Đặt $a = \sqrt{2x - \frac{3}{x}}$, $b = \sqrt{\frac{6}{x} - 2x}$, ta có $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 = \frac{3}{x}$. Do đó, ta có

$$a + b = 1 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq 1 + \frac{1}{4}(a + b)^2$$

$$\Rightarrow (a + b - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = 1.$$

Từ đây ta có $\frac{3}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Ta thấy $x = \frac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$$\begin{cases} \sqrt{2x - \frac{3}{x}} \leq \frac{1 + 2x - \frac{3}{x}}{2} \\ \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq \frac{1 + \frac{6}{x} - 2x}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{6}{x} - 2x} \leq 1 + \frac{3}{2x}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện $\begin{cases} xy > 0 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$.

Cộng và trừ theo về hai phương trình của hệ ta có

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4x}{5y}} + \sqrt{\frac{5y}{x}} = 2\sqrt{x+y} \\ -\sqrt{\frac{4x}{5y}} + \sqrt{\frac{5y}{x}} = 2\sqrt{x-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4x}{5y} + 4 + \frac{5y}{x} = 4(x+y) \\ \frac{4x}{5y} - 4 + \frac{5y}{x} = 4(x-y) \end{cases},$$

suy ra $8 = 8y \Rightarrow y = 1$. Thay vào hệ ta có

$$\frac{4x}{5} + \frac{5}{x} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ (do } y > 0 \text{ nên } x > 0).$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; 1\right)$.

□

Câu 3. Với các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

a) Chứng minh $x + y + z \leq 2 + xy$

b) Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P = \frac{x}{2 + yz} + \frac{y}{2 + zx} + \frac{z}{2 + xy}$.

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ ta có

$$x + y + z \leq \sqrt{2[(x + y)^2 + z^2]} = \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy)} = 2\sqrt{1 + xy} \leq 1 + (1 + xy) = 2 + xy.$$

b) Theo chứng minh trên ta có $2 + xy \geq x + y + z$ nên $\frac{z}{2 + xy} \leq \frac{z}{x + y + z}$.

$$\text{Tương tự } \frac{x}{2 + yz} \leq \frac{x}{x + y + z}, \frac{y}{2 + zx} \leq \frac{y}{x + y + z}.$$

Suy ra $P \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi trong ba số x, y, z có hai số bằng 1 và một số bằng 0.

Do đó $\max P = 1$.

Ta có

$$2 + yz \leq 2 + \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{6 - x^2}{2},$$

do đó với $x \neq 0$, ta có

$$\frac{x}{2 + yz} \geq \frac{2x}{6 - x^2} = \frac{2x^2}{x(6 - x^2)} = \frac{2\sqrt{2}x^2}{\sqrt{2x^2(6 - x^2)(6 - x^2)}}.$$

Mà

$$2x^2(6 - x^2)(6 - x^2) \leq \left(\frac{2x^2 + 6 - x^2 + 6 - x^2}{3} \right)^3 = 4^3,$$

nên

$$\frac{x}{2 + yz} \geq \frac{\sqrt{2}x^2}{4}. \quad (1)$$

Và ta thấy (1) cũng đúng khi $x = 0$, do đó (1) đúng với mọi $x \geq 0$. Tương tự ta cũng có

$$\frac{y}{2 + zx} \geq \frac{\sqrt{2}y^2}{4}, \quad \frac{z}{2 + xy} \geq \frac{\sqrt{2}z^2}{4}.$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{\sqrt{2}}{4} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

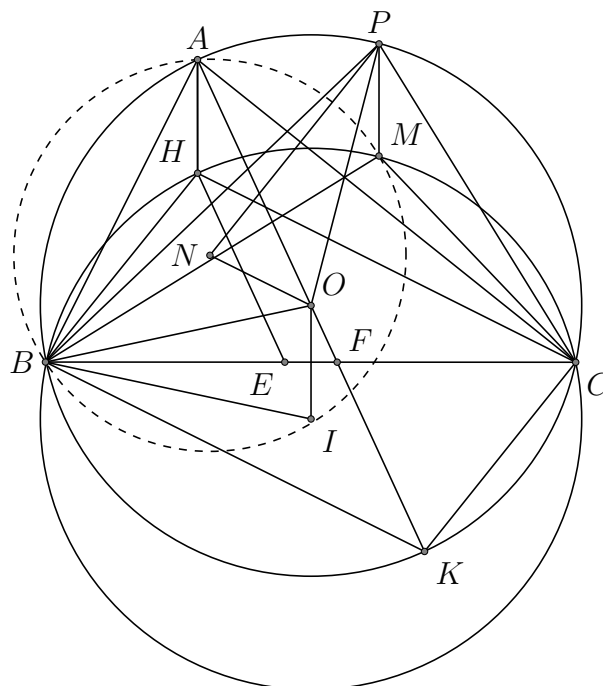
Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = y = 0, z = \sqrt{2}$. Vậy $\min P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($BC > CA > AB$) nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt tia phân giác góc $\widehat{ABC}$ tại điểm thứ hai M . Gọi P là trực tâm tam giác BCM .

- Chứng minh bốn điểm A, B, C, P cùng thuộc một đường tròn
- Đường thẳng HM song song với AO cắt cạnh BC tại E . Gọi F là điểm trên cạnh BC sao cho $CF = BE$. Chứng minh ba điểm A, F, O thẳng hàng
- Gọi N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM . Chứng minh rằng $PN = PO$.

Lời giải.



- a) Ta có P, H là trực tâm các tam giác BHC và ABC nên ta có

$$\widehat{BPC} = 180^\circ - \widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{BHC} = \widehat{BAC},$$

suy ra tứ giác $BAPC$ nội tiếp.

- b) Kẻ đường kính AK , ta có $BKCH$ là hình bình hành.

Xét hai tam giác BHE và CKF có

$$BH = CK, BE = CF \text{ và } \widehat{FCK} = \widehat{EBH}$$

nên $\triangle BHE = \triangle CKF$, suy ra $\widehat{BEH} = \widehat{CFK}$. Dẫn tới $HE \parallel KF$

Mặt khác $HE \parallel AK$ nên ta có A, K, F thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

- c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC . Vì $\triangle BHC = \triangle BKC$ nên $IB = IC = OB = OC$.

Ta có ON là đường trung trực cạnh AB , OI là đường trung trực cạnh BC và IN là đường trung trực cạnh BM , nên $\widehat{ONI} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{OIN} = \widehat{MBC}$.

Mặt khác $\widehat{ABM} = \widehat{MCB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ONI} = \widehat{OIN} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. Suy ra $\triangle ONI$ cân tại O và $\widehat{NOI} = 180^\circ - \widehat{ABC}$. Lại có

$$\widehat{POB} = 2\widehat{PCB} = 2(90^\circ - \widehat{MBC}) = 180^\circ - 2\widehat{MBC} = 180^\circ - \widehat{ABC}.$$

Nên ta có $\widehat{NOI} = \widehat{POB}$, suy ra $\widehat{NOP} = \widehat{IOB}$.

Từ đó dẫn đến $\triangle OBI = \triangle OPN$, mà $\triangle OBI$ cân tại B nên $PN = PO$.

□

Câu 5. Trên bàn có 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Hai người A và B lần lượt mỗi người lấy một tấm thẻ trên bàn sao cho nếu người A lấy tấm thẻ đánh số n thì đảm bảo người B chọn được tấm thẻ đánh số $2n + 2$. Hỏi người A có thể lấy được nhiều nhất bao nhiêu tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu trên?

Lời giải.

Vì B bốc thẻ $2n + 2$ nên $2n + 2 \leq 100$. Suy ra $n \leq 49$. Do đó, A chỉ được bốc các thẻ đánh từ 1 đến 49.

Bây giờ, ta chia tập $\{1; 2; \dots; 49\}$ thành 33 tập con như sau:

$\{1; 4\}, \{3; 8\}, \{5; 12\}; \dots, \{23; 49\}$ (12 nhóm);

$\{2; 6\}, \{10; 22\}, \{14; 30\}, \{18; 38\}$ (4 nhóm);

$\{25\}, \{27\}, \{29\}, \dots, \{49\}$ (13 nhóm);

$\{26\}, \{32\}, \{42\}, \{46\}$ (4 nhóm).

Ở mỗi nhóm, A được chọn tối đa một số. Nếu A chọn nhiều hơn 34 số trong các số từ 1 đến 49 thì theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số thuộc cùng một nhóm (vô lý). Do đó, A được chọn không quá 33 số.

Mặt khác, A có thể chọn 33 số sau :

$$\{1, 3, 5, \dots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, 29, \dots, 49, 26, 32, 42, 46\}$$

thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy người A có thể lấy nhiều nhất 33 tấm thẻ trên bàn thỏa mãn yêu cầu trên.

□

————— **HẾT** —————

35 ĐỀ THI HSG LỚP 9 - QUẬN HOÀN KIẾM - TP HÀ NỘI NĂM 2018**◆◆◆ NỘI DUNG ĐỀ ◆◆◆****Câu 1.**

- a) Tìm ba số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.
 b) Tìm bộ số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn đẳng thức $1 + \sqrt{x+y+3} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Lời giải.

a) Gọi ba số cần tìm là a, b, c . Theo đề ta có $abc = 5(a+b+c)$.

Để thấy $abc : 5$ nên trong ba số a, b, c có ít nhất một số chia hết cho 5.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a : 5$. Vì a nguyên tố nên $a = 5$, từ đó

$$5bc = 5(5+b+c) \Leftrightarrow (b-1)(c-1) = 6.$$

Kết hợp với điều kiện b, c nguyên tố ta thu được $b = 2, c = 7$ hoặc $b = 7, c = 2$.

Vậy có 6 bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn yêu cầu là $(5; 2; 7)$ và các hoán vị.

b) Từ giả thiết suy ra $\sqrt{x+y+3} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1$. Bình phương hai vế và thu gọn ta có

$$\sqrt{xy} - \sqrt{x} - \sqrt{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} - 1) = 2 \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$.

- Xét $y \geq 6$ thì $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} - 1) \geq (\sqrt{6} - 1)^2 > 2$ (mâu thuẫn).
- Xét $0 \leq y < 6$, vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Thay vào $(*)$ tìm được $x = 9, y = 4$.

Vậy có 2 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu là $(9; 4)$ và $(4; 9)$. □

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 6y + 2 = \frac{x}{y} - \sqrt{x - 2y} \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 2y}} = x + 3y - 2 \end{cases}.$$

Lời giải.

a) Điều kiện: $x - \frac{1}{x} \geq 0$.

Do $x \neq 0$ nên chia hai vế của phương trình cho x ta thu được

$$x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0.$$

Tìm được $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1$ hoặc $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = -3$ (loại).

Từ $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1$ ta tìm được $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện
$$\begin{cases} y \neq 0 \\ x - 2y \geq 0 \\ x + \sqrt{x - 2y} \geq 0 \end{cases}.$$

Quy đồng mẫu số phương trình đầu của hệ ta thu được

$$x - 2y - y\sqrt{x - 2y} - 6y^2 = 0.$$

Từ đó suy ra được $\sqrt{x - 2y} = -2y$ hoặc $\sqrt{x - 2y} = 3y$.

Trường hợp 1. Xét $\sqrt{x - 2y} = -2y$. Thay vào phương trình sau ta có

$$\sqrt{x - 2y} = x + 3y - 2 \Rightarrow -2y = x + 3y - 2 \Leftrightarrow x = 2 - 5y.$$

$$\text{Do đó, } \sqrt{x - 2y} = -2y \Leftrightarrow \sqrt{2 - 7y} = -2y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ 2 - 7y = 4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = 12.$$

Trường hợp 2. Xét $\sqrt{x - 2y} = 3y$. Thay vào phương trình sau ta có

$$\sqrt{x + 3y} = x + 3y - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x + 3y} = -1 \text{ (loại) hoặc } \sqrt{x + 3y} = 2 \Leftrightarrow x = 4 - 3y.$$

$$\text{Do đó, } \sqrt{x - 2y} = 3y \Leftrightarrow \sqrt{4 - 5y} = 3y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4 - 5y = 9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \frac{8}{3}.$$

Thử lại ta có các nghiệm của hệ là $(12; -2)$ và $(\frac{8}{3}; \frac{4}{9})$. □

Câu 3. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

a) Chứng minh $xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq 2 + xyz$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2+y} + \frac{y}{2+z} + \frac{z}{2+x}$.

Lời giải.

a) Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y \leq z$. Khi đó,

$$\begin{aligned} x(y-z)(y-x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow xy^2 + zx^2 &\leq x^2y + xyz \\ \Leftrightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 &\leq y(x^2 + z^2) + xyz = y(3 - y^2) + xyz. \end{aligned}$$

Xét hiệu $2 - y(3 - y^2) = y^3 - 3y + 2 = (y - 1)^2(y + 2) \geq 0$.

Suy ra $y(3 - y^2) \leq 2 \Rightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq 2 + xyz$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ hoặc $(0; 1; \sqrt{2})$ và các hoán vị của chúng.

b) Nhận xét: Biến đổi $P \leq 1 \Leftrightarrow xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq 2 + xyz$.

Từ đó tìm được $P_{\max} = 1 \Leftrightarrow (x; y; z) = (1; 1; 1)$ hoặc $(0; 1; \sqrt{2})$ và các hoán vị của chúng.

$$\text{Ta có } P = \frac{x^2}{2x + xy} + \frac{y^2}{2y + yz} + \frac{z^2}{2z + zx} \geq \frac{(x + y + z)^2}{2(x + y + z) + xy + yz + zx} = Q$$

(bất đẳng thức Cauchy-Schwarz).

Đặt $t = x + y + z$ thì $xy + yz + zx = \frac{t^2 - 3}{2}$ với $\sqrt{3} \leq t \leq 3$.

Khi đó, $Q = \frac{2t^2}{t^2 + 4t - 3}$ với $\sqrt{3} \leq t \leq 3$.

$$\text{Ta có } Q \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{2t^2}{t^2 + 4t - 3} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (t - \sqrt{3})[(4 - \sqrt{3})t - 3] \geq 0 \text{ (luôn đúng với } t \geq \sqrt{3}).$$

Từ đó tìm được $P_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (x; y; z) = (\sqrt{3}; 0; 0)$ và các hoán vị của nó. □

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P .

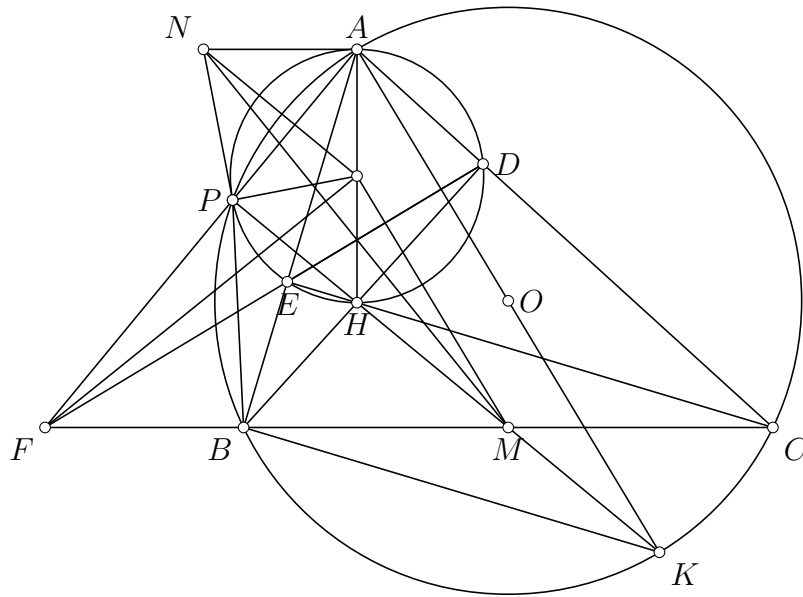
a) Chứng minh hai tam giác PBC và PED đồng dạng.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm P, H, M thẳng hàng.

c) Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau tại N . Chứng minh rằng các đường

thẳng MN, DE, AH đồng quy.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{PCB} = \widehat{PAB} = \widehat{PDE}$ và $\widehat{PBC} = 180^\circ - \widehat{PAC} = \widehat{PED}$.

Do đó $\triangle PBC \sim \triangle PED$ (g-g).

b) Kẻ đường kính AK , ta có $\widehat{APK} = 90^\circ$, chú ý $\widehat{APH} = 90^\circ$ từ đó ba điểm P, H, K thẳng hàng. Mặt khác, $BH \parallel KC$, $CH \parallel KB$ nên $BHCK$ là hình bình hành.

Từ đó H, M, K thẳng hàng. Suy ra P, H, M thẳng hàng.

c) Gọi F là giao điểm của AP và BC , ta có $\widehat{AEP} = \widehat{AHP} = \widehat{BFP}$, từ đó $BEPF$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{FEP} = \widehat{FBP} = \widehat{PAC}$.

Suy ra $\widehat{FEP} + \widehat{DEP} = \widehat{PAC} + \widehat{DEP} = 180^\circ$ từ đó ba điểm D, E, F thẳng hàng, chú ý rằng IM là trung trực của DE , do đó $DE \perp IM$.

Ta có $\widehat{NIP} = \widehat{AHP} = \widehat{MFP}$, từ đó $\triangle PNI \sim \triangle PMF$ (g-g) (*)

Từ (*) dễ dàng suy ra $\triangle IPF \sim \triangle NPM$ (c-g-c), suy ra $\widehat{PIF} = \widehat{PNM} \Rightarrow FI \perp MN$.

Chú ý $AH \perp FM$, từ đó MN, DE, AH là ba đường cao của $\triangle IMF$ nên chúng đồng quy. $\square$

Câu 5. Một số số nguyên dương được viết trên một bảng đen. Tổng của hai số bất kì trong chúng là lũy thừa của 2. Hỏi trên bảng có thể có nhiều nhất bao nhiêu số phân biệt?

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh rằng số các số nguyên dương phân biệt không thể lớn hơn 2.

Thật vậy, giả sử có ba số $a < b < c$ trên bảng (trường hợp 4 số trở lên vẫn trích ra được bộ ba số như thế).

Dễ thấy theo đề bài, $a + b; b + c; c + a$ là ba lũy thừa phân biệt của 2.

Mặt khác, $a + b < a + c < b + c$ suy ra $b + c \geq 2(a + c)$ hay $b \geq 2a + c$ (vô lí).

Từ đó suy ra có nhiều nhất hai số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta có thể lấy một trường hợp cụ thể là 1 và 3. $\square$

———— HẾT ————